



UNIWERSYTET ZIELONOGÓRSKI

Dziedzina nauk ścisłych i przyrodniczych
Dyscyplina: Matematyka

ROZPRAWA DOKTORSKA

Jednostajna zbieżność szeregów
trygonometrycznych o współczynnikach
tworzących ciągi o ograniczonych p -tych
wariacjach

Uniform convergence of trigonometric series
with p -bounded variation coefficients

Mateusz Kubiak

Promotor rozprawy doktorskiej
dr hab. Bogdan Szal, prof. UZ

.....
(podpis promotora)

.....
(data)

Zielona Góra, 2023

Spis treści

Wstęp	3
1 Klasy ciągów o ograniczonych wariacjach	5
1.1 Pojedyncze ciągi o ograniczonych wariacjach	5
1.1.1 Wiadomości wstępne	5
1.1.2 Relacje między klasami	7
1.2 Podwójne ciągi o ograniczonych wariacjach	17
1.2.1 Wprowadzenie	18
1.2.2 Zależności między klasami	19
2 Zbieżność jednostajna pojedynczych szeregów trygonometrycznych	28
2.1 Twierdzenia pomocnicze	28
2.2 Zbieżność jednostajna pojedynczych szeregów sinusów i cosinusów	30
3 Zbieżność jednostajna podwójnych szeregów trygonometrycznych	46
3.1 Twierdzenia pomocnicze	47
3.2 Zbieżność jednostajna podwójnych szeregów sinusów	53
3.3 Zbieżność jednostajna podwójnych szeregów mieszanych	78
Bibliografia	97

Wstęp

Niniejsza rozprawa doktorska została poświęcona problematyce jednostajnej zbieżności pojedynczych oraz podwójnych szeregów trygonometrycznych. Motywacją do jej napisania była chęć uogólnienia oraz rozszerzenia dotychczas znanych w literaturze wyników dotyczących tej problematyki. Punktem wyjścia do jej napisania stały się klasyczne wyniki poświęcone tej problematyce, które pojawiły się na początku XX wieku. Podają one charakterystykę jednostajnej zbieżności pojedynczych oraz podwójnych szeregów trygonometrycznych, gdzie istotnym założeniem była monotoniczność współczynników tych szeregów. Pierwsza praca związana z tą problematyką pochodzi z 1916 roku i została napisana przez brytyjskich matematyków T. W. Chaundy'ego i A. E. Jolliffe'a [1]. Przedstawione zostały w niej wyniki dotyczące jednostajnej zbieżności pojedynczych szeregów sinusów, które opierają się na założeniu, że współczynniki tych szeregów są monotoniczne. Analogiczny wynik dla przypadku pojedynczych szeregów cosinusów został zaprezentowany w monografii A. Zygmunda [54], która pochodzi z 1959 roku. Następnie, w 1966 roku I. E. Żak i A. A. Šneider [48] uzyskali podobny wynik dotyczący jednostajnej zbieżności podwójnych szeregów sinusów przy założeniu, że współczynniki tych szeregów tworzą podwójny ciąg nierosnący.

Znaczącym momentem w badaniach nad problemem związanym z jednostajną zbieżnością szeregów sinusów była praca autorstwa L. Leindlera [27] z 2001 roku, w której wprowadzona została klasa pojedynczych ciągów o ograniczonej resztowej wariacji. Praca ta miała wpływ na zintensyfikowanie badań nad uogólnieniem klasycznych wyników jednostajnej zbieżności dla szeregów pojedynczych oraz podwójnych poprzez zastąpienie ciągów monotonicznych ciągami o ograniczonych wariacjach. Wynikiem tych badań było wprowadzenie nowych klas ciągów o ograniczonych wariacjach, których wykorzystanie pozwoliło na uogólnienie klasycznych wyników. Dla szeregów pojedynczych, nowe klasy ciągów o ograniczonych wariacjach zostały wprowadzone oraz badane, między innymi w pracach: [5] ÷ [7], [8], [10], [19] ÷ [27], [29] ÷ [33], [35] ÷ [18], [49] ÷ [53]. Warto wspomnieć również o wynikach uzyskanych przez B. Szala w pracy [37] z roku 2011, w której rozszerzył on klasy ciągów o ograniczonych wariacjach poprzez wykorzystanie w definicji tych klas sumy różnic wyrazów ciągów o dowolnym kroku $r \in \mathbb{N}$ zastępując różnicę o kroku 1. W tym samym roku S. Tikhonov w pracy [45] oraz L. Leindler w pracy [20] wprowadzili klasę ciągów pojedynczych o ograniczonych p -tych wariacjach. W rozprawie zostanie zdefiniowana nowa szersza klasa pojedynczych ciągów o ograniczonych p -tych wariacjach, która jest modyfikacją klasy zdefiniowanej przez S. Tikhonova oraz L. Leindlera poprzez wykorzystanie sumy różnic wyrazów ciągów o dowolnym kroku r . Klasa ta zostanie użyta w rozprawie do uogólnienia i rozszerzenia klasycznych wyników jednostajnej zbieżności pojedynczych szeregów trygonometrycznych.

Pierwsza klasa podwójnych ciągów o ograniczonych wariacjach została wprowadzona przez P. Kórusa oraz F. F. Móricza w pracy [11], która ukazała się w 2009 roku. W artykule tym rozszerzono wynik I. E. Żak i A. A. Šneider dotyczący jednostajnej zbieżności podwójnych szeregów sinusów dla nowo zdefiniowanej klasy ciągów. Ponadto, w roku 2011

P. Kórus w pracy [12] po raz kolejny uogólnił wspomniane wcześniej twierdzenia na szerszą klasę ciągów o ograniczonych wariacjach, jak również przedstawił analogiczne twierdzenie dla szeregów mieszanych. Następnie, K. Duzinkiewicz w pracy [4] i we wspólnej pracy z B. Szalem [3] wprowadzili nową klasę podwójnych ciągów o ograniczonych wariacjach poprzez wykorzystanie sumy różnic wyrazów ciągów o kroku $r \in \mathbb{N}$. Wykorzystali oni następnie tę klasę do uogólnienia wspomnianych wcześniej wyników dotyczących jednostajnej zbieżności podwójnych szeregów sinusów i podwójnych szeregów mieszanych. W rozprawie zostanie wprowadzona nowa szersza klasa podwójnych ciągów o ograniczonych p -tych wariacjach, która zostanie użyta do uogólnienia i rozszerzenia dotychczas znanych w literaturze wyników jednostajnej zbieżności podwójnych szeregów sinusów oraz podwójnych szeregów mieszanych.

Niniejsza rozprawa doktorska składa się z trzech rozdziałów. W rozdziale pierwszym zostaną zaprezentowane wybrane klasy pojedynczych ciągów jak również podwójnych ciągów o ograniczonych wariacjach. Na początku podrozdziału 1.1 zdefiniowana zostanie nowa klasa ciągów o ograniczonych p -tych wariacjach pochodząca z pracy [17], która jest wypadkową klas wprowadzonych przez B. Szala w artykułach [37], [41] oraz S. Tikhonova i E. Lifylanda w pracach [29], [30]. Następnie w tym podrozdziale zostaną omówione najważniejsze klasy ciągów o ograniczonych wariacjach oraz zależności między nimi, z uwzględnieniem nowo wprowadzonej klasy ciągów. Wyniki tego podrozdziału pochodzą z pracy [17]. Podrozdział 1.2 zawiera zestawienie klas podwójnych ciągów o ograniczonych wariacjach. Schemat tego podrozdziału będzie analogiczny jak dla pojedynczych ciągów, czyli na początku zdefiniowana będzie nowa klasy podwójnych ciągów o ograniczonych p -tych wariacjach, a następnie przedstawione zostaną zależności między tą klasą oraz klasami dotychczas rozważanymi w literaturze. Rezultaty tego podrozdziału pochodzą z pracy [14].

W rozdziale drugim przedstawione zostaną wyniki jednostajnej zbieżności pojedynczych szeregów trygonometrycznych. W podrozdziale 2.1 zaprezentowane zostaną twierdzenia pomocnicze, które będą wykorzystane do dowodów wyników z podrozdziału 2.2 dotyczących jednostajnej zbieżności pojedynczych szeregów trygonometrycznych. Rezultaty tego rozdziału były zaprezentowane na międzynarodowej konferencji "Function Spaces", która odbyła się w Krakowie w 2018 roku i pochodzą one z prac [16], [17].

Rozdział trzeci będzie zawierać wyniki dotyczące jednostajnej zbieżności podwójnych szeregów trygonometrycznych. Analogicznie jak dla pojedynczych szeregów, w podrozdziale 3.1 zawarte będą twierdzenia pomocnicze, które wykorzystane zostaną w dowodach głównych twierdzeń tego rozdziału. W podrozdziale 3.2 oraz 3.3 przedstawione zostaną twierdzenia podające warunek konieczny oraz dostateczny jednostajnej zbieżności odpowiednio dla podwójnych szeregów sinusów oraz podwójnych szeregów mieszanych. Wyniki tego rozdziału zostały zawarte w pracach [14], [15].

W tym miejscu chciałbym złożyć serdeczne podziękowania mojemu promotorowi Panu dr hab. Bogdanowi Szalowi za cierpliwość, wyrozumiałość oraz cenne rady i wskazówki, które przyczyniły się do powstania niniejszej rozprawy doktorskiej. Dodatkowo mojemu promotorowi oraz wszystkim współpracownikom z firmy Atlasus, a w szczególności Monice Halasz-Kawałkowskiej oraz Markowi Michalskiemu chciałbym podziękować za wyrozumiałość oraz umożliwienie łączenia pracy zawodowej z pracą naukową. Osobne podziękowania należą się mojej żonie Marcie za cierpliwość oraz nieustanne wsparcie.

Rozdział 1

Klasy ciągów o ograniczonych wariacjach

Klasyczne wyniki dotyczące jednostajnej zbieżności pojedynczych oraz podwójnych szeregów trygonometrycznych opierają się na założeniu, że współczynniki tych szeregów tworzą ciągi monotoniczne. Pierwszy wynik dotyczący tej problematyki w przypadku pojedynczych szeregów sinusów został przedstawiony w pracy T. W. Chaundy’ego i A. E. Jolliffe’a ([1]), natomiast w przypadku podwójnych szeregów sinusów w pracy I. E. Žaka i A. A. Šneidera ([48]). Wyniki te były następnie uogólniane poprzez osłabienie warunku monotoniczności ciągów, między innymi przez zastąpienie ciągów monotonicznych ciągami o ograniczonych wariacjach. W tym rozdziale rozprawy doktorskiej zostaną zdefiniowane podstawowe klasy pojedynczych oraz podwójnych ciągów o ograniczonych wariacjach oraz przedstawione zależności między tymi klasami.

1.1 Pojedyncze ciągi o ograniczonych wariacjach

W tym podrozdziale wprowadzone zostaną klasy pojedynczych ciągów o ograniczonych wariacjach, których wykorzystanie w istotny sposób uogólniło klasyczne wyniki dotyczące jednostajnej zbieżności pojedynczych szeregów trygonometrycznych. Zaczniemy ten podrozdział od wprowadzenia podstawowych oznaczeń. Niech MS (ang. *Monotone Sequences*) oznacza klasę pojedynczych ciągów nierosnących $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$. Natomiast dla dowolnej liczby $r \in \mathbb{N}$ niech

$$\Delta_r c_k := c_k - c_{k+r}.$$

Ponadto będziemy zapisywać $I_1(n) \ll I_2(n)$ jeżeli istnieje dodatnia stała C niezależna od n taka, że $I_1(n) \leq CI_2(n)$.

1.1.1 Wiadomości wstępne

We wspólnej pracy z B. Szalem [17] zdefiniowana została następująca klasa pojedynczych ciągów o ograniczonych p -tych wariacjach:

Definicja 1. [17] Niech $\delta = \{\delta_k\}_{k=1}^{\infty}$ będzie ciągiem o wyrazach nieujemnych, r liczbą naturalną oraz p dodatnią liczbą rzeczywistą. Ciąg liczb zespolonych $c = \{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ nazywać będziemy (p, δ, r) -general monotone lub oznaczać $c \in GM(p, \delta, r)$, jeśli istnieje dodatnia stała C zależna tylko od $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$, taka, że warunek

$$\left(\sum_{k=n}^{2n-1} |\Delta_r c_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq C \delta_n$$

jest spełniony dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$.

Dodatkowo zdefiniujmy następującą klasę ciągów:

Definicja 2. Niech $\delta = \{\delta_k\}_{k=1}^{\infty}$ będzie ciągiem o wyrazach nieujemnych, r liczbą naturalną oraz p liczbą rzeczywistą. Ciąg liczb zespolonych $c = \{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ będziemy nazywać (p, δ, r) -rest bounded variation i oznaczać $c \in RBV(p, \delta, r)$, jeśli istnieje dodatnia stała C zależna tylko od $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$, taka, że warunek

$$\left(\sum_{k=n}^{\infty} |\Delta_r c_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq C \delta_n$$

jest spełniony dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$.

Wprost z definicji powyższych klas wynika następująca zależność między tymi klasami:

$$RBV(p, \delta, r) \subseteq GM(p, \delta, r).$$

Warto zauważyć, że dla $p = 1$ klasy $GM(1, \delta, r)$ i $RBV(1, \delta, r)$ zostały wprowadzone przez B. Szala odpowiednio w pracach [37], [41]. W artykułach tych B. Szal jako pierwszy wykozystał różnice wyrazów ciągu $c = \{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ o kroku r postaci $|c_k - c_{k+r}|$ dla dowolnego $r \in \mathbb{N}$. Było to istotne rozszerzenie klas ciągów o ograniczonych wariacjach dotychczas występujących w literaturze, które bazowały na różnicy wyrazów ciągu $c = \{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ o kroku 1 postaci $|c_k - c_{k+1}|$. Z kolei powyższe klasy dla $r = 1$ oraz $p = 1$ zostały wprowadzone przez S. Tikhonova w pracy [45] oraz L. Leindlera w pracy [20].

Dodatkowo, warto zauważyć, że dla przypadku $r = 1$ klasy $GM(p, \delta, 1)$ oraz $RBV(p, \delta, 1)$ zostały wprowadzone przez S. Tikhonova oraz E. Liflyanda w pracach [29], [30].

W dalszej części pracy dla dowolnego ciągu liczb zespolonych $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ takiego, że $c_k \rightarrow 0$, gdy $k \rightarrow \infty$, rozważać będziemy następujące przykłady ciągów $\delta = \delta_n$ dla $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} 1\delta_n &= 1\delta = |c_n|, \\ 2\delta_n &= 2\delta = \max_{n \leq k \leq n+N} |c_k|, \text{ dla pewnej liczby } N \in \mathbb{N}, \\ 3\delta_n &= 3\delta = \frac{1}{k} \sum_{k=[n/\lambda]}^{[\lambda n]} |c_k| \text{ dla pewnej liczby rzeczywistej } \lambda \geq 2, \\ 4\delta_n &= 4\delta = \frac{1}{n} \left(\sup_{m \geq [n\lambda]} \sum_{k=m}^{2m} |c_k| \right) \text{ dla pewnej liczby rzeczywistej } \lambda \geq 2, \end{aligned}$$

oraz

$$5\delta_n(q) = 5\delta(q) = \frac{1}{n} \sup_{m \geq b(n)} m \left(\frac{1}{m} \sum_{k=m}^{2m} |c_k|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

i

$$6\delta_n(q) = 6\delta(q) = \frac{1}{n} \max_{b(n) \leq m \leq \lambda b(n)} m \left(\frac{1}{m} \sum_{k=m}^{2m} |c_k|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

dla dowolnych liczb rzeczywistych $q > 0, \lambda \geq 2$, dowolnego ciągu $\{b(k)\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}_+^0 = [0, +\infty)$ dążącego monotonicznie do nieskończoności. W dalszej części pracy pisząc ${}_5\delta_n$ będziemy mieli na myśli ${}_5\delta_n(1)$, analogiczne oznaczenie będziemy wykorzystywać dla ciągu ${}_6\delta_n(q)$.

Warto zauważyć, że wykorzystując ciąg ${}_1\delta_n$ i kładąc $p = 1$ oraz $r = 1$ w Definicji 2, otrzymujemy klasę ciągów o ograniczonej resztowej wariacji $RBV(1, {}_1\delta, 1)$, która została wprowadzona w pracy L. Leindlera ([27]), gdzie oznaczona była $RBVS$ (*ang. Rest Bounded variation Sequence*). Była to pierwsza praca, która zapoczątkowała rozważania na temat klas ciągów o ograniczonych wariacjach oraz wykorzystanie takich klas do rozszerzenia klasycznych wyników dotyczących jednostajnej zbieżności szeregów trygonometrycznych.

Ponadto klasy $GM(1, {}_1\delta, 1)$, $GM(1, {}_2\delta, 1)$, $GM(1, {}_3\delta, 1)$, $GM(1, {}_4\delta, 1)$, $GM(1, {}_5\delta, 1)$, $GM(1, {}_3\delta, 2)$ rozważane były w pracach: [45], [18], [44] z $\lambda > 1$, oraz równolegle w pracy [53] z $\lambda \geq 2$, [10], [10], [37] i oznaczone w nich odpowiednio GM , $GBVS$, $MVBVS$, $SBVS$, $SBVS_2$ i $GM(\delta, r)$.

Warto także wspomnieć, że klasa $GM(1, {}_1\delta, 1)$ była rozważana również w pracach [7], [46]. Ponadto w pracy [2] klasa ta została wykorzystana do dowodu zawierania się pewnych przestrzeni funkcyjnych.

1.1.2 Relacje między klasami

Pokażemy teraz, że nowo wprowadzona klasa $GM(p, \delta, r)$ jest w istotny sposób szersza od do tej pory rozpatrywanych w literaturze klas ciągów o ograniczonych wariacjach. Na początek wprowadzimy wyniki pomocnicze, które zostaną wykorzystane w dowodach zależności między klasami ciągów o ograniczonych wariacjach.

Lemat 1. [9] *Jeśli $c = \{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ jest ciągiem o wyrazach nieujemnych oraz $0 < \alpha \leq \beta < \infty$, wtedy*

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} c_k^{\beta} \right)^{\frac{1}{\beta}} \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} c_k^{\alpha} \right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

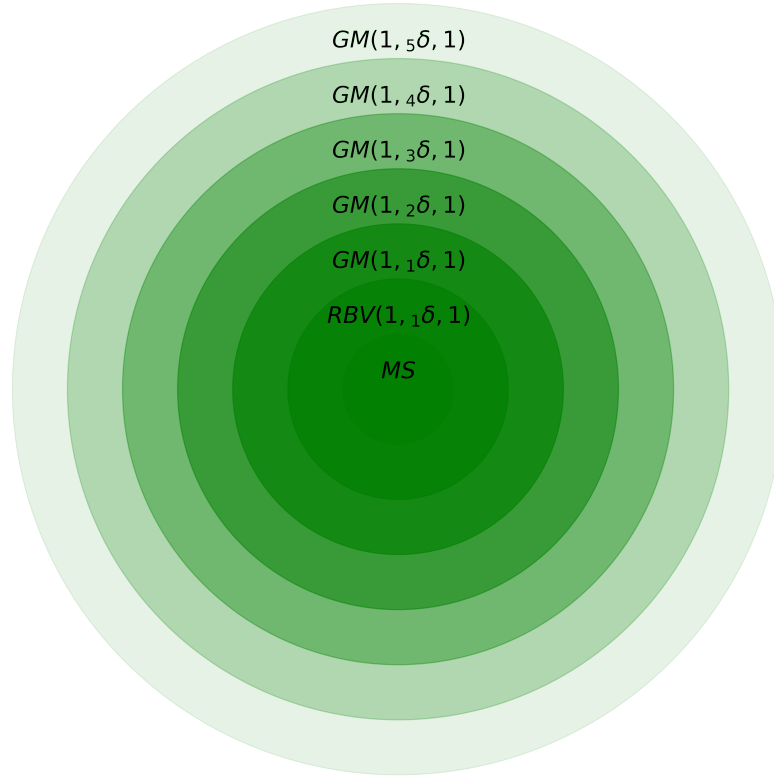
Lemat 2. [34] *Jeśli $c = \{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ jest ciągiem o wyrazach nieujemnych, $0 < q_1 \leq q_2 < \infty$ oraz $\nu \geq n$, wtedy*

$$\left(\frac{1}{\nu - n + 1} \sum_{k=n}^{\nu} c_k^{q_1} \right)^{\frac{1}{q_1}} \leq \left(\frac{1}{\nu - n + 1} \sum_{k=n}^{\nu} c_k^{q_2} \right)^{\frac{1}{q_2}}.$$

W pracach [10], [18], [53], [27], [45], [44] pokazano następujące zależności:

$$\begin{aligned} MS \subsetneq RBV(1, {}_1\delta, 1) \subsetneq GM(1, {}_1\delta, 1) \subsetneq GM(1, {}_2\delta, 1) \subsetneq GM(1, {}_3\delta, 1) \subsetneq GM(1, {}_4\delta, 1) \\ \subsetneq GM(1, {}_5\delta, 1). \end{aligned}$$

Powyższe zależności można zobrazować na poniższym grafie:



Rysunek 1.1: Zależności między klasami MS , $RBV(1, {}_1\delta, 1)$, $GM(1, {}_1\delta, 1)$, $GM(1, {}_2\delta, 1)$, $GM(1, {}_3\delta, 1)$, $GM(1, {}_4\delta, 1)$, $GM(1, {}_5\delta, 1)$.

Ponadto, korzystając z definicji ciągów ${}_5\delta(q)$ i ${}_6\delta(q)$ otrzymujemy:

$$GM(p, {}_6\delta(q), r) \subseteq GM(p, {}_5\delta(q), r)$$

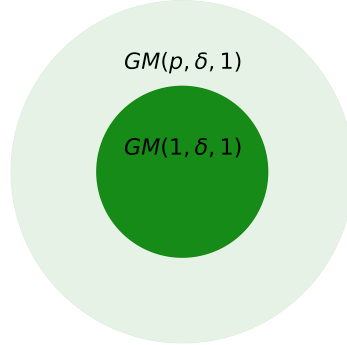
dla $r \in \mathbb{N}$, $q > 0$ i $p > 0$.

Wykorzystując Lemat 1 otrzymujemy następującą zależność:

$$GM(1, \delta, 1) \subseteq GM(p, \delta, 1),$$

dla $p \geq 1$ i dowolnego ciągu δ .

Powyższą zależność ilustruje poniższy graf:



Rysunek 1.2: Zależności między klasami $GM(1, \delta, 1)$ i $GM(p, \delta, 1)$.

Pokażemy teraz, że wprowadzona klasa ciągów $GM(p, \delta, r)$ jest w sposób istotny szersza od klas dotychczas rozpatrywanych w literaturze. Poniższe twierdzenia zostały przedstawione we wspólnej pracy z B. Szaleń [17].

Twierdzenie 1. [17] Niech $q > 0, r \in \mathbb{N}$ oraz niech $0 < p_1 \leq p_2$. Wtedy

- (i) $GM(p_1, {}_5\delta(q), r) \subseteq GM(p_2, {}_5\delta(q), r)$,
- (ii) $GM(p_1, {}_6\delta(q), r) \subseteq GM(p_2, {}_6\delta(q), r)$,
- (iii) Istnieje ciąg $\{c_k\}_{k=1}^\infty$, który należy do klasy $GM(p_2, {}_5\delta(q), r)$ oraz nie należy do klasy $GM(p_1, {}_5\delta(q), r)$, gdzie $\frac{k}{b(k)} = O(1)$, $1 \leq p_1 < p_2$ oraz $q \geq 1$.
- (iv) Istnieje ciąg $\{c_k\}_{k=1}^\infty$, który należy do klasy $GM(p_2, {}_6\delta(q), r)$ oraz nie należy do klasy $GM(p_1, {}_6\delta(q), r)$, gdzie $\frac{k}{b(k)} = O(1)$, $1 \leq p_1 < p_2$ oraz $q \geq 1$.

Dowód. (i) Niech ciąg $\{c_k\}_{k=1}^\infty \in GM(p_1, {}_5\delta(q), r)$. Wykorzystując Lemat 1 otrzymujemy

$$\left(\sum_{k=n}^{2n-1} |c_k - c_{k+r}|^{p_2} \right)^{\frac{1}{p_2}} \leq \left(\sum_{k=n}^{2n-1} |c_k - c_{k+r}|^{p_1} \right)^{\frac{1}{p_1}} \leq \frac{C}{n} \sup_{m \geq b(n)} m \left(\frac{1}{m} \sum_{k=m}^{2m} |c_k|^q \right)^{\frac{1}{q}},$$

co oznacza, że $\{c_k\}_{k=1}^\infty \in GM(p_2, {}_5\delta(q), r)$.

(ii) Niech teraz $\{c_k\}_{k=1}^\infty \in GM(p_1, {}_6\delta(q), r)$. W podobny sposób jak w dowodzie części (i) uzyskujemy, że

$$\left(\sum_{k=n}^{2n-1} |c_k - c_{k+r}|^{p_2} \right)^{\frac{1}{p_2}} \leq \left(\sum_{k=n}^{2n-1} |c_k - c_{k+r}|^{p_1} \right)^{\frac{1}{p_1}} \leq \frac{C}{n} \max_{b(n) \leq m \leq \lambda b(n)} m \left(\frac{1}{m} \sum_{k=m}^{2m} |c_k|^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Stąd $\{c_k\}_{k=1}^\infty \in GM(p_2, {}_6\delta(q), r)$.

(iii) Niech

$$c_k = \begin{cases} \frac{1}{k^2}, & \text{jeśli } 2r \nmid k, \\ \frac{1}{(k-r)^2} + \frac{1}{k^2 k^{\frac{1}{p_2}}}, & \text{jeśli } 2r \mid k. \end{cases} \quad (1.1)$$

Na początek pokażemy, że $\{c_k\}_{k=1}^\infty \in GM(p_2, {}_5\delta(q), r)$. Niech

$$\begin{aligned} A_n &= \{k \in \mathbb{N} : n \leq k \leq 2n-1 \text{ oraz } 2r \mid k\}, \\ B_n &= \{k \in \mathbb{N} : n \leq k \leq 2n-1, 2r \nmid k \text{ oraz } 2r \nmid k+r\}, \\ C_n &= \{k \in \mathbb{N} : n \leq k \leq 2n-1 \text{ oraz } 2r \mid k+r\} \end{aligned}$$

oraz $n \geq 8r$. Dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ istnieją takie liczby naturalne p i q , że

$$n \leq 2rp \leq n + 2r - 1$$

oraz

$$2n - 2r + 1 \leq 2rq \leq 2n.$$

Założmy, że

$$C'_n = \{k \in \mathbb{N} : 2rp \leq k \leq 2rq - 1 \text{ oraz } 2r \mid k+r\}.$$

Z faktu, że $C'_n \subseteq C_n$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} \bar{C}_n &\geq \bar{C}'_n = \frac{2rq - 1 - 2rp + 1}{2r} = \frac{2r(q-p)}{2r} = q - p \\ &\geq \frac{2n - 2r + 1}{2r} - \frac{n + 2r - 1}{2r} > \frac{n - 4r}{2r} \geq \frac{n}{4r}. \end{aligned} \quad (1.2)$$

dla $n \geq 8r$. Zatem wykorzystując elementarne przekształcenia otrzymujemy

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=n}^{2n-1} |c_k - c_{k+r}|^{p_2} \right)^{\frac{1}{p_2}} &= \left(\sum_{k \in A_n} |c_k - c_{k+r}|^{p_2} + \sum_{k \in B_n} |c_k - c_{k+r}|^{p_2} + \sum_{k \in C_n} |c_k - c_{k+r}|^{p_2} \right)^{\frac{1}{p_2}} \\ &= \left(\sum_{k \in A_n} \left| \frac{1}{(k-r)^2} + \frac{1}{k^2 k^{\frac{1}{p_2}}} - \frac{1}{(k+r)^2} \right|^{p_2} + \sum_{k \in B_n} \left| \frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+r)^2} \right|^{p_2} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k \in C_n} \left| \frac{1}{k^2} - \frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+r)^2(k+r)^{\frac{1}{p_2}}} \right|^{p_2} \right)^{\frac{1}{p_2}} \\ &= \left(\sum_{k \in A_n} \left(\frac{4rk}{(k-r)^2(k+r)^2} \frac{1}{k^2 k^{\frac{1}{p_2}}} \right)^{p_2} + \sum_{k \in B_n} \left(\frac{(k+r)^2 - k^2}{k^2(k+r)^2} \right)^{p_2} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k \in C_n} \left(\frac{1}{(k+r)^{2+\frac{1}{p_2}}} \right)^{p_2} \right)^{\frac{1}{p_2}} \\ &\leq \left(\sum_{k \in A_n} \left(\frac{4kr}{\frac{1}{4}k^2 k^2} + \frac{1}{k^{2+\frac{1}{p_2}}} \right)^{p_2} + \sum_{k \in B_n} \left(\frac{2kr + r^2}{k^2(k+r)^2} \right)^{p_2} + \sum_{k \in C_n} \left(\frac{1}{(k+r)^{2+\frac{1}{p_2}}} \right)^{p_2} \right)^{\frac{1}{p_2}} \\ &\leq \left(\sum_{k \in A_n} \left(\frac{16r}{k^2 k} + \frac{1}{k^{2+\frac{1}{p_2}}} \right)^{p_2} + \sum_{k \in B_n} \left(\frac{2r}{k^2(k+r)} \right)^{p_2} + \sum_{k \in C_n} \left(\frac{1}{(k+r)^{2+\frac{1}{p_2}}} \right)^{p_2} \right)^{\frac{1}{p_2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \left(\sum_{k \in A_n} \left(\frac{16r}{k^{2+\frac{1}{p_2}}} + \frac{1}{k^{2+\frac{1}{p_2}}} \right)^{p_2} + \sum_{k \in B_n} \left(\frac{2r}{k^{2+\frac{1}{p_2}}} \right)^{p_2} + \sum_{k \in C_n} \left(\frac{1}{k^{2+\frac{1}{p_2}}} \right)^{p_2} \right)^{\frac{1}{p_2}} \\
&\leq (16r+1) \left(\sum_{k=n}^{2n-1} \left(\frac{1}{k^{2+\frac{1}{p_2}}} \right)^{p_2} \right)^{\frac{1}{p_2}} \leq (16r+1) \frac{1}{n^{2+\frac{1}{p_2}}} n^{\frac{1}{p_2}} \\
&\leq \frac{17r}{n^2}.
\end{aligned} \tag{1.3}$$

Niech teraz

$$\begin{aligned}
D_m &= \{k \in \mathbb{N} : m \leq k \leq 2m, 2r|k\}, \\
E_m &= \{k \in \mathbb{N} : m \leq k \leq 2m-1, 2r \nmid k\}.
\end{aligned}$$

Korzystając z Lematu 2 dla $q \geq 1$ otrzymujemy

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{k=n}^{2n-1} |c_k - c_{k+r}|^{p_2} \right)^{\frac{1}{p_2}} &\leq 4 \frac{17r}{n} \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{k^2} \leq \frac{68r}{n} \sup_{m \geq b(n)} \sum_{k=m}^{2m} \frac{1}{k^2} \leq \frac{68r}{n} \sup_{m \geq b(n)} m \left(\frac{1}{m} \sum_{k=m}^{2m} \left(\frac{1}{k^2} \right)^q \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \frac{68r}{n} \sup_{m \geq b(n)} m^{1-\frac{1}{q}} \left(\sum_{k \in D_m} \left(\frac{1}{(k-r)^2} + \frac{1}{k^{2+\frac{1}{p_2}}} \right)^q + \sum_{k \in E_m} \left(\frac{1}{k^2} \right)^q \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \frac{68r}{n} \sup_{m \geq b(n)} m \left(\frac{1}{m} \sum_{k=m}^{2m} |c_k|^q \right)^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned}$$

Zatem $\{c_k\}_{k=1}^\infty \in GM(p_2, {}_5\delta(q), r)$. Pokażemy teraz, że $\{c_k\}_{k=1}^\infty \notin GM(p_1, {}_5\delta(q), r)$. Wykorzystując (1.2) otrzymujemy, że dla $n \geq 8r$

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{k=n}^{2n-1} |c_k - c_{k+r}|^{p_1} \right)^{\frac{1}{p_1}} &\geq \left(\sum_{k \in C_n} \frac{1}{(k+r)^{2p_1+\frac{p_1}{p_2}}} \right)^{\frac{1}{p_1}} \geq \frac{1}{(2n+r)^{2+\frac{1}{p_2}}} \left(\sum_{k \in C_n} 1 \right)^{\frac{1}{p_1}} \\
&\geq \frac{1}{(4r)^{2+\frac{1}{p_2}}} \left(\frac{n}{4r} \right)^{\frac{1}{p_1}} \frac{1}{n^{2+\frac{1}{p_2}}} = \frac{1}{(4r)^{2+\frac{1}{p_2}+\frac{1}{p_1}}} \frac{n^{\frac{1}{p_1}}}{n^{2+\frac{1}{p_2}}}.
\end{aligned} \tag{1.4}$$

Z drugiej strony, mamy

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n} \sup_{m \geq b(n)} m \left(\frac{1}{m} \sum_{k=m}^{2m} |c_k|^q \right)^{\frac{1}{q}} &= \frac{1}{n} \sup_{m \geq b(n)} m \left(\frac{1}{m} \left(\sum_{k \in D_m} \left(\frac{1}{(k-r)^2} + \frac{1}{k^{2+\frac{1}{p_2}}} \right)^q + \sum_{k \in E_m} \left(\frac{1}{k^2} \right)^q \right) \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \frac{1}{n} \sup_{m \geq b(n)} m \left(\frac{1}{m} \left(\sum_{k \in D_m} \left(\frac{1}{(\frac{1}{2}k)^2} + \frac{1}{k^2} \right)^q + \sum_{k \in E_m} \left(\frac{1}{k^2} \right)^q \right) \right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \frac{1}{n} \sup_{m \geq b(n)} m \left(\frac{1}{m} \left(\sum_{k \in D_m} \frac{5^q}{k^{2q}} + \sum_{k \in E_m} \frac{1}{k^{2q}} \right) \right)^{\frac{1}{q}} \leq \frac{5}{n} \sup_{m \geq b(n)} m \left(\frac{1}{m} \left(\sum_{k=m}^{2m} \frac{1}{k^{2q}} \right) \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \frac{5}{n} \sup_{m \geq b(n)} m \left(\frac{2}{m^{2q}} \right)^{\frac{1}{q}} = 5 \frac{2^{\frac{1}{q}}}{n} \sup_{m \geq b(n)} m \frac{1}{m^2} \leq \frac{1}{n^2}.
\end{aligned}$$

Zatem nierówność

$$\left(\sum_{k=n}^{2n-1} |c_k - c_{k+r}|^{p_1} \right)^{\frac{1}{p_1}} \leq \frac{c}{n} \sup_{m \geq b(n)} m \left(\frac{1}{m} \sum_{k=m}^{2m} |c_k|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

nie może być spełniona, jeśli $n \rightarrow \infty$. To kończy dowód części (iii).

(iv) Teraz udowodnimy, że $\{c_k\}_{k=1}^{\infty} \in GM(p_2, 6\delta(q), r)$. Niech

$$D_m = \{k \in \mathbb{N} : m \leq k \leq 2m, 2r|k\},$$

$$E_m = \{k \in \mathbb{N} : m \leq k \leq 2m-1, 2r \nmid k\}.$$

Korzystając z (1.3) oraz z Lematu 2 dla $q \geq 1$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=n}^{2n-1} |c_k - c_{k+r}|^{p_2} \right)^{\frac{1}{p_2}} &\leq 4 \frac{17r}{n} \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{k^2} \leq \frac{68r}{n} \max_{b(n) \leq m \leq \lambda b(n)} \sum_{k=m}^{2m} \frac{1}{k^2} \\ &\leq \frac{68r}{n} \max_{b(n) \leq m \leq \lambda b(n)} m \left(\frac{1}{m} \sum_{k=m}^{2m} \left(\frac{1}{k^2} \right)^q \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \frac{68r}{n} \max_{b(n) \leq m \leq \lambda b(n)} m^{1-\frac{1}{q}} \left(\sum_{k \in D_m} \left(\frac{1}{(k-r)^2} + \frac{1}{k^{2+\frac{1}{p_2}}} \right)^q + \sum_{k \in E_m} \left(\frac{1}{k^2} \right)^q \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \frac{68r}{n} \max_{b(n) \leq m \leq \lambda b(n)} m \left(\frac{1}{m} \sum_{k=m}^{2m} |c_k|^q \right)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

Zatem $\{c_k\}_{k=1}^{\infty} \in GM(p_2, 6\delta(q), r)$. Pokażemy teraz, że $\{c_k\}_{k=1}^{\infty} \notin GM(p_1, 6\delta(q), r)$. Wykonując elementarne szacowania otrzymujemy

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \max_{b(n) \leq m \leq \lambda b(n)} \left(\frac{1}{m} \sum_{k=m}^{2m} |c_k|^q \right)^{\frac{1}{q}} &= \frac{1}{n} \max_{b(n) \leq m \leq \lambda b(n)} \left(\frac{1}{m} \left(\sum_{k \in D_m} \left(\frac{1}{(k-r)^2} + \frac{1}{k^{2+\frac{1}{p_2}}} \right)^q + \sum_{k \in E_m} \left(\frac{1}{k^2} \right)^q \right) \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \frac{1}{n} \max_{b(n) \leq m \leq \lambda b(n)} \left(\frac{1}{m} \left(\sum_{k \in D_m} \left(\frac{1}{(\frac{1}{2}k)^2} + \frac{1}{k^2} \right)^q + \sum_{k \in E_m} \left(\frac{1}{k^2} \right)^q \right) \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \frac{1}{n} \max_{b(n) \leq m \leq \lambda b(n)} \left(\frac{1}{m} \left(\sum_{k \in D_m} \frac{5^q}{k^{2q}} + \sum_{k \in E_m} \frac{1}{k^{2q}} \right) \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \frac{5}{n} \max_{b(n) \leq m \leq \lambda b(n)} \left(\frac{1}{m} \left(\sum_{k=m}^{2m} \frac{1}{k^{2q}} \right) \right)^{\frac{1}{q}} \leq \frac{5}{n} \max_{b(n) \leq m \leq \lambda b(n)} \left(\frac{2}{m^{2q}} \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= 5 \frac{2^{\frac{1}{q}}}{n} \max_{b(n) \leq m \leq \lambda b(n)} m \frac{1}{m^2} \ll \frac{1}{n^2}. \end{aligned}$$

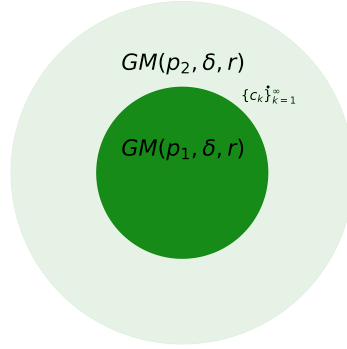
Wykorzystując (1.4) oraz powyższe oszacowania możemy stwierdzić, że nierówność

$$\left(\sum_{k=n}^{2n-1} |c_k - c_{k+r}|^{p_1} \right)^{\frac{1}{p_1}} \leq \frac{c}{n} \sup_{m \geq b(n)} m \left(\frac{1}{m} \sum_{k=m}^{2m} |c_k|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

nie może być spełniona, jeśli $n \rightarrow \infty$.

To kończy dowód części (iv) oraz całego twierdzenia. $\square$

Zależności między klasami określonymi w powyższym twierdzeniu ilustruje poniższy graf:



Rysunek 1.3: Zależności między klasami $GM(p_1, \delta, r)$ oraz $GM(p_2, \delta, r)$, gdzie $0 < p_1 < p_2, r \in \mathbb{N}$ i $\delta = {}_5\delta$ lub $\delta = {}_6\delta$.

Pokażemy teraz, że klasa $GM(p, \delta, r)$ jest istotnie szersza niż klasa $GM(p, \delta, 1)$ rozważana przez S. Tikhonova oraz E. Liflyand w pracach [29] i [30].

Twierdzenie 2. [17] Niech $p \geq 1, q > 0, r_1, r_2 \in \mathbb{N}, r_1 \leq r_2$.

- (i) Jeśli $r_1 | r_2$, to $GM(p, {}_5\delta(q), r_1) \subseteq GM(p, {}_5\delta(q), r_2)$,
- (ii) Jeśli $r_1 | r_2$, to $GM(p, {}_6\delta(q), r_1) \subseteq GM(p, {}_6\delta(q), r_2)$,
- (iii) Istnieje ciąg $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$, który należy do klasy $GM(p, {}_5\delta(q), r_2)$ oraz nie należy do klasy $GM(p, {}_5\delta(q), r_1)$, gdzie $\frac{n}{b(n)} = O(1)$, $r_1 < r_2$ oraz $q \geq 1$,
- (iv) Istnieje ciąg $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$, który należy do klasy $GM(p, {}_6\delta(q), r_2)$ oraz nie należy do klasy $GM(p, {}_6\delta(q), r_1)$, gdzie $\frac{n}{b(n)} = O(1)$, $r_1 < r_2$ oraz $q \geq 1$.

Dowód. (i) Niech $\{c_k\}_{k=1}^{\infty} \in GM(p, {}_5\delta(q), r_1)$. Jeśli $r_1 | r_2$, to $r_2 = \alpha r_1$, gdzie $\alpha \in \mathbb{N}$. Wykorzystując nierówność Höldera dla $p > 1$ otrzymujemy

$$\begin{aligned}
 \left(\sum_{k=n}^{2n-1} |c_k - c_{k+r_2}|^p \right)^{\frac{1}{p}} &= \left(\sum_{k=n}^{2n-1} \left| \sum_{l=0}^{\alpha-1} (c_{k+lr_1} - c_{k+(l+1)r_1}) \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
 &\leq \left(\sum_{k=n}^{2n-1} \left(\sum_{l=0}^{\alpha-1} |c_{k+lr_1} - c_{k+(l+1)r_1}| \right)^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
 &\leq \left(\sum_{k=n}^{2n-1} \left(\left(\sum_{l=0}^{\alpha-1} |c_{k+lr_1} - c_{k+(l+1)r_1}|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{l=0}^{\alpha-1} 1^{\frac{p}{p-1}} \right)^{1-\frac{1}{p}} \right)^p \right)^{\frac{1}{p}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \left(\sum_{k=n}^{2n-1} \left(\left(\sum_{l=0}^{\alpha-1} |c_{k+lr_1} - c_{k+(l+1)r_1}|^p \right)^{\frac{1}{p}} \alpha^{1-\frac{1}{p}} \right)^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
 &= \left(\sum_{k=n}^{2n-1} \left(\sum_{l=0}^{\alpha-1} |c_{k+lr_1} - c_{k+(l+1)r_1}|^p \alpha^{p-1} \right) \right)^{\frac{1}{p}} \\
 &= \alpha^{1-\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=n}^{2n-1} \left(\sum_{l=0}^{\alpha-1} |c_{k+lr_1} - c_{k+(l+1)r_1}|^p \right) \right)^{\frac{1}{p}} = \alpha^{1-\frac{1}{p}} \left(\sum_{l=0}^{\alpha-1} \left(\sum_{k=n}^{2n-1} |c_{k+lr_1} - c_{k+(l+1)r_1}|^p \right) \right)^{\frac{1}{p}} \\
 &= \alpha^{1-\frac{1}{p}} \left(\sum_{l=0}^{\alpha-1} \left(\sum_{k=n+lr_1}^{2n+lr_1-1} |c_k - c_{k+r_1}|^p \right) \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{1.5}
 \end{aligned}$$

Korzystając z (1.5) oraz Definicji 1 mamy

$$\begin{aligned}
 \left(\sum_{k=n}^{2n-1} |c_k - c_{k+r_2}|^p \right)^{\frac{1}{p}} &\leq \alpha^{1-\frac{1}{p}} \left\{ \sum_{l=0}^{\alpha-1} \left(\frac{C}{n+lr_1} \sup_{m \geq b(n+lr_1)} m \left(\frac{1}{m} \sum_{k=m}^{2m} |c_k|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right)^p \right\}^{\frac{1}{p}} \\
 &\leq \alpha C \frac{1}{n} \sup_{m \geq b(n)} m \left(\frac{1}{m} \sum_{k=m}^{2m} |c_k|^q \right)^{\frac{1}{q}}.
 \end{aligned}$$

Zatem $\{c_k\}_{k=1}^{\infty} \in GM(p, {}_5\delta(q), r_2)$.

(ii) Analogicznie, jak w dowodzie części (i), wykorzystując (1.5) oraz Definicję 1 otrzymujemy

$$\begin{aligned}
 \left(\sum_{k=n}^{2n-1} |c_k - c_{k+r_2}|^p \right)^{\frac{1}{p}} &\leq \alpha^{1-\frac{1}{p}} \left\{ \sum_{l=0}^{\alpha-1} \left(\frac{C}{n+lr_1} \max_{b(n+lr_1) \leq m \leq \lambda b(n+lr_1)} m \left(\frac{1}{m} \sum_{k=m}^{2m} |c_k|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right)^p \right\}^{\frac{1}{p}} \\
 &\leq \alpha C \frac{1}{n} \max_{b'(n) \leq m \leq \lambda b'(n)} m \left(\frac{1}{m} \sum_{k=m}^{2m} |c_k|^q \right)^{\frac{1}{q}},
 \end{aligned}$$

gdzie dla $n \in \mathbb{N}$ $b'(n) = b(n + l_0 r_1)$ i $l_0 \in \{0, \dots, \alpha - 1\}$ jest takie, że

$$\max_{b(n+l_0 r_1) \leq m \leq \lambda b(n+l_0 r_1)} m \left(\frac{1}{m} \sum_{k=m}^{2m} |c_k|^q \right)^{\frac{1}{q}} = \max_{l \in \{0, 1, \dots, \alpha-1\}} \max_{b(n+lr_1) \leq m \leq \lambda b(n+lr_1)} m \left(\frac{1}{m} \sum_{k=m}^{2m} |c_k|^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Zatem $\{c_k\}_{k=1}^{\infty} \in GM(p, {}_6\delta(q), r_2)$, co kończy dowód części (ii).

(iii) Załóżmy, że

$$c_k = \frac{2 + \alpha_k}{k^2}, \text{ gdzie } \alpha_k = \begin{cases} -1, & \text{gdy } r_1 | k, \\ 1, & \text{gdy } r_1 \nmid k. \end{cases} \tag{1.6}$$

Pokażemy, że $\{c_k\}_{k=1}^{\infty} \in GM(p, {}_5\delta(q), r_2)$ oraz $\{c_k\}_{k=1}^{\infty} \notin GM(p, {}_5\delta(q), r_1)$. Niech

$$\begin{aligned}
 A_n &:= \{k : n \leq k \leq 2n - 1 \text{ oraz } r_2 | k\}, \\
 B_n &:= \{k : n \leq k \leq 2n - 1 \text{ oraz } r_2 \nmid k\}. \tag{1.7}
 \end{aligned}$$

Wykorzystując Lemat 1 oraz Lemat 2 dla $q \geq 1$ otrzymujemy

$$\begin{aligned}
 \left(\sum_{k=n}^{2n-1} |c_k - c_{k+r_2}|^p \right)^{\frac{1}{p}} &= \left(\left(\sum_{k \in A_n} + \sum_{k \in B_n} \right) |c_k - c_{k+r_2}|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
 &= \left(\sum_{k \in A_n} \left| \frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+r_2)^2} \right|^p + \sum_{k \in B_n} \left| \frac{3}{k^2} - \frac{3}{(k+r_2)^2} \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
 &\leq \left(3^p \sum_{k=n}^{2n-1} \left| \frac{(k+r_2)^2 - k^2}{(k+r_2)^2 k^2} \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} = 3 \left(\sum_{k=n}^{2n-1} \left| \frac{(2r_2 k) + r_2^2}{(k+r_2)^2 k^2} \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
 &\leq 6r_2 \left(\sum_{k=n}^{2n-1} \left(\frac{1}{k^3} \right)^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq 6r_2 \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{k^3} \leq \frac{6r_2}{n} \sum_{k=n}^{2n} c_k.
 \end{aligned} \tag{1.8}$$

Stosując (1.8) oraz wykonując elementarne szacowania otrzymujemy

$$\left(\sum_{k=n}^{2n-1} |c_k - c_{k+r_2}|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{6r_2}{n} \sup_{m \geq b(n)} m \left(\frac{1}{m} \sum_{k=m}^{2m} |c_k|^q \right)^{\frac{1}{q}},$$

co oznacza, że $\{c_k\}_{k=1}^{\infty} \in GM(p, {}_5\delta(q), r_2)$.

Pokażemy teraz, że $\{c_k\}_{k=1}^{\infty} \notin GM(p, {}_5\delta(q), r_1)$. Wykorzystując (1.7) mamy

$$\begin{aligned}
 \left(\sum_{k=n}^{2n-1} |c_k - c_{k+r_1}|^p \right)^{\frac{1}{p}} &\geq \left(\sum_{k \in A_n} |c_k - c_{k+r_1}|^p \right)^{\frac{1}{p}} \geq \left(\sum_{k \in A_n} \left| \frac{1}{k^3} - \frac{3}{(k+r_1)^2} \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
 &= \left(\sum_{k \in A_n} \left| \frac{(k+r_1)^2 - 3k^2}{(k+r_1)^2 k^2} \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{k \in A_n} \left| \frac{-2k^2 + 2kr_1 + r_1^2}{(k+r_1)^2 k^2} \right|^p \right)^{\frac{1}{p}}.
 \end{aligned}$$

Jeśli $n \geq 5r_1$, to $2n^2 - 2nr_1 - r_1^2 \geq (n+r_1)^2$. W związku z tym dla $n \geq 5r_1$ otrzymujemy

$$\begin{aligned}
 \left(\sum_{k=n}^{2n-1} |c_k - c_{k+r_1}|^p \right)^{\frac{1}{p}} &\geq \left(\sum_{k \in A_n} \left(\frac{2k^2 - 2kr_1 - r_1^2}{(k+r_1)^2 k^2} \right)^p \right)^{\frac{1}{p}} \geq \frac{1}{(2n)^2} \left(\frac{n}{2r_1} \right)^{\frac{1}{p}} \\
 &= \frac{1}{2^{2+\frac{1}{p}} r_1^{\frac{1}{p}}} n^{-2+\frac{1}{p}}.
 \end{aligned} \tag{1.9}$$

Z drugiej strony mamy

$$\frac{1}{n} \sup_{m \geq b(n)} m \left(\frac{1}{m} \sum_{k=m}^{2m} |c_k|^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq \frac{1}{n} 3^{1+\frac{1}{q}} \sup_{m \geq b(n)} \frac{1}{m} \ll \frac{1}{n^2}.$$

Zatem nierówność

$$\left(\sum_{k=n}^{2n-1} |c_k - c_{k+r_1}|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{C}{n} \sup_{m \geq b(n)} m \left(\frac{1}{m} \sum_{k=m}^{2m} |c_k|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

nie może być spełniona, jeśli $n \rightarrow \infty$. To kończy dowód części (iii).

(iv) Wykorzystując (1.8) otrzymujemy

$$\left(\sum_{k=n}^{2n-1} |c_k - c_{k+r_2}|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{6r_2}{n} \max_{b(n) \leq m \leq \lambda b(n)} m \left(\frac{1}{m} \sum_{k=m}^{2m} |c_k|^q \right)^{\frac{1}{q}},$$

co oznacza, że $\{c_k\}_{k=1}^{\infty} \in GM(p, {}_6\delta(q), r_2)$. Ponadto, wykorzystując (1.9) oraz oszacowanie

$$\frac{1}{n} \max_{b(n) \leq m \leq \lambda b(n)} m \left(\frac{1}{m} \sum_{k=m}^{2m} |c_k|^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq \frac{1}{n} 3^{1+\frac{1}{q}} \max_{b(n) \leq m \leq \lambda b(n)} \frac{1}{m} \ll \frac{1}{n^2}$$

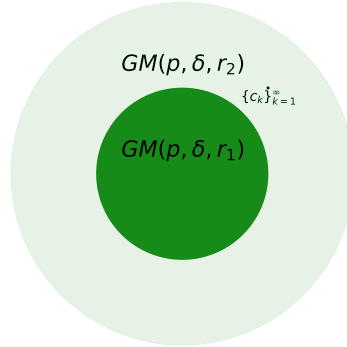
możemy stwierdzić, że nierówność

$$\left(\sum_{k=n}^{2n-1} |c_k - c_{k+r_1}|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{C}{n} \max_{b(n) \leq m \leq \lambda b(n)} m \left(\frac{1}{m} \sum_{k=m}^{2m} |c_k|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

nie może być spełniona, jeśli $n \rightarrow \infty$.

Kończy to dowód części (iv) jak i całego twierdzenia. $\square$

Zależność między klasami, które zostały udowodnione w powyższym twierdzeniu ilustruje poniższy graf:



Rysunek 1.4: Zależności między klasami $GM(p, \delta, r_1)$ i $GM(p, \delta, r_2)$, gdzie $p > 0$, $r_1 | r_2$, $r_1 < r_2$ i $\delta = {}_5\delta$ lub $\delta = {}_6\delta$.

Twierdzenie 3. [17] Niech $p > 0$, $q \geq 1$ oraz $r_1, r_2 \in \mathbb{N}$. Jeśli $r_1 \nmid r_2$, $r_2 \nmid r_1$ i $\frac{n}{b(n)} = O(1)$, wtedy klasy

$$GM(p, {}_5\delta(q), r_1) \text{ i } GM(p, {}_5\delta(q), r_2)$$

oraz

$$GM(p, {}_6\delta(q), r_1) \text{ i } GM(p, {}_6\delta(q), r_2)$$

nie są porównywalne.

Dowód. Pokażemy, że klas $GM(p, {}_5\delta(q), r_1)$ i $GM(p, {}_5\delta(q), r_2)$ nie są porównywalne. Niech

$$a_k = \frac{2 + \alpha_k}{k^2}, \text{ gdzie } \alpha_k = \begin{cases} -1, & \text{gd } r_1 | k, \\ 1, & \text{gd } r_1 \nmid k \end{cases}$$

oraz

$$b_k = \frac{2 + \gamma_k}{k^2}, \text{ gdzie } \gamma_k = \begin{cases} -1, & \text{gd } r_2 | k, \\ 1, & \text{gd } r_2 \nmid k. \end{cases}$$

W dowodzie Twierdzenia 2 pokazaliśmy, iż

$$\{a_k\}_{k=1}^{\infty} \in GM(p, {}_5\delta(q), r_1) \text{ oraz } \{a_k\}_{k=1}^{\infty} \notin GM(p, {}_5\delta(q), r_2),$$

a także, że

$$\{b_k\}_{k=1}^{\infty} \notin GM(p, {}_5\delta(q), r_1) \text{ oraz } \{b_k\}_{k=1}^{\infty} \in GM(p, {}_5\delta(q), r_2).$$

To kończy dowód dla klas $GM(p, {}_5\delta(q), r_1)$ i $GM(p, {}_5\delta(q), r_2)$. Dowód dla klas $GM(p, {}_6\delta(q), r_1)$ i $GM(p, {}_6\delta(q), r_2)$ można przeprowadzić analogicznie. $\square$

Twierdzenie 4. [17] Niech $p > 0$, $r \in \mathbb{N}$ oraz $0 < q_1 \leq q_2$. Wtedy

$$GM(p, {}_5\delta(q_1), r) \subseteq GM(p, {}_5\delta(q_2), r)$$

oraz

$$GM(p, {}_6\delta(q_1), r) \subseteq GM(p, {}_6\delta(q_2), r).$$

Dowód. Pokażemy, że $GM(p, {}_5\delta(q_1), r) \subseteq GM(p, {}_5\delta(q_2), r)$.

Niech $\{c_k\}_{k=1}^{\infty} \in GM(p, {}_5\delta(q_1), r)$. Wykorzystując definicję klasy oraz Lemat 2 otrzymujemy

$$\left(\sum_{k=n}^{2n-1} |c_k - c_{k+r}|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{1}{n} \sup_{m \geq b(n)} m \left(\frac{1}{m} \sum_{k=m}^{2m} |c_k|^{q_1} \right)^{\frac{1}{q_1}} \leq \frac{1}{n} \sup_{m \geq b(n)} m \left(\frac{1}{m} \sum_{k=m}^{2m} |c_k|^{q_2} \right)^{\frac{1}{q_2}}.$$

Zatem $\{c_k\}_{k=1}^{\infty} \in GM(p, {}_5\delta(q_2), r)$, czyli $GM(p, {}_5\delta(q_1), r) \subseteq GM(p, {}_5\delta(q_2), r)$. Dowód dla klas $GM(p, {}_6\delta(q_1), r)$ i $GM(p, {}_6\delta(q_2), r)$ można przeprowadzić analogicznie. $\square$

1.2 Podwójne ciągi o ograniczonych wariacjach

W tym podrozdziale wprowadzone zostaną klasy podwójnych ciągów o ograniczonych wariacjach, których zastosowanie w istotny sposób rozszerzyły klasyczne wyniki dotyczące jednostajnej zbieżności podwójnych szeregów trygonometrycznych. Zaczniemy ten podrozdział od wprowadzenia podstawowych oznaczeń. Niech dla dowolnej liczby $r \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \Delta_{r0}c_{j,k} &:= c_{j,k} - c_{j+r,k}, \\ \Delta_{0r}c_{j,k} &:= c_{j,k} - c_{j,k+r}, \\ \Delta_{rr}c_{j,k} &:= \Delta_{r0}(\Delta_{0r}c_{j,k}) = c_{j,k} - c_{j+r,k} - c_{j,k+r} + c_{j+r,k+r}. \end{aligned}$$

Podwójny ciąg $\{c_{j,k}\}_{j,k=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}_+^0$ nazywamy nierosnącym, jeśli dla $j, k = 1, 2, \dots$:

$$\Delta_{10}c_{j,k} \geq 0, \quad \Delta_{10}c_{j,k} \geq 0, \quad \Delta_{10}c_{j,k} \geq 0.$$

Klasę wszystkich podwójnych ciągów nierosnących oznaczamy MDS (ang. *Monotone Double Sequences*).

Ponadto, będziemy zapisywać $I_1(m, n) \ll I_2(m, n)$, gdzie $m, n \in \mathbb{N}$, jeżeli istnieje dodatnia stała C , niezależna od m oraz n , taka, że $I_1(m, n) \leq CI_2(m, n)$.

1.2.1 Wprowadzenie

Zacznijmy ten podrozdział od sformułowania definicji nowej klasy podwójnych ciągów o ograniczonych wariacjach, która została wprowadzona we wspólnej pracy z B. Szalem ([14]).

Definicja 3. [14] Mówimy, że podwójny ciąg liczb zespolonych $c := \{c_{j,k}\}_{j,k=1}^{\infty}$ należy do klasy $DGM(p, \alpha, \beta, \gamma, r)$, jeśli istnieje dodatnia stała C oraz liczba całkowita $\lambda \geq 1$, zależne tylko od $\{c_{j,k}\}_{j,k=1}^{\infty}$, dla których zachodzą następujące nierówności:

$$\left(\sum_{j=m}^{2m-1} |\Delta_{r0} c_{jn}|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq C \alpha_m \quad m \geq \lambda, n \geq 1,$$

$$\left(\sum_{k=n}^{2n-1} |\Delta_{0r} c_{m,k}|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq C \beta_n \quad n \geq \lambda, m \geq 1,$$

$$\left(\sum_{j=m}^{2m-1} \sum_{k=n}^{2n-1} |\Delta_{rr} c_{j,k}|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq C \gamma_{mn} \quad m, n \geq \lambda,$$

gdzie $\alpha := \{\alpha_{j,k}\}_{j,k=1}^{\infty}$, $\beta := \{\beta_{j,k}\}_{j,k=1}^{\infty}$, $\gamma := \{\gamma_{j,k}\}_{j,k=1}^{\infty}$ są podwójnymi ciągami o wyrazach nieujemnych, $r \in \mathbb{N}$ oraz $p > 0$.

Warto zauważyć, że dla przypadku $p = 1$ klasa $DGM(1, \alpha, \beta, \gamma, r)$ została zdefiniowana przez B. Szala oraz K. Duzinkiewicza w pracy [3]. Natomiast klasa $DGM(1, \alpha, \beta, \gamma, 1)$ została wprowadzona przez Leindlera w pracy [28].

W dalszej części pracy, dla dowolnego ciągu liczb zespolonych $\{c_{j,k}\}_{j,k=1}^{\infty}$ takiego, że $c_{j,k} \rightarrow 0$, gdy $j + k \rightarrow \infty$, będziemy rozpatrywać następujące trójki ciągów (α, β, γ) :

$$\begin{aligned} 1) \quad {}_1\alpha_{m,n} &= {}_1\alpha = \frac{1}{m} \sum_{j=[m/\lambda]}^{[\lambda m]} |c_{j,n}| \quad \text{dla } m \geq \lambda, n \geq 1, \\ {}_1\beta_{m,n} &= {}_1\beta = \frac{1}{n} \sum_{k=[n/\lambda]}^{[\lambda n]} |c_{m,k}| \quad \text{dla } n \geq \lambda, m \geq 1, \\ {}_1\gamma_{m,n} &= {}_1\gamma = \frac{1}{mn} \sum_{j=[m/\lambda]}^{[\lambda m]} \sum_{k=[n/\lambda]}^{[\lambda n]} |c_{j,k}| \quad \text{dla } m, n \geq \lambda, \\ 2) \quad {}_2\alpha_{m,n} &= {}_2\alpha = \frac{1}{m} \left(\max_{b_1(m) \leq M \leq \lambda b_1(m)} \sum_{j=M}^{2M} |c_{j,n}| \right) \quad \text{dla } m \geq \lambda, n \geq 1, \\ {}_2\beta_{m,n} &= {}_2\beta = \frac{1}{n} \left(\max_{b_2(n) \leq M \leq \lambda b_2(n)} \sum_{k=N}^{2N} |c_{m,k}| \right) \quad \text{dla } n \geq \lambda, m \geq 1, \end{aligned} \tag{1.10}$$

$$\begin{aligned} {}_2\gamma_{m,n} &= {}_2\gamma = \frac{1}{mn} \left(\sup_{M+N \geq b_3(m+n)} \sum_{j=M}^{2M} \sum_{k=N}^{2N} |c_{j,k}| \right) \quad \text{dla } m, n \geq \lambda, \\ 3) \quad {}_3\alpha_{m,n} &= {}_3\alpha = \frac{1}{m} \left(\sup_{M \geq b(m)} \sum_{j=M}^{2M} |c_{j,n}| \right) \quad \text{dla } m \geq \lambda, n \geq 1, \\ {}_3\beta_{m,n} &= {}_3\beta = \frac{1}{n} \left(\sup_{N \geq b(n)} \sum_{k=N}^{2N} |c_{m,k}| \right) \quad \text{dla } n \geq \lambda, m \geq 1, \end{aligned} \tag{1.11}$$

$$3\gamma_{m,n} = 3\gamma = \frac{1}{mn} \left(\sup_{M+N \geq b(m+n)} \sum_{j=M}^{2M} \sum_{k=N}^{2N} |c_{j,k}| \right) \text{ dla } m, n \geq \lambda,$$

gdzie liczba naturalna $\lambda \geq 2$, ciągi $\{b_1(l)\}_{l=1}^{\infty}$, $\{b_2(l)\}_{l=1}^{\infty}$, $\{b_3(l)\}_{l=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}_0^+$ dążą do nieskończoności (niekoniecznie monotonicznie) oraz ciąg $\{b(l)\}_{l=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}_0^+$ dąży monotonicznie do nieskończoności.

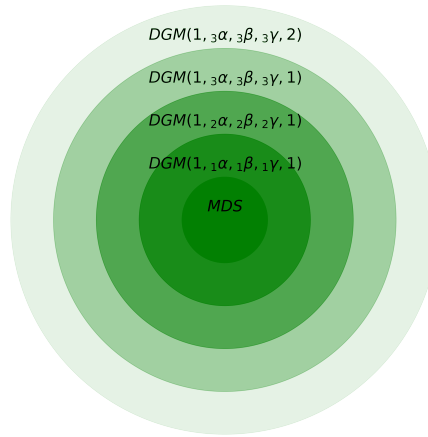
Warto zauważyć, że klasa $DGM(1, {}_1\alpha, {}_1\beta, {}_1\gamma, 1)$ została zdefiniowana w pracy [11], w której oznaczona była jako $MVBVDS$. Ponadto klasy $DGM(1, {}_2\alpha, {}_2\beta, {}_2\gamma, 1)$ i $DGM(1, {}_3\alpha, {}_3\beta, {}_3\gamma, 1)$ zostały wprowadzone w artykule [12] i były oznaczone odpowiednio przez $SBVDS_1$ i $SBVDS_2$. Dodatkowo należy zaznaczyć, że klasy $DGM(1, {}_1\alpha, {}_1\beta, {}_1\gamma, 2)$, $DGM(1, {}_2\alpha, {}_2\beta, {}_2\gamma, 2)$ oraz $DGM(1, {}_3\alpha, {}_3\beta, {}_3\gamma, 2)$ rozważane były w pracy [3].

1.2.2 Zależności między klasami

W tej części rozprawy pokażemy, że klasa $DGM(p, \alpha, \beta, \gamma, r)$ jest w istotny sposób szersza od klas podwójnych ciągów o ograniczonych wariacjach, które były dotychczas rozpatrywane w literaturze. Podrozdział ten zaczniemy od przedstawienia inkluzji, które były udowodnione w pracach [12] i [11]:

$$MDS \subsetneq DGM(1, {}_1\alpha, {}_1\beta, {}_1\gamma, 1) \subsetneq DGM(1, {}_2\alpha, {}_2\beta, {}_2\gamma, 1) \subsetneq DGM(1, {}_3\alpha, {}_3\beta, {}_3\gamma, 1) \\ \subsetneq DGM(1, {}_3\alpha, {}_3\beta, {}_3\gamma, 2).$$

Powyższe zależności można zobrazować na poniższym grafie:



Rysunek 1.5: Zależności między klasami MDS , $DGM(1, {}_1\alpha, {}_1\beta, {}_1\gamma, 1)$, $DGM(1, {}_2\alpha, {}_2\beta, {}_2\gamma, 1)$, $DGM(1, {}_3\alpha, {}_3\beta, {}_3\gamma, 1)$, $DGM(1, {}_3\alpha, {}_3\beta, {}_3\gamma, 2)$.

Ponadto, korzystając z (1.10) i (1.11) otrzymujemy następującą zależność:

$$DGM(p, {}_2\alpha, {}_2\beta, {}_2\gamma, r) \subsetneq DGM(p, {}_3\alpha, {}_3\beta, {}_3\gamma, r)$$

dla $p > 0$ i $r \in \mathbb{N}$.

Poniższe twierdzenia zostały wykazane we wspólnej pracy z B. Szaleem ([14]).

Twierdzenie 5. [14] Niech $r \in \mathbb{N}$ oraz niech $0 < p_1 \leq p_2$. Wtedy

- (i) $DGM(p_1, 2\alpha, 2\beta, 2\gamma, r) \subseteq DGM(p_2, 2\alpha, 2\beta, 2\gamma, r)$,
- (ii) Istnieje ciąg $\{c_{m,n}\}_{m,n=1}^\infty$, który należy do klasy $DGM(p_2, 2\alpha, 2\beta, 2\gamma, r)$ oraz nie należy do klasy $DGM(p_1, 2\alpha, 2\beta, 2\gamma, r)$, gdzie $\frac{n}{b_i(n)} = O(1)$ dla $i \in \{1, 2, 3\}$ oraz $1 \leq p_1 < p_2$.

Dowód. (i) Niech $\{c_{m,n}\}_{m,n=1}^\infty \in DGM(p_1, 2\alpha, 2\beta, 2\gamma, r)$. Wykorzystując Lemat 1 otrzymujemy

$$\left(\sum_{j=m}^{2m-1} |c_{j,k} - c_{j+r,k}|^{p_2} \right)^{\frac{1}{p_2}} \leq \left(\sum_{j=m}^{2m-1} |c_{j,k} - c_{j+r,k}|^{p_1} \right)^{\frac{1}{p_1}} \leq \frac{C}{m} \max_{b_1(m) \leq M \leq \lambda b_1(m)} \sum_{j=M}^{2M} c_{j,k},$$

$$\left(\sum_{k=n}^{2n-1} |c_{j,k} - c_{j,k+r}|^{p_2} \right)^{\frac{1}{p_2}} \leq \left(\sum_{k=n}^{2n-1} |c_{j,k} - c_{j,k+r}|^{p_1} \right)^{\frac{1}{p_1}} \leq \frac{C}{n} \max_{b_2(n) \leq N \leq \lambda b_2(n)} \sum_{k=N}^{2N} c_{j,k},$$

oraz

$$\left(\sum_{j=m}^{2m-1} \sum_{k=n}^{2n-1} |\Delta_{rr} c_{j,k}|^{p_2} \right)^{\frac{1}{p_2}} \leq \left(\sum_{j=m}^{2m-1} \sum_{k=n}^{2n-1} |\Delta_{rr} c_{j,k}|^{p_1} \right)^{\frac{1}{p_1}} \leq \frac{C}{mn} \sup_{M+N \geq b_3(m+n)} \sum_{j=M}^{2M} \sum_{k=N}^{2N} c_{j,k},$$

co oznacza, że $\{c_{m,n}\}_{m,n=1}^\infty \in DGM(p_2, 2\alpha, 2\beta, 2\gamma, r)$.

(ii) Niech

$$c_{m,n} = a_m a_n, \text{ gdzie } a_n = \begin{cases} \frac{1}{n^2}, & \text{gdzie } 2r \nmid n, \\ \frac{1}{(n-r)^2} + \frac{1}{n^2 n^{\frac{1}{p_2}}}, & \text{gdzie } 2r \mid n \end{cases} \quad (1.12)$$

oraz $p_1 < p_2$.

Na początek pokażemy, że $\{c_{m,n}\}_{m,n=1}^\infty \in DGM(p_2, 2\alpha, 2\beta, 2\gamma, r)$. Niech dla $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} A_n &= \{k \in \mathbb{N} : n \leq k \leq 2n-1 \text{ oraz } 2r \nmid k\}, \\ B_n &= \{k \in \mathbb{N} : n \leq k \leq 2n-1, 2r \nmid k \text{ oraz } 2r \nmid k+r\}, \\ C_n &= \{k \in \mathbb{N} : n \leq k \leq 2n-1 \text{ oraz } 2r \mid k+r\}, \end{aligned}$$

oraz $n \geq 8r$. Dalej dla $j \in \mathbb{N}$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=n}^{2n-1} |c_{j,k} - c_{j,k+r}|^{p_2} \right)^{\frac{1}{p_2}} &= \left(\sum_{k \in A_n} |c_{j,k} - c_{j,k+r}|^{p_2} + \sum_{k \in B_n} |c_{j,k} - c_{j,k+r}|^{p_2} + \sum_{k \in C_n} |c_{j,k} - c_{j,k+r}|^{p_2} \right)^{\frac{1}{p_2}} \\ &= \left(\sum_{k \in A_n} \left| \left(\frac{1}{(k-r)^2} + \frac{1}{k^2 k^{\frac{1}{p_2}}} - \frac{1}{(k+r)^2} \right) a_j \right|^{p_2} + \sum_{k \in B_n} \left| \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+r)^2} \right) a_j \right|^{p_2} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k \in C_n} \left| \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+r)^2 (k+r)^{\frac{1}{p_2}}} \right) a_j \right|^{p_2} \right)^{\frac{1}{p_2}} \\ &= \left(\sum_{k \in A_n} \left(\left(\frac{4rk}{(k-r)^2 (k+r)^2} + \frac{1}{k^2 k^{\frac{1}{p_2}}} \right) a_j \right)^{p_2} \right)^{\frac{1}{p_2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{k \in B_n} \left(\frac{(k+r)^2 - k^2}{k^2(k+r)^2} a_j \right)^{p_2} + \sum_{k \in C_n} \left(\frac{1}{(k+r)^{2+\frac{1}{p_2}}} a_j \right)^{p_2} \Bigg)^{\frac{1}{p_2}} \\
 & \leq \left(\sum_{k \in A_n} \left(\left(\frac{4kr}{\frac{1}{4}k^2k^2} + \frac{1}{k^{2+\frac{1}{p_2}}} \right) a_j \right)^{p_2} + \sum_{k \in B_n} \left(\frac{2kr + r^2}{k^2(k+r)^2} a_j \right)^{p_2} + \sum_{k \in C_n} \left(\frac{1}{(k+r)^{2+\frac{1}{p_2}}} a_j \right)^{p_2} \right)^{\frac{1}{p_2}} \\
 & \leq \left(\sum_{k \in A_n} \left(\left(\frac{16r}{k^2k} + \frac{1}{k^{2+\frac{1}{p_2}}} \right) a_j \right)^{p_2} + \sum_{k \in B_n} \left(\frac{2r}{k^2(k+r)} a_j \right)^{p_2} + \sum_{k \in C_n} \left(\frac{1}{(k+r)^{2+\frac{1}{p_2}}} a_j \right)^{p_2} \right)^{\frac{1}{p_2}} \\
 & \leq \left(\sum_{k \in A_n} \left(\left(\frac{16r}{k^{2+\frac{1}{p_2}}} + \frac{1}{k^{2+\frac{1}{p_2}}} \right) a_j \right)^{p_2} + \sum_{k \in B_n} \left(\frac{2r}{k^{2+\frac{1}{p_2}}} a_j \right)^{p_2} + \sum_{k \in C_n} \left(\frac{1}{k^{2+\frac{1}{p_2}}} a_j \right)^{p_2} \right)^{\frac{1}{p_2}} \\
 & \leq (16r+1) \left(\sum_{k \in A_n} \left(\frac{1}{k^{2+\frac{1}{p_2}}} a_j \right)^{p_2} + \sum_{k \in B_n} \left(\frac{1}{k^{2+\frac{1}{p_2}}} a_j \right)^{p_2} + \sum_{k \in C_n} \left(\frac{1}{k^{2+\frac{1}{p_2}}} a_j \right)^{p_2} \right)^{\frac{1}{p_2}} \\
 & \leq (16r+1) \left(\sum_{k=n}^{2n-1} \left(\frac{1}{k^{2+\frac{1}{p_2}}} a_j \right)^{p_2} \right)^{\frac{1}{p_2}} \leq (16r+1) \frac{1}{n^{2+\frac{1}{p_2}}} n^{\frac{1}{p_2}} a_j \leq \frac{17r}{n^2} a_j.
 \end{aligned}$$

Niech teraz dla $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
 D_n &= \{k \in \mathbb{N} : n \leq k \leq 2n-1, 2r|k\}, \\
 E_n &= \{k \in \mathbb{N} : n \leq k \leq 2n-1, 2r \nmid k\}.
 \end{aligned}$$

Wtedy dla dowolnego $m \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
 \left(\sum_{k=n}^{2n-1} |c_{m,k} - c_{m,k+r}|^{p_2} \right)^{\frac{1}{p_2}} & \leq 4 \frac{17r}{n} \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{k^2} a_m \leq \frac{68r}{n} \max_{b_2(n) \leq N \leq \lambda b_2(n)} \sum_{k=N}^{2N} \frac{1}{k^2} a_m \\
 & \leq \frac{68r}{n} \max_{b_2(n) \leq N \leq \lambda b_2(n)} \left(\sum_{k \in D_n} \left(\frac{1}{(k-r)^2} + \frac{1}{k^{2+\frac{1}{p_2}}} \right) a_m + \sum_{k \in E_n} \frac{1}{k^2} a_m \right) \\
 & \leq \frac{68r}{n} \max_{b_2(n) \leq N \leq \lambda b_2(n)} \sum_{k=N}^{2N} |c_{m,k}|.
 \end{aligned}$$

W analogiczny sposób otrzymujemy, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ mamy

$$\left(\sum_{j=m}^{2m-1} |c_{j,n} - c_{j+r,n}|^{p_2} \right)^{\frac{1}{p_2}} \leq \frac{68r}{m} \max_{b_1(m) \leq M \leq \lambda b_1(m)} \sum_{j=M}^{2M} |c_{j,n}|.$$

Ponadto

$$\begin{aligned}
 \left(\sum_{j=m}^{2m-1} \sum_{k=n}^{2n-1} |\Delta_{rr} c_{j,k}|^{p_2} \right)^{\frac{1}{p_2}} &= \left(\sum_{j \in A_m} \sum_{k \in A_n} |\Delta_{rr} c_{j,k}|^{p_2} + \sum_{j \in B_m} \sum_{k \in A_n} |\Delta_{rr} c_{j,k}|^{p_2} + \sum_{j \in C_m} \sum_{k \in A_n} |\Delta_{rr} c_{j,k}|^{p_2} \right. \\
 &+ \sum_{j \in A_m} \sum_{k \in B_n} |\Delta_{rr} c_{j,k}|^{p_2} + \sum_{j \in B_m} \sum_{k \in B_n} |\Delta_{rr} c_{j,k}|^{p_2} + \sum_{j \in C_m} \sum_{k \in B_n} |\Delta_{rr} c_{j,k}|^{p_2} \\
 &\left. + \sum_{j \in A_m} \sum_{k \in C_n} |\Delta_{rr} c_{j,k}|^{p_2} + \sum_{j \in B_m} \sum_{k \in C_n} |\Delta_{rr} c_{j,k}|^{p_2} + \sum_{j \in C_m} \sum_{k \in C_n} |\Delta_{rr} c_{j,k}|^{p_2} \right)^{\frac{1}{p_2}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\leq \left(\sum_{j \in A_m} \sum_{k \in A_n} |\Delta_{rr} c_{j,k}|^{p_2} \right)^{\frac{1}{p_2}} + \left(\sum_{j \in B_m} \sum_{k \in A_n} |\Delta_{rr} c_{j,k}|^{p_2} \right)^{\frac{1}{p_2}} + \left(\sum_{j \in C_m} \sum_{k \in A_n} |\Delta_{rr} c_{j,k}|^{p_2} \right)^{\frac{1}{p_2}} \\
 &+ \left(\sum_{j \in A_m} \sum_{k \in B_n} |\Delta_{rr} c_{j,k}|^{p_2} \right)^{\frac{1}{p_2}} + \left(\sum_{j \in B_m} \sum_{k \in B_n} |\Delta_{rr} c_{j,k}|^{p_2} \right)^{\frac{1}{p_2}} + \left(\sum_{j \in C_m} \sum_{k \in B_n} |\Delta_{rr} c_{j,k}|^{p_2} \right)^{\frac{1}{p_2}} \\
 &+ \left(\sum_{j \in A_m} \sum_{k \in C_n} |\Delta_{rr} c_{j,k}|^{p_2} \right)^{\frac{1}{p_2}} + \left(\sum_{j \in B_m} \sum_{k \in C_n} |\Delta_{rr} c_{j,k}|^{p_2} \right)^{\frac{1}{p_2}} + \left(\sum_{j \in C_m} \sum_{k \in C_n} |\Delta_{rr} c_{j,k}|^{p_2} \right)^{\frac{1}{p_2}} \\
 &= S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5 + S_6 + S_7 + S_8 + S_9.
 \end{aligned}$$

Wykonując elementarne przekształcenia otrzymujemy

$$\begin{aligned}
 S_1 &= \left(\sum_{j \in A_m} \sum_{k \in A_n} |c_{j,k} - c_{j+r,k} - c_{j,k+r} + c_{j+r,k+r}|^{p_2} \right)^{\frac{1}{p_2}} \\
 &= \left(\sum_{j \in A_m} \sum_{k \in A_n} \left| \left(\frac{1}{(k-r)^2} + \frac{1}{k^2 k^{\frac{1}{p_2}}} \right) \left(\frac{1}{(j-r)^2} + \frac{1}{j^2 j^{\frac{1}{p_2}}} \right) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \left(\frac{1}{(k-r)^2} + \frac{1}{k^2 k^{\frac{1}{p_2}}} \right) \frac{1}{(j+r)^2} - \frac{1}{(k+r)^2} \left(\frac{1}{(j-r)^2} + \frac{1}{j^2 j^{\frac{1}{p_2}}} \right) + \frac{1}{(j+r)^2 (k+r)^2} \right|^{p_2} \right)^{\frac{1}{p_2}} \\
 &= \left(\sum_{j \in A_m} \sum_{k \in A_n} \left[\left(\frac{1}{(k-r)^2} + \frac{1}{k^2 k^{\frac{1}{p_2}}} - \frac{1}{(k+r)^2} \right) \left(\frac{1}{(j-r)^2} + \frac{1}{j^2 j^{\frac{1}{p_2}}} - \frac{1}{(j+r)^2} \right) \right]^{p_2} \right)^{\frac{1}{p_2}} \\
 &\leq \left(\sum_{j \in A_m} \sum_{k \in A_n} \left(\frac{16r}{k^2 k} + \frac{1}{k^2 k^{\frac{1}{p_2}}} \right)^{p_2} \left(\frac{16r}{j^2 j} + \frac{1}{j^2 j^{\frac{1}{p_2}}} \right)^{p_2} \right)^{\frac{1}{p_2}} \\
 &\leq (16r+1)^2 \left(\sum_{j=m}^{2m-1} \sum_{k=n}^{2n-1} \left(\frac{1}{k^{2+\frac{1}{p_2}}} \frac{1}{j^{2+\frac{1}{p_2}}} \right)^{p_2} \right)^{\frac{1}{p_2}} \\
 &\leq (16r+1)^2 \frac{1}{n^{2+\frac{1}{p_2}}} n^{\frac{1}{p_2}} \frac{1}{m^{2+\frac{1}{p_2}}} m^{\frac{1}{p_2}} \leq \frac{(17r)^2}{n^2 m^2}.
 \end{aligned}$$

W podobny sposób uzyskujemy, że

$$S_q \leq \frac{(17r)^2}{n^2 m^2}$$

dla $q = 2, 3, 4, \dots, 9$. Wykonując elementarne szacowania otrzymujemy

$$\begin{aligned}
 \left(\sum_{j=m}^{2m-1} \sum_{k=n}^{2n-1} |\Delta_{rr} c_{j,k}|^{p_2} \right)^{\frac{1}{p_2}} &\leq 144 \frac{(17r)^2}{nm} \sum_{j=m}^{2m-1} \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{k^2} \frac{1}{j^2} \leq \frac{41616r^2}{nm} \sup_{M+N \geq b_3(m+n)} \sum_{j=M}^{2M} \sum_{k=N}^{2N} \frac{1}{k^2} \frac{1}{j^2} \\
 &\leq \frac{41616r^2}{nm} \sup_{M+N \geq b_3(m+n)} \left(\sum_{j \in D_m} \sum_{k \in D_n} \left(\frac{1}{(k-r)^2} + \frac{1}{k^{2+\frac{1}{p_2}}} \right) \left(\frac{1}{(j-r)^2} + \frac{1}{j^{2+\frac{1}{p_2}}} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{j \in D_m} \sum_{k \in E_n} \frac{1}{k^2} \left(\frac{1}{(j-r)^2} + \frac{1}{j^{2+\frac{1}{p_2}}} \right) + \sum_{j \in E_m} \sum_{k \in D_n} \frac{1}{j^2} \left(\frac{1}{(k-r)^2} + \frac{1}{k^{2+\frac{1}{p_2}}} \right) \right)
 \end{aligned}$$

$$+ \sum_{j \in E_m} \sum_{k \in E_n} \frac{1}{j^2 k^2} \Bigg) \leq \frac{41616r^2}{nm} \sup_{M+N \geq b_3(m+n)} \sum_{j=M}^{2M} \sum_{k=N}^{2N} |c_{j,k}|.$$

Zatem $\{c_{m,n}\}_{m,n=1}^{\infty} \in DGM(p_2, {}_2\alpha, {}_2\beta, {}_2\gamma, r)$.

Pokażemy teraz, że $\{c_{m,n}\}_{m,n=1}^{\infty} \notin DGM(p_1, {}_2\alpha, {}_2\beta, {}_2\gamma, r)$, gdzie $\frac{n}{b_2(n)} = O(1)$. Wykorzystując (1.2) otrzymujemy, że dla dowolnego $n \geq 8r$ oraz $j \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=n}^{2n-1} |c_{j,k} - c_{j,k+r}|^{p_1} \right)^{\frac{1}{p_1}} &\geq \left(\sum_{k \in C_n} \frac{1}{(k+r)^{2p_1+\frac{p_1}{p_2}}} a_j \right)^{\frac{1}{p_1}} \geq \frac{a_j}{(2n+r)^{2+\frac{1}{p_2}}} \left(\sum_{k \in C_n} 1 \right)^{\frac{1}{p_1}} \\ &\geq \frac{a_j}{(4r)^{2+\frac{1}{p_2}}} \left(\frac{n}{4r} \right)^{\frac{1}{p_1}} \frac{1}{n^{2+\frac{1}{p_2}}} = \frac{a_j}{(4r)^{2+\frac{1}{p_2}+\frac{1}{p_1}}} \frac{n^{\frac{1}{p_1}}}{n^{2+\frac{1}{p_2}}}. \end{aligned}$$

Z drugiej strony, wykorzystując $\frac{n}{b_2(n)} = O(1)$, otrzymujemy, że dla dowolnego $j \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \max_{b_2(n) \leq N \leq \lambda b_2(n)} \sum_{k=N}^{2N} |c_{j,k}| &= \frac{1}{n} \max_{b_2(n) \leq N \leq \lambda b_2(n)} \left(\sum_{k \in D_m} \left(\frac{1}{(k-r)^2} + \frac{1}{k^{2+\frac{1}{p_2}}} \right) a_j + \sum_{k \in E_m} \frac{1}{k^2} a_j \right) \\ &\leq \frac{1}{n} \max_{b_2(n) \leq N \leq \lambda b_2(n)} \left(\sum_{k \in D_m} \left(\frac{1}{(\frac{1}{2}k)^2} + \frac{1}{k^2} \right) a_j + \sum_{k \in E_m} \frac{1}{k^2} a_j \right) \\ &= \frac{1}{n} \max_{b_2(n) \leq N \leq \lambda b_2(n)} \left(\sum_{k \in D_m} \frac{5}{k^2} a_j + \sum_{k \in E_m} \frac{1}{k^2} a_j \right) \leq \frac{5}{n} \max_{b_2(n) \leq N \leq \lambda b_2(n)} \sum_{k=N}^{2N} \frac{1}{k^2} a_j \\ &\leq \frac{5}{n} a_j \max_{b_2(n) \leq N \leq \lambda b_2(n)} \frac{2}{N} \ll \frac{1}{n^2} a_j. \end{aligned}$$

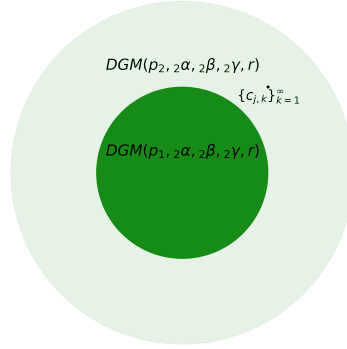
Zatem nierówność

$$\left(\sum_{k=n}^{2n-1} |c_{j,k} - c_{j,k+r}|^{p_1} \right)^{\frac{1}{p_1}} \leq \frac{C}{n} \max_{b_2(n) \leq N \leq \lambda b_2(n)} \sum_{k=N}^{2N} |c_{j,k}|$$

nie może być spełniona, jeśli $n \rightarrow \infty$.

To kończy dowód części (ii) oraz całego twierdzenia. □

Wykorzystując powyższe twierdzenie możemy stwierdzić, że klasa $DGM(p, {}_2\alpha, {}_2\beta, {}_2\gamma, r)$ jest istotnie szersza niż klasa $DGM(1, {}_2\alpha, {}_2\beta, {}_2\gamma, r)$ wprowadzona przez B. Szala oraz K. Duzinkiewicza w pracy [3], co można zobrazować na poniższym rysunku:



Rysunek 1.6: Zależności między klasami $DGM(p_1, {}_2\alpha, {}_2\beta, {}_2\gamma, r)$, $DGM(p_2, {}_2\alpha, {}_2\beta, {}_2\gamma, r)$, gdzie $1 \leq p_1 < p_2$ oraz $r \in \mathbb{N}$.

Twierdzenie 6. [14] Niech $p \geq 1$, $r_1, r_2 \in \mathbb{N}$, oraz niech $r_1 \leq r_2$.

- (i) Jeśli $r_1 | r_2$, to $DGM(p, {}_2\alpha, {}_2\beta, {}_2\gamma, r_1) \subseteq DGM(p, {}_2\alpha, {}_2\beta, {}_2\gamma, r_2)$,
- (ii) Istnieje ciąg $\{c_{m,n}\}_{m,n=1}^\infty$, który należy do klasy $DGM(p, {}_2\alpha, {}_2\beta, {}_2\gamma, r_2)$ oraz nie należy do klasy $DGM(p, {}_2\alpha, {}_2\beta, {}_2\gamma, r_1)$, gdzie $\frac{n}{b_i(n)} = O(1)$ dla $i \in \{1, 2, 3\}$ oraz $r_1 < r_2$.

Dowód. Niech $\{c_{j,k}\}_{j,k=1}^\infty \in DGM(p, {}_2\alpha, {}_2\beta, {}_2\gamma, r_1)$. Jeśli $r_1 | r_2$, to $r_2 = \alpha r_1$, gdzie $\alpha \in \mathbb{N}$. Załóżmy, że dla dowolnego $m \in \mathbb{N}$, $b'_1(m) = b_1(m + l_0 r_1)$, gdzie $l_0 \in \{0, 1, \dots, \alpha - 1\}$ jest takie, że dla $n \in \mathbb{N}$

$$\max_{b_1(m+l_0 r_1) \leq M \leq \lambda b_1(m+l_0 r_1)} \sum_{j=M}^{2M} |c_{j,n}| = \max_{l \in \{0, 1, \dots, \alpha-1\}} \max_{b_1(m+l r_1) \leq M \leq \lambda b_1(m+l r_1)} \sum_{j=M}^{2M} |c_{j,n}|.$$

Wykorzystując nierówność Höldera z $p > 1$ otrzymujemy, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \left(\sum_{j=m}^{2m-1} |\Delta_{r_2 0} c_{j,n}|^p \right)^{\frac{1}{p}} &= \left(\sum_{j=m}^{2m-1} \left| \sum_{l=0}^{\alpha-1} (c_{j+l r_1, n} - c_{j+(l+1) r_1, n}) \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \alpha^{1-\frac{1}{p}} \left(\sum_{l=0}^{\alpha-1} \left(\sum_{j=m+l r_1}^{2m+r_1-1} |c_{j,n} - c_{j+r_1, n}|^p \right) \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \alpha^{1-\frac{1}{p}} \left(\sum_{l=0}^{\alpha-1} \left(\frac{C}{m + l r_1} \max_{b_1(m+l r_1) \leq M \leq \lambda b_1(m+l r_1)} \sum_{j=M}^{2M} |c_{j,n}| \right)^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \frac{\alpha C}{m} \max_{b'_1(m) \leq M \leq \lambda b'_1(m)} \sum_{j=M}^{2M} |c_{j,n}|. \end{aligned}$$

Analogicznie dla dowolnego $m \in \mathbb{N}$ dostajemy następującą nierówność

$$\left(\sum_{k=n}^{2n-1} |\Delta_{0r_2} c_{m,k}|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{\alpha C}{n} \max_{b'_2(n) \leq N \leq \lambda b'_2(n)} \sum_{k=N}^{2N} |c_{m,k}|,$$

gdzie ciąg b'_2 jest zdefiniowany analogicznie jak ciąg b'_1 . Ponadto wykorzystując nierówność Höldera dla $p > 1$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} \left(\sum_{j=m}^{2m-1} \sum_{k=n}^{2n-1} |\Delta_{r_2 r_2} c_{j,k}|^p \right)^{\frac{1}{p}} &= \left(\sum_{j=m}^{2m-1} \sum_{k=n}^{2n-1} \left| \sum_{l=0}^{\alpha-1} (c_{j+lr_1, k+lr_1} - c_{j+(l+1)r_1, k} - c_{j+lr_1, k+(l+1)r_1} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + c_{j+(l+1)r_1, k+(l+1)r_1} \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \alpha^{1-\frac{1}{p}} \left(\sum_{j=m}^{2m-1} \sum_{k=n}^{2n-1} \left(\sum_{l=0}^{\alpha-1} |c_{j+lr_1, k+lr_1} - c_{j+(l+1)r_1, k} - c_{j+lr_1, k+(l+1)r_1} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + c_{j+(l+1)r_1, k+(l+1)r_1} \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \alpha^{1-\frac{1}{p}} \left(\sum_{l=0}^{\alpha-1} \left(\sum_{j=m+lr_1}^{2m+lr_1-1} \sum_{k=n+lr_1}^{2n+lr_1-1} |\Delta_{r_1 r_1} c_{j,k}|^p \right) \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \alpha^{1-\frac{1}{p}} \left(\sum_{l=0}^{\alpha-1} \left(\frac{C}{(n+lr_1)(m+lr_1)} \sup_{M+N \geq b_3(m+n+2lr_1)} \sum_{j=M}^{2M} \sum_{k=N}^{2N} |c_{j,k}| \right)^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \alpha \frac{C}{nm} \sup_{M+N \geq b'_3(m+n)} \sum_{j=M}^{2M} \sum_{k=N}^{2N} |c_{j,k}|, \end{aligned}$$

gdzie dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$, $b'_3(k) = b_3(k + 2l_0 r_1)$.

Zatem, $\{c_{j,k}\}_{j,k=1}^{\infty} \in DGM(p, {}_1\alpha, {}_1\beta, {}_2\gamma, r_2)$.

(ii) Niech

$$c_{j,k} = a_j a_k = \frac{2 + \alpha_n}{j^2} \frac{2 + \alpha_n}{k^2}, \text{ gdzie } \alpha_n = \begin{cases} 1, & \text{gdzie } r_2 \nmid n, \\ -1, & \text{gdzie } r_2 | n. \end{cases} \quad \text{dla } j, k \in \mathbb{N} \quad (1.13)$$

Pokażemy, że $\{c_{j,k}\}_{j,k=1}^{\infty} \in DGM(p, {}_2\alpha, {}_2\beta, {}_2\gamma, r_2)$ oraz $\{c_{j,k}\}_{j,k=1}^{\infty} \notin DGM(p, {}_2\alpha, {}_2\beta, {}_2\gamma, r_1)$. Niech dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} A_n &= \{k \in \mathbb{N} : n \leq k \leq 2n-1 \text{ oraz } r_2 | k\}, \\ B_n &= \{k \in \mathbb{N} : n \leq k \leq 2n-1 \text{ oraz } r_2 \nmid k\}. \end{aligned}$$

Wykorzystując Lemat 1 otrzymujemy, że, dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \left(\sum_{j=m}^{2m-1} |c_{j,k} - c_{j+r_2, k}|^p \right)^{\frac{1}{p}} &= \left(\sum_{j \in A_m} \left| \left(\frac{1}{j^2} - \frac{1}{(j+r_2)^2} \right) a_k \right|^p + \sum_{j \in B_m} \left| \left(\frac{3}{j^2} - \frac{3}{(j+r_2)^2} \right) a_k \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(3^p \sum_{j=m}^{2m-1} \left| \frac{2r_2 j + r_2^2}{(j+r_2)^2 j^2} a_k \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq 3 \left(\sum_{j=m}^{2m-1} \left(\frac{2r_2(j+r_2)}{(j+r_2)^2 j^2} a_k \right)^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq 6r_2 \left(\sum_{j=m}^{2m-1} \left(\frac{1}{j^3} a_k \right)^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq 6r_2 \sum_{j=m}^{2m-1} \frac{1}{j^3} a_k \leq \frac{6r_2}{m} \sum_{j=m}^{2m-1} |c_{j,k}| \leq \frac{6r_2}{m} \max_{b_1(m) \leq M \leq \lambda b_1(m)} \sum_{j=M}^{2M} |c_{j,k}|. \end{aligned}$$

Analogicznie otrzymujemy, że dla dowolnego $j \in \mathbb{N}$ zachodzi nierówność

$$\left(\sum_{k=n}^{2n-1} |c_{j,k} - c_{j,k+r_2}|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{6r_2}{n} \max_{b(2n) \leq N \leq \lambda b_2(n)} \sum_{k=N}^{2N} |c_{j,k}|.$$

Dalej, wykorzystując Lemat 1 otrzymujemy

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{j=m}^{2m-1} \sum_{k=n}^{2n-1} |\Delta_{r_2 r_2} c_{j,k}|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{j=m}^{2m-1} \sum_{k=n}^{2n-1} |c_{j,k} - c_{j+r_2,k} - c_{j,k+r_2} + c_{j+r_2,k+r_2}|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\sum_{j \in A_m} \sum_{k \in A_n} \left| \frac{1}{j^2 k^2} - \frac{1}{(j+r_2)^2 k^2} - \frac{1}{j^2 (k+r_2)^2} + \frac{1}{(j+r_2)^2 (k+r_2)^2} \right|^p \right. \\ &+ \sum_{j \in A_m} \sum_{k \in B_n} \left| \frac{3}{j^2 k^2} - \frac{3}{(j+r_2)^2 k^2} - \frac{3}{j^2 (k+r_2)^2} + \frac{3}{(j+r_2)^2 (k+r_2)^2} \right|^p \\ &+ \sum_{j \in B_m} \sum_{k \in A_n} \left| \frac{3}{j^2 k^2} - \frac{3}{(j+r_2)^2 k^2} - \frac{3}{j^2 (k+r_2)^2} + \frac{3}{(j+r_2)^2 (k+r_2)^2} \right|^p \\ &+ \left. \sum_{j \in B_m} \sum_{k \in B_n} \left| \frac{9}{j^2 k^2} - \frac{9}{(j+r_2)^2 k^2} - \frac{9}{j^2 (k+r_2)^2} + \frac{9}{(j+r_2)^2 (k+r_2)^2} \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq 9 \left(\sum_{j=m}^{2m-1} \sum_{k=n}^{2n-1} \left| \frac{(j+r_2)^2 (k+r_2)^2 - j^2 (k+r_2)^2 - k^2 (j+r_2)^2 + j^2 k^2}{j^2 k^2 (j+r_2)^2 (k+r_2)^2} \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= 9 \left(\sum_{j=m}^{2m-1} \sum_{k=n}^{2n-1} \left| \frac{r_2^2 (4jk + 2jr + 2kr_2 + r^2)}{j^2 k^2 (j+r_2)^2 (k+r_2)^2} \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq 9 \left(\sum_{j=m}^{2m-1} \sum_{k=n}^{2n-1} \left(\frac{4r_2^2 (k+r_2)(j+r_2)}{j^2 k^2 (j+r_2)^2 (k+r_2)^2} \right)^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq 36r_2^2 \left(\sum_{j=m}^{2m-1} \sum_{k=n}^{2n-1} \left(\frac{1}{j^3 k^3} \right)^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \frac{36r_2^2}{mn} \sum_{j=m}^{2m-1} \sum_{k=n}^{2n-1} c_{j,k} \leq \frac{36r_2^2}{mn} \sup_{M+N \geq b_3(m+n)} \sum_{j=M}^{2M} \sum_{k=N}^{2N} |c_{j,k}|, \end{aligned}$$

co oznacza, że $\{c_{j,k}\}_{j,k=1}^{\infty} \in DGM(p, 2\alpha, 2\beta, 2\gamma, , r_2)$.

Pokażemy teraz, że $\{c_{j,k}\}_{j,k=1}^{\infty} \notin DGM(p, 2\alpha, 2\beta, 2\gamma, , r_1)$, gdzie $\frac{n}{b_2(n)} = O(1)$. Dla dowolnego $m \in \mathbb{N}$ mamy

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{k=n}^{2n-1} |c_{m,k} - c_{m,k+r_1}|^p \right)^{\frac{1}{p}} \geq \left(\sum_{k \in A_n} |c_{m,k} - c_{m,k+r_1}|^p \right)^{\frac{1}{p}} \geq \left(\sum_{k \in A_n} \left| \left(\frac{1}{k^3} - \frac{3}{(k+r_1)^2} \right) a_m \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\sum_{k \in A_n} \left| \frac{(k+r_1)^2 - 3k^2}{(k+r_1)^2 k^2} a_m \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{k \in A_n} \left| \frac{-2k^2 + 2kr_1 + r_1^2}{(k+r_1)^2 k^2} a_m \right|^p \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Jeśli $n \geq 5r_1$, to $2n^2 - 2nr_1 - r_1^2 \geq (n+r_1)^2$. Zatem, dla $n \geq 5r_1$ oraz $m \in \mathbb{N}$ otrzymujemy

$$\left(\sum_{k=n}^{2n-1} |c_{m,k} - c_{m,k+r_1}|^p \right)^{\frac{1}{p}} \geq \left(\sum_{k \in A_n} \left(\frac{1}{k^2} a_m \right)^p \right)^{\frac{1}{p}} \geq \frac{1}{(2n)^2} \left(\frac{n}{2r_2} \right)^{\frac{1}{p}} a_m = \frac{1}{2^{2+\frac{1}{p}} r_2^{\frac{1}{p}}} n^{-2+\frac{1}{p}} a_m.$$

Z drugiej strony, wykorzystując $\frac{n}{b_2(n)} = O(1)$, otrzymujemy, że dla dowolnego $m \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{n} \max_{b_2(n) \leq N \leq \lambda b_2(n)} \sum_{k=N}^{2N} |c_{m,k}| \leq \frac{a_m}{n} \max_{b_2(n) \leq N \leq \lambda b_2(n)} \sum_{k=N}^{2N} \frac{1}{k^2} \ll \frac{1}{n^2} a_m.$$

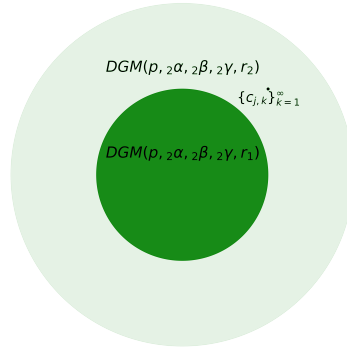
Zatem, nierówność

$$\left(\sum_{k=n}^{2n-1} |c_{m,k} - c_{m,k+r_1}|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{C}{n} \max_{b_2(n) \leq N \leq \lambda b_2(n)} \sum_{k=N}^{2N} |c_{m,k}|$$

nie może być spełniona jeśli $n \rightarrow \infty$.

Kończy to dowód części (ii) oraz całego twierdzenia. □

Zależności z powyższego twierdzenia można zobrazować na poniższym grafie:



Rysunek 1.7: Zależności między klasami $DGM(p, 2\alpha, 2\beta, 2\gamma, r_1)$, $DGM(p, 2\alpha, 2\beta, 2\gamma, r_2)$, gdzie $p \geq 1$, $r_1, r_2 \in \mathbb{N}$, $r_1 < r_2$ i $r_1 | r_2$.

Rozdział 2

Zbieżność jednostajna pojedynczych szeregów trygonometrycznych

W rozdziale tym przedstawione zostaną wyniki pochodzące ze wspólnych prac z B. Szale ([16], [17]) dotyczące jednostajnej zbieżności pojedynczych szeregów trygonometrycznych.

Zacniemy od sformułowania wyników pomocniczych.

2.1 Twierdzenia pomocnicze

Dla dowolnego $r \in \mathbb{N}$ oraz $k = 0, 1, 2, \dots$ oznaczmy przez

$$D_{k,r}(x) = \frac{\sin\left(k + \frac{r}{2}\right)x}{2 \sin \frac{rx}{2}}, \quad \tilde{D}_{k,r}(x) = \frac{\cos\left(k + \frac{r}{2}\right)x}{2 \sin \frac{rx}{2}}$$

jądro oraz sprzężone jądro typu Dirichleta.

Przedstawiony zostanie teraz lemat, wykazany przez B. Szalę w pracach: [37], [41], który odgrywa kluczową rolę w dowodach twierdzeń zawartych w tej rozprawie formułujących warunki dostateczne jednostajnej zbieżności szeregów trygonometrycznych.

Lemat 3. ([37], [41]) Niech $r, m, n \in \mathbb{N}, l \in \mathbb{Z}$ oraz $\{c_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$. Jeżeli $x \neq \frac{2l\pi}{r}$, wtedy dla $m \geq n$

$$\sum_{k=n}^m c_k \sin(kx) = - \sum_{k=n}^m \Delta_r c_k \tilde{D}_{k,r}(x) + \sum_{k=m+1}^{m+r} c_k \tilde{D}_{k,-r}(x) - \sum_{k=n}^{n+r-1} c_k \tilde{D}_{k,-r}(x) \quad (2.1)$$

oraz

$$\sum_{k=n}^m c_k \cos(kx) = \sum_{k=n}^m \Delta_r c_k D_{k,r}(x) - \sum_{k=m+1}^{m+r} c_k D_{k,-r}(x) + \sum_{k=n}^{n+r-1} c_k D_{k,-r}(x) \quad (2.2)$$

Kolejne lematy tego podrozdziału pochodzą z prac [16] i [17].

Lemat 4. [17] Niech $r, m, n \in \mathbb{N}, l \in \mathbb{Z}$ i $\{c_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$. Jeżeli $x \neq \frac{2l\pi}{r}$, wtedy dla $m \geq n$

$$\sum_{k=n}^m c_k e^{ikx} = \frac{-i}{2 \sin\left(\frac{rx}{2}\right)} \left(\sum_{k=n}^m \Delta_r c_k e^{-i\left(k+\frac{r}{2}\right)x} - \sum_{k=m+1}^{m+r} e^{-i\left(k-\frac{r}{2}\right)x} + \sum_{k=n}^{n+r-1} e^{-i\left(k-\frac{r}{2}\right)x} \right).$$

Dowód. Wykorzystując Lemat 3 otrzymujemy

$$\begin{aligned} \sum_{k=n}^m c_k e^{ikx} &= \sum_{k=n}^m c_k \cos(kx) + i \sum_{k=n}^m c_k \sin(kx) = \left(\sum_{k=n}^m \Delta_r a_k \frac{\sin(k + \frac{r}{2})x - i \cos(k + \frac{r}{2})x}{2 \sin(\frac{rx}{2})} \right. \\ &\quad \left. - \sum_{k=m+1}^{m+r} c_k \frac{\sin(k - \frac{r}{2})x - i \cos(k - \frac{r}{2})x}{2 \sin(\frac{rx}{2})} + \sum_{k=n}^{n+r+1} c_k \frac{\sin(k - \frac{r}{2})x - i \cos(k - \frac{r}{2})x}{2 \sin(\frac{rx}{2})} \right) \\ &= \frac{-i}{2 \sin(\frac{rx}{2})} \left(\sum_{k=n}^m \Delta_r a_k e^{-i(k+\frac{r}{2})x} - \sum_{k=m+1}^{m+r} c_k e^{-i(k-\frac{r}{2})x} + \sum_{k=n}^{n+r+1} c_k e^{-i(k-\frac{r}{2})x} \right), \end{aligned}$$

co kończy dowód. $\square$

Lemat 5. [16] Niech $n, N \in \mathbb{N}$, wtedy dla $p \geq 1$

$$\int_{n+N\frac{1}{p}}^{n+N} \frac{1}{k \ln k} dk \leq \ln p.$$

Dowód. Powyższa nierówność jest prawdziwa dla $p = 1$. Rozważmy funkcję postaci $f(p) = \left(n + N\frac{1}{p}\right)^p$, gdzie $p > 0$. Różniczkując powyższą funkcję otrzymujemy

$$f'(p) = p \left(n + N\frac{1}{p}\right)^{p-1} \frac{1}{p} N^{\frac{1}{p}-1} = \left(n + N\frac{1}{p}\right)^{p-1} N^{\frac{1}{p}-1} \geq 0 \text{ dla dowolnego } p > 0.$$

Oznacza to, że funkcja f jest niemalejąca ze względu na p .

Zatem

$$n + N = f(1) \leq f(p) = \left(n + N\frac{1}{p}\right)^p \text{ dla } p \geq 1. \quad (2.3)$$

Stąd

$$\ln(n + N) \leq \ln \left(n + N\frac{1}{p}\right)^p. \quad (2.4)$$

Korzystając z (2.4) otrzymujemy

$$\begin{aligned} \int_{n+N\frac{1}{p}}^{n+N} \frac{1}{k \ln k} dk &= \int_{\ln(n+N\frac{1}{p})}^{\ln(n+N)} \frac{1}{t} dt = \ln(\ln(n + N)) - \ln(\ln(n + N\frac{1}{p})) = \ln \left(\frac{\ln(n + N)}{\ln(n + N\frac{1}{p})} \right) \\ &= \ln \left(p \frac{\ln(n + N)}{\ln(n + N\frac{1}{p})^p} \right) \leq \ln p, \end{aligned}$$

co kończy dowód. $\square$

Lemat 6. [17] Niech $\{c_k\}_{k=1}^{\infty} \in GM(p, 6\beta(q), r)$ będzie ciągiem o wyrazach nieujemnych, $p, q \geq 1$, $r \in \mathbb{N}$ oraz $\frac{b(n)}{n} = O(1)$. Wtedy

$$n^{\frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1} c_n \ll \sum_{k=b(n)}^{2\lambda b(n)} c_k + \sum_{k=n+r}^{2n+r-1} c_k. \quad (2.5)$$

Dowód. Załóżmy, że $\{c_k\}_{k=1}^{\infty} \in GM(p, 6\beta(q), r)$. Jeśli $n \leq r$, to nierówność (2.5) jest prawdziwa.

Niech teraz $n > r$. Dla $n + r \leq v \leq 2n$ oraz $p \geq 1$ wykorzystując Lemat 2 otrzymujemy

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=n}^{2n-1} |c_k - c_{k+r}|^p \right)^{\frac{1}{p}} &\geq \left(\sum_{k=n}^{v-1} |c_k - c_{k+r}|^p \right)^{\frac{1}{p}} = (v-n)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{v-n} \sum_{k=n}^{v-1} |c_k - c_{k+r}|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\geq (v-n)^{\frac{1}{p}} \frac{1}{v-n} \sum_{k=n}^{v-1} |c_k - c_{k+r}| \geq (v-n)^{\frac{1}{p}-1} \left| \sum_{k=n}^{v-1} c_k - \sum_{k=n+r}^{v+r-1} c_k \right| \\ &\geq (v-n)^{\frac{1}{p}-1} \left(\sum_{k=n}^{n+r-1} c_k - \sum_{k=v}^{v+r-1} c_k \right). \end{aligned}$$

Zatem wykorzystując Lemat 1 dla $q \geq 1$ dostajemy

$$\begin{aligned} c_n &\leq \sum_{k=n}^{n+r+1} c_k \leq (v-n)^{1-\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=n}^{2n-1} |c_k - c_{k+r}|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \sum_{k=v}^{v+r-1} c_k \\ &\leq \frac{C(v-n)^{1-\frac{1}{p}}}{n} \max_{b(n) \leq m \leq \lambda b(n)} m \left(\frac{1}{m} \sum_{k=m}^{2m} c_k^q \right)^{\frac{1}{q}} + \sum_{k=v}^{v+r-1} c_k \\ &\leq \frac{C(v-n)^{1-\frac{1}{p}}}{n} \max_{b(n) \leq m \leq \lambda b(n)} m^{1-\frac{1}{q}} \sum_{k=m}^{2m} c_k + \sum_{k=v}^{v+r-1} c_k. \end{aligned}$$

Stąd, dla $n + r \leq v \leq 2n$ mamy

$$v^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-2} c_n \leq \frac{C v^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-2} (v-n)^{1-\frac{1}{p}}}{n} \max_{b(n) \leq m \leq \lambda b(n)} m^{1-\frac{1}{q}} \sum_{k=m}^{2m} c_k + v^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-2} \sum_{k=v}^{v+r-1} c_k. \quad (2.6)$$

Dodając strony nierówności (2.6) dla $v = n + r, n + r + 1, \dots, 2n$ otrzymujemy

$$\sum_{v=n+r}^{2n} v^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-2} c_n \leq C \sum_{v=n+r}^{2n} \frac{v^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-2} (v-n)^{1-\frac{1}{p}}}{n} \max_{b(n) \leq m \leq \lambda b(n)} m^{1-\frac{1}{q}} \sum_{k=m}^{2m} c_k + \sum_{v=n+r}^{2n} v^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-2} \sum_{k=v}^{v+r-1} c_k.$$

Jeśli $n > r$, to

$$2n^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-1} \geq \sum_{v=n+r}^{2n} v^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-2} \geq \frac{2^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-1}}{r+1} n^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-1}.$$

Zatem wykorzystując założenie, że $\frac{b(n)}{n} = O(1)$, uzyskujemy

$$\begin{aligned} \frac{2^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-1}}{r+1} n^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-1} c_n &\ll n^{\frac{1}{q}-1} \max_{b(n) \leq m \leq \lambda b(n)} m^{1-\frac{1}{q}} \sum_{k=m}^{2m} c_k + n^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-2} \sum_{v=n+r}^{2n} (c_v + c_{v+1} + \dots + c_{v+r-1}) \\ &\ll \left(\frac{b(n)}{n} \right)^{1-\frac{1}{q}} \max_{b(n) \leq m \leq \lambda b(n)} \sum_{k=m}^{2m} c_k + n^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-2} r \sum_{k=n+r}^{2n+r-1} c_k \ll \sum_{k=b(n)}^{2\lambda b(n)} c_k + \sum_{k=n+r}^{2n+r-1} c_k, \end{aligned}$$

co kończy dowód. $\square$

2.2 Zbieżność jednostajna pojedynczych szeregów sinusów i cosinusów

W dalszej części rozprawy rozważać będziemy następujące szeregi trygonometryczne:

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin(kx), \quad (2.7)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} d_k \cos(kx), \quad (2.8)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} w_k e^{ikx}. \quad (2.9)$$

Pierwszy wynik dotyczący jednostajnej zbieżności pojedynczego szeregu sinusów został przedstawiony przez T. W. Chaundy'ego i A. E. Jolliffe'a w pracy [1]. Można go sformułować w następujący sposób:

Twierdzenie 7. [1] *Jeżeli $\{c_k\}_{k=1}^{\infty} \in MS$, to szereg (2.7) jest jednostajnie zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$kc_k \rightarrow 0, \text{ gdy } k \rightarrow \infty. \quad (2.10)$$

W następnych latach Twierdzenie 7 było uogólniane dla klas wprowadzonych w Rozdziale 1. Dla klasy ciągów $RBV(1, {}_1\delta, 1)$ wynik ten został wykazany przez L. Leindlera w pracy [27]. S. Tikhonov uogólnił ten rezultat w pracy [45] dla klasy ciągów $GM(1, {}_1\delta, 1)$ oraz w pracy [44] dla klasy ciągów $GM(1, {}_3\delta, 1)$. Podobny wynik dla klasy ciągów $GM(1, {}_3\delta, 1)$ otrzymali S. P. Zhou, P. Zhou i D. S. Yu w pracy [53]. W artykule [18] R. Le oraz S. Zhou uogólnili Twierdzenie 7 dla klasy ciągów $GM(1, {}_2\delta, 1)$. P. Kórus w pracy [10] uogólnił powyższe twierdzenie dla klasy ciągów $GM(1, {}_4\delta, 1)$ oraz $GM(1, {}_5\delta, 1)$. Ponadto B. Szal w artykule [37] rozszerzył wynik otrzymany przez T. W. Chaundy'ego i A. E. Jolliffe'a na klasę ciągów $GM(1, {}_3\delta, 2)$, który został następnie uogólniony w pracy [4] przez K. Duzinkiewicza dla klasy ciągów $GM(1, {}_5\delta, 2)$.

Natomiast, pierwszy wynik dotyczący jednostajnej zbieżności pojedynczego szeregu cosinusów został przedstawiony w monografii A. Zygmunda ([54]). Można go sformułować w następujący sposób

Twierdzenie 8. [54] *Jeżeli $\{d_k\}_{k=1}^{\infty} \in MS$, to szereg (2.8) jest jednostajnie zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\sum_{k=1}^{\infty} d_k < \infty.$$

Wynik ten, przez następne lata, był uogólniany dla klas ciągów wprowadzonych w Rozdziale 1. Dla klasy ciągów $RBV(1, {}_1\delta, 1)$ powyższe twierdzenie zostało wykazane przez L. Leindlera w pracy [27]. S. Tikhonov rozszerzył ten rezultat na klasę ciągów $GM(1, {}_1\delta, 1)$ i $GM(1, {}_3\delta, 1)$ odpowiednio w pracach [45] i [44]. W artykule [13] P. Kórus uogólnił Twierdzenie 8 dla klasy $GM(1, {}_5\delta, 1)$, a K. Duzinkiewicz w pracy [4] dla klasy $GM(1, {}_5\delta, 2)$.

Poniższe twierdzenia są głównymi wynikami tego rozdziału. Prezentują one odpowiednio warunki konieczne i dostateczne zbieżności jednostajnej szeregów (2.7) oraz (2.8), których współczynniki tworzą ciągi należące odpowiednio do klas $GM(p, {}_6\delta, r)$ oraz $GM(p, {}_5\delta, r)$. Twierdzenia te zostały wykazane w pracach [16] oraz [17].

Twierdzenie 9. [17] *Niech $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}, \{d_k\}_{k=1}^{\infty} \in GM(p, {}_6\delta(q), r)$ będą ciągami o wyrazach nieujemnych, gdzie $r \in \mathbb{N}, p, q \geq 1$ oraz $\frac{b(n)}{n} = O(1)$. Jeśli*

(i) *szereg (2.7) jest zbieżny jednostajnie, to $n^{\frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1} c_n \rightarrow 0$ gdy $n \rightarrow \infty$,*

(ii) *szereg (2.8) jest zbieżny jednostajnie, to $n^{\frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1} d_n \rightarrow 0$ gdy $n \rightarrow \infty$.*

Dowód. (i) Niech $\epsilon > 0$. Wykorzystując jednostajną zbieżność szeregu (2.7) otrzymujemy, że istnieje liczba naturalna N_ϵ taka, że

$$\left| \sum_{k=n}^N c_k \sin(kx) \right| < \epsilon,$$

dla każdego $N \geq n \geq N_\epsilon$ i $x \in \mathbb{R}$. Niech dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$

$$x_1(n) = \frac{\pi}{4(n+r)},$$

$$x_2(n) = \frac{\pi}{4\lambda b(n)}.$$

Szacując wielkość $kx_1(n)$ oraz $kx_2(n)$ odpowiednio dla $n+r \leq k \leq 2n+r-1$ i $b(n) \leq k \leq 2\lambda b(n)$ otrzymujemy

$$\frac{\pi}{4} \leq kx_1(n) \leq \frac{(2n+r-1)\pi}{4(n+r)} < \frac{\pi}{2},$$

$$\frac{\pi}{4\lambda} \leq kx_2(n) \leq \frac{\pi}{2}.$$

Stąd, otrzymujemy

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) > \sin(kx_1(n)) = \sin\left(\frac{k\pi}{4(n+r)}\right) \geq \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \text{ dla } n+r \leq k \leq 2n+r-1,$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \geq \sin(kx_2(n)) = \sin\left(\frac{k\pi}{4\lambda b(n)}\right) \geq \sin\left(\frac{\pi}{4\lambda}\right) \text{ dla } b(n) \leq k \leq 2\lambda b(n).$$

Zatem:

$$\epsilon > \sum_{k=n+r}^{2n+r-1} c_k \sin(kx_1(n)) \geq \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \sum_{k=n+r}^{2n+r-1} c_k$$

oraz

$$\epsilon > \sum_{k=b(n)}^{2\lambda b(n)} c_k \sin(kx_2(n)) \geq \sin\left(\frac{\pi}{4\lambda}\right) \sum_{k=b(n)}^{2\lambda b(n)} c_k.$$

Wykorzystując Lemat 6 otrzymujemy

$$n^{\frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1} c_n \ll \sum_{k=b(n)}^{2\lambda b(n)} c_k + \sum_{k=n+r}^{2n+r-1} c_k < \epsilon \left(\frac{1}{\sin(\frac{\pi}{4})} + \frac{1}{\sin(\frac{\pi}{4\lambda})} \right),$$

czyli $n^{\frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1} c_n \rightarrow 0$ gdy $n \rightarrow \infty$. Co kończy dowód części (i) twierdzenia.

(ii) Korzystając z jednostajnej zbieżności szeregu (2.8) otrzymujemy, że dla dowolnego $\epsilon > 0$ istnieje liczba naturalna N_ϵ taka, że

$$\left| \sum_{k=n}^N d_k \cos(kx) \right| < \epsilon,$$

dla dowolnego $N \geq n \geq M$ oraz $x \in \mathbb{R}$. Biorąc $x = 0$ dostajemy

$$\sum_{k=n+r}^{2n+r-1} d_k < \epsilon$$

oraz

$$\sum_{k=b(n)}^{2\lambda b(n)} d_k < \varepsilon.$$

Wykorzystując Lemat 6 otrzymujemy

$$n^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-1} d_n < 2\varepsilon,$$

czyli $n^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-1} d_n \rightarrow 0$ gdy $n \rightarrow \infty$.

To kończy dowód części (ii) oraz całego twierdzenia. $\square$

Należy zaznaczyć, że wstawiając w Twierdzeniu 9 odpowiednio $p = 1, q = 1, r = 2$ otrzymujemy wynik K. Duzinkiewicza z pracy [4], a w konsekwencji inkluzji z podrozdziału 1.1.2 wszystkie wcześniejsze rezultaty podające warunek konieczny zbieżności jednostajnej pojedynczego szeregu sinusów i cosinusów.

Sformułowane zostanie teraz twierdzenie podające warunek dostateczny jednostajnej zbieżności szeregu (2.7) pochodzące ze wspólnej pracy z B. Szalem [16].

Twierdzenie 10. [16] Niech $\{c_k\}_{k=1}^{\infty} \in GM(p, {}_5\delta(q), r)$, $q \geq 1, p > 1, r \in \mathbb{N}$ oraz

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin\left(\frac{2l\pi}{r}k\right) < \infty \quad (2.11)$$

dla $r \geq 3$ i dowolnego $l \in \{1, \dots, [\frac{r}{2}] - 1\}$, gdy r jest liczbą parzystą oraz $l \in \{1, \dots, [\frac{r}{2}]\}$, gdy r jest liczbą nieparzystą. Jeśli

$$n \ln n |c_n| \rightarrow 0 \text{ gdy } n \rightarrow \infty, \quad (2.12)$$

to szereg (2.7) jest zbieżny jednostajnie.

Dowód. Niech $\varepsilon > 0$. Wykorzystując warunek (2.12) oraz (2.11) otrzymujemy:

$$n \ln n |c_n| < \varepsilon$$

oraz

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=n}^{\infty} c_k \sin\left(k \frac{2l\pi}{r}\right) \right| &< \varepsilon, \\ \left| \sum_{k=n}^{n+N} c_k \sin\left(k \frac{2l\pi}{r}\right) \right| &< \varepsilon \end{aligned} \quad (2.13)$$

dla dowolnego $n > N_\varepsilon$ i $N \in \mathbb{N}$, gdzie $l \in \{1, \dots, [\frac{r}{2}] - 1\}$, gdy r jest liczbą parzystą oraz $l \in \{1, \dots, [\frac{r}{2}]\}$, gdy r jest liczbą nieparzystą. Oznaczmy przez

$$\tau_n(x) = \sum_{k=n}^{\infty} c_k \sin(kx).$$

Pokażemy, że

$$|\tau_n(x)| \ll \varepsilon \quad (2.14)$$

zachodzi dla dowolnego $n \geq \max\{N_\varepsilon, 2\}$ oraz $x \in \mathbb{R}$.

Ponieważ $\tau_n(0) = 0$ i $\tau_n(\pi) = 0$ wystarczy pokazać, że (2.14) jest spełnione dla $0 < x < \pi$. Na początek pokażemy, że nierówność (2.14) jest spełniona dla $x = \frac{2l\pi}{r}$, gdzie l jest liczbą całkowitą, taką, że $0 < 2l < r$ dla $r \geq 3$. Wykorzystując (2.13) otrzymujemy

$$\left| \tau_n \left(\frac{2l\pi}{r} \right) \right| < \varepsilon.$$

Pokażemy teraz, że nierówność (2.14) jest spełniona dla $\frac{2l\pi}{r} < x \leq \frac{2l\pi}{r} + \frac{\pi}{r}$, gdzie $0 \leq 2l < r$. Niech $N^{\frac{1}{p}} := N^{\frac{1}{p}}(x) \geq r$ będzie liczbą naturalną taką, że

$$\frac{2l\pi}{r} + \frac{\pi}{(N+1)^{\frac{1}{p}}} < x \leq \frac{2l\pi}{r} + \frac{\pi}{N^{\frac{1}{p}}}. \quad (2.15)$$

Wtedy

$$\begin{aligned} \tau_n(x) &= \sum_{k=n}^{n+N^{\frac{1}{p}}-1} c_k \sin(kx) + \sum_{k=n+N^{\frac{1}{p}}}^{n+N} c_k \sin(kx) + \sum_{k=n+N+1}^{\infty} c_k \sin(kx) \\ &= \tau_n^{(1)}(x) + \tau_n^{(2)}(x) + \tau_n^{(3)}(x). \end{aligned}$$

Stosując twierdzenie Lagrange'a o wartości średniej do funkcji $f(x) = \sin(kx)$ w przedziale $\left[\frac{2l\pi}{r}, x\right]$ otrzymujemy, że dla dowolnego k istnieje liczba $y_k \in \left(\frac{2l\pi}{r}, x\right)$ taka, że

$$\sin(kx) - \sin\left(k\frac{2l\pi}{r}\right) = k \cos(ky_k) \left(x - \frac{2l\pi}{r}\right).$$

Zatem

$$\tau_n^{(1)}(x) = \sum_{k=n}^{n+N^{\frac{1}{p}}-1} k c_k \cos(ky_k) \left(x - \frac{2l\pi}{r}\right) + \sum_{k=n}^{n+N^{\frac{1}{p}}-1} c_k \sin\left(k\frac{2l\pi}{r}\right) = \tau_n^{(1.1)}(x) + \tau_n^{(1.2)}(x).$$

Korzystając z (2.13) otrzymujemy

$$\left| \tau_n^{(1.2)}(x) \right| < \varepsilon. \quad (2.16)$$

Dalej, z (2.15) oraz (2.12) możemy wywnioskować, że

$$\begin{aligned} \left| \tau_n^{(1.1)}(x) \right| &\leq \left(x - \frac{2l\pi}{r}\right) \sum_{k=n}^{n+N^{\frac{1}{p}}-1} k |c_k| \leq \left(x - \frac{2l\pi}{r}\right) \sum_{k=n}^{n+N^{\frac{1}{p}}-1} \frac{k \ln k}{\ln k} |c_k| \\ &< \left(x - \frac{2l\pi}{r}\right) \sum_{k=n}^{n+N^{\frac{1}{p}}-1} \frac{\varepsilon}{\ln k} \leq \frac{\pi \varepsilon}{\ln 2}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Wykorzystując Lemat 5 mamy

$$\left| \tau_n^{(2)}(x) \right| = \left| \sum_{k=n+N^{\frac{1}{p}}}^{n+N} c_k \sin(kx) \right| \leq \sum_{k=n+N^{\frac{1}{p}}}^{n+N} \frac{k \ln k}{k \ln k} |c_k| \ll \varepsilon \int_{n+N^{\frac{1}{p}}}^{n+N} \frac{1}{k \ln k} dk \leq \varepsilon \ln p. \quad (2.18)$$

Jeśli $\{c_k\}_{k=1}^{\infty} \in GM(p, 5\delta(q), r)$, to wykorzystując Lemat 3, otrzymujemy

$$\begin{aligned}
 |\tau_n^{(3)}(x)| &= \left| \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=2^j(n+N+1)}^{2^{j+1}(n+N+1)-1} c_k \sin(kx) \right| \\
 &\leq \sum_{j=0}^{\infty} \left| \frac{-1}{2 \sin(rx/2)} \left\{ \sum_{k=2^j(n+N+1)}^{2^{j+1}(n+N+1)-1} (c_k - c_{k+r}) \cos\left(k + \frac{r}{2}\right)x \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \sum_{k=2^{j+1}(n+N+1)}^{2^{j+1}(n+N+1)+r-1} c_k \cos\left(k - \frac{r}{2}\right)x - \sum_{k=2^j(n+N+1)}^{2^j(n+N+1)+r-1} c_k \cos\left(k - \frac{r}{2}\right)x \right\} \right| \\
 &\leq \frac{1}{2 |\sin(rx/2)|} \sum_{j=0}^{\infty} \left\{ \sum_{k=2^j(n+N+1)}^{2^{j+1}(n+N+1)-1} |c_k - c_{k+r}| + \sum_{k=2^{j+1}(n+N+1)}^{2^{j+1}(n+N+1)+r-1} |c_k| \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{k=2^j(n+N+1)}^{2^j(n+N+1)+r-1} |c_k| \right\}.
 \end{aligned}$$

Dalej, stosując nierówność Hölder'a z $p > 1$, nierówność $\frac{r}{\pi}x - 2l \leq \left| \sin \frac{rx}{2} \right|$ (gdy $x \in \left[\frac{2l\pi}{r}, \frac{2l\pi}{r} + \frac{\pi}{r} \right]$ oraz $0 \leq 2l < r$), (2.15) i (2.12), otrzymujemy

$$\begin{aligned}
 |\tau_n^{(3)}(x)| &\leq \frac{1}{\frac{r}{\pi}x - 2l} \sum_{j=0}^{\infty} \left\{ \left(\sum_{k=2^j(n+N+1)}^{2^{j+1}(n+N+1)-1} |c_k - c_{k+r}|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=2^j(n+N+1)}^{2^{j+1}(n+N+1)-1} 1 \right)^{1-\frac{1}{p}} \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{k=2^j(n+N+1)}^{2^j(n+N+1)+r-1} |c_k| + \sum_{k=2^{j+1}(n+N+1)}^{2^{j+1}(n+N+1)+r-1} |c_k| \right\} \\
 &\leq \frac{(N+1)^{\frac{1}{p}}}{r} \sum_{j=0}^{\infty} \left\{ \frac{C (2^j(n+N+1))^{1-\frac{1}{p}}}{2^j(n+N+1)} \sup_{m \geq b(2^j(n+N+1))} m \left(\frac{1}{m} \sum_{k=m}^{2m-1} |c_k|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{k=2^j(n+N+1)}^{2^j(n+N+1)+r-1} |c_k| + \sum_{k=2^{j+1}(n+N+1)}^{2^{j+1}(n+N+1)+r-1} |c_k| \right\} \\
 &= \frac{(N+1)^{\frac{1}{p}}}{r} \sum_{j=0}^{\infty} \left\{ \frac{C}{(2^j(n+N+1))^{\frac{1}{p}}} \sup_{m \geq b(2^j(n+N+1))} m^{1-\frac{1}{q}} \left(\sum_{k=m}^{2m-1} \left(\frac{k \ln k |c_k|}{k \ln k} \right)^q \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{k=2^j(n+N+1)}^{2^j(n+N+1)+r-1} \frac{k \ln k |c_k|}{k \ln k} + \sum_{k=2^{j+1}(n+N+1)}^{2^{j+1}(n+N+1)+r-1} \frac{k \ln k |c_k|}{k \ln k} \right\} \\
 &< \frac{\varepsilon(N+1)^{\frac{1}{p}}}{r} \sum_{j=0}^{\infty} \left\{ \frac{C}{(2^j(n+N+1))^{\frac{1}{p}}} \sup_{m \geq b(2^j(n+N+1))} m^{1-\frac{1}{q}} \left(\sum_{k=m}^{2m-1} \left(\frac{1}{k} \right)^q \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{k=2^j(n+N+1)}^{2^j(n+N+1)+r-1} \frac{1}{k} + \sum_{k=2^{j+1}(n+N+1)}^{2^{j+1}(n+N+1)+r-1} \frac{1}{k} \right\} \\
 &\leq \frac{\varepsilon(N+1)^{\frac{1}{p}}}{r} \sum_{j=0}^{\infty} \left\{ \frac{C}{(2^j(n+N+1))^{\frac{1}{p}}} \sup_{m \geq b(2^j(n+N+1))} \left(m^{1-\frac{1}{q}} m^{-1} m^{\frac{1}{q}} \right) \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{3}{2} r \left(2^j (n + N + 1) \right)^{-\frac{1}{p}} \Big\} \\
 & < \frac{\varepsilon (N + 1)^{\frac{1}{p}}}{r} \sum_{j=0}^{\infty} \left\{ \left(2^j (n + N + 1) \right)^{-\frac{1}{p}} \left(C + \frac{3}{2} r \right) \right\} \\
 & \leq \frac{\varepsilon (N + 1)^{\frac{1}{p}} \left(C + \frac{3}{2} r \right)}{r \left((n + N + 1) \right)^{\frac{1}{p}}} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{\frac{1}{p}}} \right)^j \\
 & \leq \frac{\varepsilon \left(C + \frac{3}{2} r \right)}{r} \frac{1}{1 - 2^{\frac{1}{p}}}.
 \end{aligned} \tag{2.19}$$

Pokażemy teraz, że nierówność (2.14) jest spełniona dla $\frac{2(l+1)\pi}{r} + \frac{\pi}{r} \leq x < \frac{2(l+1)\pi}{r}$, gdzie $0 < 2(l+1) \leq r$.

Niech $M^{\frac{1}{p}} := M^{\frac{1}{p}}(x) \geq r$ będzie liczbą naturalną taką, że

$$\frac{2(l+1)\pi}{r} - \frac{\pi}{M^{\frac{1}{p}}} \leq x < \frac{2(l+1)\pi}{r} - \frac{\pi}{(M+1)^{\frac{1}{p}}}. \tag{2.20}$$

Wtedy

$$\begin{aligned}
 \tau_n(x) &= \sum_{k=n}^{n+M^{\frac{1}{p}}-1} c_k \sin(kx) + \sum_{k=n+M^{\frac{1}{p}}}^{n+M} c_k \sin(kx) + \sum_{k=n+M+1}^{\infty} c_k \sin(kx) \\
 &= \tau_n^{(4)}(x) + \tau_n^{(5)}(x) + \tau_n^{(6)}(x).
 \end{aligned}$$

Stosując twierdzenie Lagrange'a o wartości średniej do funkcji $f(x) = \sin(kx)$ w przedziale $\left[x, \frac{2(l+1)\pi}{r}\right]$ otrzymujemy, że dla dowolnego k istnieje liczba $z_k \in \left(x, \frac{2(l+1)\pi}{r}\right)$ taka, że

$$\sin\left(k \frac{2(l+1)\pi}{r}\right) - \sin(kx) = k \cos(kz_k) \left(\frac{2(l+1)\pi}{r} - x\right).$$

Stąd

$$\begin{aligned}
 \tau_n^{(4)}(x) &= \sum_{k=n}^{n+M^{\frac{1}{p}}-1} k c_k \cos(kz_k) \left(\frac{2(l+1)\pi}{r} - x\right) + \sum_{k=n}^{n+M^{\frac{1}{p}}-1} c_k \sin\left(k \frac{2(l+1)\pi}{r}\right) \\
 &= \tau_n^{(4.1)}(x) + \tau_n^{(4.2)}(x).
 \end{aligned}$$

Z (2.13) mamy

$$\left| \tau_n^{(4.2)}(x) \right| < \varepsilon. \tag{2.21}$$

Korzystając z (2.20) oraz (2.12) dostajemy

$$\left| \tau_n^{(4.1)}(x) \right| \leq \left(\frac{2(l+1)\pi}{r} - x\right) \sum_{k=n}^{n+M^{\frac{1}{p}}-1} k |c_k| \leq \frac{\pi}{M^{\frac{1}{p}}} \sum_{k=n}^{n+M^{\frac{1}{p}}-1} \frac{k \ln k}{\ln k} |c_k| \leq \frac{\pi \varepsilon}{\ln 2}. \tag{2.22}$$

Z Lematu 5 otrzymujemy

$$\left| \tau_n^{(5)}(x) \right| = \left| \sum_{k=n+M^{\frac{1}{p}}}^{n+M} c_k \sin(kx) \right| \leq \sum_{k=n+M^{\frac{1}{p}}}^{n+M} \frac{k \ln k}{k \ln k} |c_k| \leq \varepsilon \int_{n+M^{\frac{1}{p}}}^{n+M} \frac{1}{k \ln k} dk \leq \varepsilon \ln p. \tag{2.23}$$

Jeśli $\{c_k\}_{k=1}^{\infty} \in GM(p, 5\delta(q), r)$, to stosując Lemat 3, dostajemy

$$\begin{aligned}
 |\tau_n^{(6)}(x)| &= \left| \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=2^j(n+M+1)}^{2^{j+1}(n+M+1)-1} c_k \sin(kx) \right| \\
 &\leq \sum_{j=0}^{\infty} \left| \frac{-1}{2 \sin(rx/2)} \left\{ \sum_{k=2^j(n+M+1)}^{2^{j+1}(n+M+1)-1} (c_k - c_{k+r}) \cos\left(\left(k + \frac{r}{2}\right)x\right) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \sum_{k=2^{j+1}(n+M+1)}^{2^{j+1}(n+M+1)+r-1} c_k \cos\left(k - \frac{r}{2}\right)x - \sum_{k=2^j(n+M+1)}^{2^j(n+M+1)+r-1} c_k \cos\left(\left(k - \frac{r}{2}\right)x\right) \right\} \right| \\
 &\leq \frac{1}{2 |\sin(rx/2)|} \sum_{j=0}^{\infty} \left\{ \sum_{k=2^j(n+M+1)}^{2^{j+1}(n+M+1)-1} |c_k - c_{k+r}| + \sum_{k=2^{j+1}(n+M+1)}^{2^{j+1}(n+M+1)+r-1} |c_k| \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{k=2^j(n+M+1)}^{2^j(n+M+1)+r-1} |c_k| \right\}.
 \end{aligned}$$

Dalej, stosując nierówność Hölder'a z $p > 1$, nierówność $2(l+1) - \frac{rc}{\pi}x \leq \left|\sin \frac{rx}{2}\right|$ (gdy $x \in \left[\frac{2l\pi}{r} + \frac{\pi}{r}, \frac{2(l+1)\pi}{r}\right]$ oraz $0 < 2(l+1) \leq r$), (2.15) i (2.12), otrzymujemy

$$\begin{aligned}
 |\tau_n^{(6)}(x)| &\leq \frac{1}{2(l+1) - \frac{rc}{\pi}x} \sum_{j=0}^{\infty} \left\{ \left(\sum_{k=2^j(n+M+1)}^{2^{j+1}(n+M+1)-1} |c_k - c_{k+r}|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=2^j(n+M+1)}^{2^{j+1}(n+M+1)-1} 1 \right)^{1-\frac{1}{p}} \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{k=2^j(n+M+1)}^{2^j(n+M+1)+r-1} |c_k| + \sum_{k=2^{j+1}(n+M+1)}^{2^{j+1}(n+M+1)+r-1} |c_k| \right\} \\
 &\leq \frac{(M+1)^{\frac{1}{p}}}{r} \sum_{j=0}^{\infty} \left\{ \frac{C (2^j(n+M+1))^{1-\frac{1}{p}}}{2^j(n+M+1)} \sup_{m \geq b(2^j(n+M+1))} m \left(\frac{1}{m} \sum_{k=m}^{2m-1} |c_k|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{k=2^j(n+M+1)}^{2^j(n+M+1)+r-1} |c_k| + \sum_{k=2^{j+1}(n+M+1)}^{2^{j+1}(n+M+1)+r-1} |c_k| \right\} \\
 &= \frac{(M+1)^{\frac{1}{p}}}{r} \sum_{j=0}^{\infty} \left\{ \frac{C}{(2^j(n+M+1))^{\frac{1}{p}}} \sup_{m \geq b(2^j(n+M+1))} m^{1-\frac{1}{q}} \left(\sum_{k=m}^{2m-1} \left(\frac{k \ln k |c_k|}{k \ln k} \right)^q \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{k=2^j(n+M+1)}^{2^j(n+M+1)+r-1} \frac{k \ln k |c_k|}{k \ln k} + \sum_{k=2^{j+1}(n+M+1)}^{2^{j+1}(n+M+1)+r-1} \frac{k \ln k |c_k|}{k \ln k} \right\}. \\
 &< \frac{\varepsilon(M+1)^{\frac{1}{p}}}{r} \sum_{j=0}^{\infty} \left\{ \frac{C}{(2^j(n+M+1))^{\frac{1}{p}}} \sup_{m \geq b(2^j(n+M+1))} m^{1-\frac{1}{q}} \left(\sum_{k=m}^{2m-1} \left(\frac{1}{k} \right)^q \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{k=2^j(n+M+1)}^{2^j(n+M+1)+r-1} \frac{1}{k} + \sum_{k=2^{j+1}(n+M+1)}^{2^{j+1}(n+M+1)+r-1} \frac{1}{k} \right\} \\
 |\tau_n^{(6)}(x)| &< \frac{\varepsilon(M+1)^{\frac{1}{p}}}{r} \sum_{j=0}^{\infty} \left\{ \frac{C}{(2^j(n+M+1))^{\frac{1}{p}}} \sup_{m \geq b(2^j(n+M+1))} \left(m^{1-\frac{1}{q}} m^{-1} m^{\frac{1}{q}} \right) \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & +r \left(2^j(n+M+1) \right)^{-\frac{1}{p}} + \frac{1}{2}r \left(2^j(n+M+1) \right)^{-\frac{1}{p}} \Big\} \\
 & \leq \frac{\varepsilon(M+1)^{\frac{1}{p}}}{r} \sum_{j=0}^{\infty} \left\{ \left(2^j(n+M+1) \right)^{-\frac{1}{p}} \left(C + \frac{3}{2}r \right) \right\} \\
 & \leq \frac{\varepsilon(M+1)^{\frac{1}{p}} \left(C + \frac{3}{2}r \right)}{r \left((n+M+1) \right)^{\frac{1}{p}}} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{\frac{1}{p}}} \right)^j \leq \frac{\varepsilon \left(C + \frac{3}{2}r \right)}{r} \frac{1}{1 - 2^{-\frac{1}{p}}}.
 \end{aligned} \tag{2.24}$$

Łącząc uzyskane oszacowania: (2.16), (2.17), (2.18), (2.19), (2.21), (2.23), (2.22), (2.24) otrzymujemy, że szereg (2.7) jest zbieżny jednostajnie. To kończy dowód twierdzenia. $\square$

Przedstawiona zostanie teraz uwaga, która pokazuje, że (2.10) nie może być warunkiem dostatecznym zbieżności szeregu (2.7), gdy $\{c_k\}_{k=1}^{\infty} \in GM(p, {}_5\delta, 3)$ dla $p > 1$.

Uwaga 11. [16] Istnieje $x_0 \in \mathbb{R}$ oraz ciąg $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$, który należy do klasy $GM(p, {}_5\delta, 3)$ dla $p > 1$ oraz nie należy do klasy $GM(1, {}_5\delta, 3)$ i spełnia warunek (2.10), dla którego szereg (2.7) jest rozbieżny w x_0 .

Dowód. Niech $p > 1$ oraz niech dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$

$$c_n = \begin{cases} \frac{3}{n \ln(n+1)}, & \text{jeśli } n = 1 \pmod{3}, \\ \frac{1}{n \ln(n+1)}, & \text{jeśli } n = 2 \pmod{3}, \\ \frac{1}{n \ln(n+1)}, & \text{jeśli } n = 0 \pmod{3} \text{ i } n \neq 0 \pmod{6}, \\ \frac{1}{(n-3) \ln(n-2)} + \frac{1}{n^{1+\frac{1}{p}} \ln(n+1)}, & \text{jeśli } n = 0 \pmod{6}. \end{cases}$$

Oczywiście ciąg $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ spełnia warunek (2.10).

Na początek pokażemy, że $\{c_k\}_{k=1}^{\infty} \in GM(p, {}_5\delta, 3)$. Niech

$$\begin{aligned}
 A_n &= \{k \in \mathbb{N} : n \leq k \leq 2n-1 \text{ oraz } k = 1 \pmod{3}\}, \\
 B_n &= \{k \in \mathbb{N} : n \leq k \leq 2n-1 \text{ oraz } k = 2 \pmod{3}\}, \\
 C_n &= \{k \in \mathbb{N} : n \leq k \leq 2n-1 \text{ oraz } k = 0 \pmod{3} \text{ oraz } k \neq 0 \pmod{6}\}, \\
 D_n &= \{k \in \mathbb{N} : n \leq k \leq 2n-1 \text{ oraz } k = 0 \pmod{6}\}.
 \end{aligned} \tag{2.25}$$

Wykorzystując (2.25), otrzymujemy

$$\begin{aligned}
 \left\{ \sum_{k=n}^{2n-1} |c_k - c_{k+3}|^p \right\}^{\frac{1}{p}} &= \left\{ \sum_{k \in A_n} |c_k - c_{k+3}|^p + \sum_{k \in B_n} |c_k - c_{k+3}|^p + \sum_{k \in C_n} |c_k - c_{k+3}|^p \right. \\
 &+ \sum_{k \in D_n} |c_k - c_{k+3}|^p \Big\}^{\frac{1}{p}} = \left\{ \sum_{k \in A_n} \left| \frac{3}{k \ln(k+1)} - \frac{3}{(k+3) \ln(k+4)} \right|^p \right. \\
 &+ \sum_{k \in B_n} \left| \frac{1}{k \ln(k+1)} - \frac{1}{(k+3) \ln(k+1)} \right|^p \\
 &+ \sum_{k \in C_n} \left| \frac{1}{k \ln(k+1)} - \frac{1}{k \ln(k+1)} - \frac{1}{(k+3)^{1+\frac{1}{p}} \ln(k+4)} \right|^p \\
 &+ \sum_{k \in D_n} \left| \frac{1}{(k-3) \ln(k-2)} + \frac{1}{k^{1+\frac{1}{p}} \ln(k+1)} - \frac{1}{(k+3) \ln(k+4)} \right|^p \Big\}^{\frac{1}{p}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\leq \left\{ \sum_{k \in A_n} 3^p \left| \frac{1}{k \ln(k+1)} - \frac{1}{(k+3) \ln(k+4)} \right|^p + \sum_{k \in B_n} \left| \frac{1}{k \ln(k+1)} - \frac{1}{(k+3) \ln(k+1)} \right|^p \right. \\
 &+ \sum_{k \in C_n} \left| \frac{1}{(k+3)^{1+\frac{1}{p}} \ln(k+4)} \right|^p \\
 &\left. + \sum_{k \in D_n} \left(\left| \frac{1}{(k-3) \ln(k-2)} - \frac{1}{(k+3) \ln(k+4)} + \frac{1}{k^{1+\frac{1}{p}} \ln(k+1)} \right| \right)^p \right\}^{\frac{1}{p}}.
 \end{aligned}$$

Korzystając z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej i wykonując elementarne przekształcenia, mamy

$$\begin{aligned}
 \left\{ \sum_{k=n}^{2n-1} |c_k - c_{k+3}|^p \right\}^{\frac{1}{p}} &\leq \left\{ \sum_{k \in A_n} 3^p \left(\frac{6}{k^2 \ln(k+1)} \right)^p + \sum_{k \in B_n} \left(\frac{6}{k^2 \ln(k+1)} \right)^p \right. \\
 &+ \sum_{k \in C_n} \left(\frac{1}{k^{1+\frac{1}{p}} \ln(k+1)} \right)^p + \sum_{k \in D_n} \left(\frac{48}{k^2 \ln(k+1)} + \frac{1}{k^{1+\frac{1}{p}} \ln(k+1)} \right)^p \left. \right\}^{\frac{1}{p}} \\
 &\leq 49 \left\{ \sum_{k=n}^{2n-1} \left(\frac{1}{k^{1+\frac{1}{p}} \ln(k+1)} \right)^p \right\}^{\frac{1}{p}} \leq 49 \frac{1}{n^{1+\frac{1}{p}} \ln(n+1)} n^{\frac{1}{p}} = 49 \frac{1}{n \ln(n+1)} \\
 &\leq 147 \frac{1}{n} \sum_{k=n}^{2n} |c_n| \leq \frac{147}{n} \sup_{m \geq b(n)} \sum_{k=m}^{2m} |c_k|.
 \end{aligned}$$

Zatem $\{c_k\}_{k=1}^{\infty} \in GM(p, {}_5\delta, 3)$.

Pokażemy teraz, że $\{c_k\}_{k=1}^{\infty} \notin GM(1, {}_5\delta, 3)$. Korzystając z definicji ciągu $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ otrzymujemy

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=n}^{2n-1} |c_k - c_{k+3}| &\geq \sum_{k \in C_n} |c_k - c_{k+3}| = \sum_{k \in C_n} \left| \frac{1}{k \ln(k+1)} - \frac{1}{k \ln(k+1)} - \frac{1}{(k+3)^{1+\frac{1}{p}} \ln(k+4)} \right| \\
 &= \sum_{k \in C_n} \frac{1}{(k+3)^{1+\frac{1}{p}} \ln(k+4)} \geq \frac{1}{(2n+2)^{1+\frac{1}{p}} \ln(2n+3)} \frac{n}{12} \geq \frac{1}{48(2n+2)^{\frac{1}{p}} \ln(2n+3)}.
 \end{aligned}$$

Z drugiej strony mamy

$$\frac{1}{n} \sup_{m \geq b(n)} \sum_{k=m}^{2m} |c_k| \leq \frac{1}{n}.$$

Zatem dla $p > 1$ nierówność

$$\sum_{k=n}^{2n-1} |c_k - c_{k+3}| \leq \frac{C}{n} \sup_{m \geq b(n)} \sum_{k=m}^{2m} |c_k|$$

nie może być spełniona, gdy $n \rightarrow \infty$.

Pokażemy teraz, że szereg (2.7) jest rozbieżny w $x_0 = \frac{2}{3}\pi$

$$\sum_{k=1}^{6N+5} c_k \sin(kx_0) = c_1 \sin\left(\frac{2}{3}\pi\right) + c_2 \sin\left(2\frac{2}{3}\pi\right) + c_3 \sin\left(3\frac{2}{3}\pi\right) + c_4 \sin\left(4\frac{2}{3}\pi\right) + c_5 \sin\left(5\frac{2}{3}\pi\right)$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{k=1}^N \sum_{l=0}^5 c_{6k+l} \sin((6k+l)\frac{2}{3}\pi) = \sum_{k=0}^N \left(c_{6k+1} \sin((6k+1)\frac{2}{3}\pi) \right. \\
 & + c_{6k+2} \sin((6k+2)\frac{2}{3}\pi) + c_{6k+3} \sin((6k+3)\frac{2}{3}\pi) + c_{6k+4} \sin((6k+4)\frac{2}{3}\pi) \\
 & \left. + c_{6k+5} \sin((6k+5)\frac{2}{3}\pi) \right) = \sum_{k=0}^N \left(c_{6k+1} \sin(4k\pi + \frac{2}{3}\pi) + c_{6k+2} \sin(4k\pi + \frac{4}{3}\pi) \right. \\
 & + c_{6k+3} \sin(4k\pi + 2\pi) + c_{6k+4} \sin(4k\pi + \frac{8}{3}\pi) + c_{6k+5} \sin(4k\pi + \frac{10}{3}\pi) \left. \right) \\
 & = \sum_{k=0}^N \left(c_{6k+1} \sin(\frac{2}{3}\pi) + c_{6k+2} \sin(\frac{4}{3}\pi) + c_{6k+4} \sin(\frac{2}{3}\pi) + c_{6k+5} \sin(\frac{4}{3}\pi) \right) \\
 & = \sum_{k=0}^N \left(c_{6k+1} \sin(\frac{2}{3}\pi) + c_{6k+2} \left(-\sin(\frac{2}{3}\pi) \right) + c_{6k+4} \sin(\frac{2}{3}\pi) + c_{6k+5} \left(-\sin(\frac{2}{3}\pi) \right) \right) \\
 & = \sin(\frac{2}{3}\pi) \sum_{k=0}^N [(c_{6k+1} - c_{6k+2}) + (c_{6k+4} - c_{6k+5})] \\
 & = \sin(\frac{2}{3}\pi) \sum_{k=0}^N \left[\left(\frac{3}{(6k+1)\ln(6k+2)} - \frac{1}{(6k+2)\ln(6k+3)} \right) \right. \\
 & + \left. \left(\frac{3}{(6k+4)\ln(6k+5)} - \frac{1}{(6k+5)\ln(6k+6)} \right) \right] \\
 & \geq \sin(\frac{2}{3}\pi) \sum_{k=0}^N \left[\left(\frac{3}{(6k+2)\ln(6k+2)} - \frac{1}{(6k+2)\ln(6k+2)} \right) \right. \\
 & + \left. \left(\frac{3}{(6k+5)\ln(6k+5)} - \frac{1}{(6k+5)\ln(6k+5)} \right) \right] \\
 & = \sin(\frac{2}{3}\pi) \sum_{k=0}^N \left(\frac{2}{(6k+2)\ln(6k+2)} + \frac{2}{(6k+5)\ln(6k+5)} \right) \\
 & \geq 4\sin(\frac{2}{3}\pi) \sum_{k=0}^N \frac{1}{(6k+5)\ln(6k+5)} \rightarrow \infty, \text{ gdy } N \rightarrow \infty. \tag{2.26}
 \end{aligned}$$

To kończy dowód. □

Zostanie teraz sformułowane twierdzenie podające warunek dostateczny jednostajnej zbieżności szeregu (2.8) pochodzące ze wspólnej pracy z B. Szaleń [16].

Twierdzenie 12. [16] Niech szereg $\{d_k\}_{k=1}^{\infty} \in GM(p, {}_5\delta(q), r)$, $q \geq 1$, $p > 1$, $r \in \mathbb{N}$ oraz

$$\sum_{k=1}^{\infty} d_k \cos\left(\frac{2l\pi}{r}k\right) < \infty, \tag{2.27}$$

dla dowolnego $l \in \{0, 1, \dots, [\frac{r}{2}]\}$. Jeśli

$$n \ln n |d_n| \rightarrow 0 \text{ gdy } n \rightarrow \infty, \tag{2.28}$$

to szereg (2.8) jest zbieżny jednostajnie.

Dowód. Niech $\epsilon > 0$. Wykorzystując warunek (2.28) oraz (2.27) otrzymujemy:

$$n \ln n |d_n| < \epsilon \quad (2.29)$$

oraz

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=n}^{\infty} d_k \cos\left(k \frac{2l\pi}{r}\right) \right| &< \epsilon, \\ \left| \sum_{k=n}^{n+N} d_k \cos\left(k \frac{2l\pi}{r}\right) \right| &< \epsilon \end{aligned} \quad (2.30)$$

dla dowolnego $n > N_\epsilon$ i $N \in \mathbb{N}$, gdzie $l \in \left\{0, 1, \dots, \left[\frac{r}{2}\right]\right\}$. Oznaczmy przez

$$\tau_n(x) = \sum_{k=n}^{\infty} d_k \cos(kx).$$

Pokażemy, że

$$|\tau_n(x)| \ll \epsilon \quad (2.31)$$

dla dowolnego $n \geq \max\{N_\epsilon, 2\}$ oraz $x \in \mathbb{R}$.

Na początek pokażemy, że nierówność (2.31) jest spełniona dla $x = \frac{2l\pi}{r}$, gdzie l jest liczbą całkowitą, taką, że $0 \leq 2l \leq r$. Wykorzystując (2.30) otrzymujemy

$$\left| \tau_n\left(\frac{2l\pi}{r}\right) \right| < \epsilon.$$

Pokażemy teraz, że nierówność (2.31) jest spełniona dla $\frac{2l\pi}{r} < x \leq \frac{2l\pi}{r} + \frac{\pi}{r}$, gdzie $0 \leq 2l < r$. Niech $N^{\frac{1}{p}} := N^{\frac{1}{p}}(x) \geq r$ będzie liczbą naturalną taką, że

$$\frac{2l\pi}{r} + \frac{\pi}{(N+1)^{\frac{1}{p}}} < x \leq \frac{2l\pi}{r} + \frac{\pi}{N^{\frac{1}{p}}}. \quad (2.32)$$

Wtedy

$$\begin{aligned} \tau_n(x) &= \sum_{k=n}^{n+N^{\frac{1}{p}}-1} d_k \cos(kx) + \sum_{k=n+N^{\frac{1}{p}}}^{n+N} d_k \cos(kx) + \sum_{k=n+N+1}^{\infty} d_k \cos(kx) \\ &= \tau_n^{(1)}(x) + \tau_n^{(2)}(x) + \tau_n^{(3)}(x). \end{aligned}$$

Stosując twierdzenie Lagrange'a o wartości średniej do funkcji $f(x) = \cos(kx)$ w przedziale $\left[\frac{2l\pi}{r}, x\right]$ otrzymujemy, że dla dowolnego k istnieje liczba $y_k \in \left(\frac{2l\pi}{r}, x\right)$ taka, że

$$\cos(kx) - \cos\left(k \frac{2l\pi}{r}\right) = -k \sin(ky_k) \left(x - \frac{2l\pi}{r}\right).$$

Wykorzystując powyższą tożsamość dostajemy

$$\tau_n^{(1)}(x) = - \sum_{k=n}^{n+N^{\frac{1}{p}}-1} k d_k \sin(ky_k) \left(x - \frac{2l\pi}{r}\right) + \sum_{k=n}^{n+N^{\frac{1}{p}}-1} d_k \cos\left(k \frac{2l\pi}{r}\right) = \tau_n^{(1.1)}(x) + \tau_n^{(1.2)}(x).$$

Korzystając z (2.30) otrzymujemy

$$\left| \tau_n^{(1,2)}(x) \right| < \varepsilon. \quad (2.33)$$

Dalej, z (2.32) oraz (2.28) mamy

$$\begin{aligned} \left| \tau_n^{(1,1)}(x) \right| &\leq \left(x - \frac{2l\pi}{r} \right) \sum_{k=n}^{n+N^{\frac{1}{p}}-1} k |d_k| \leq \left(x - \frac{2l\pi}{r} \right) \sum_{k=n}^{n+N^{\frac{1}{p}}-1} \frac{k \ln k}{\ln k} |d_k| \\ &< \left(x - \frac{2l\pi}{r} \right) \sum_{k=n}^{n+N^{\frac{1}{p}}-1} \frac{\varepsilon}{\ln k} \leq \frac{\pi \varepsilon}{\ln 2}. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Wykorzystując Lemat 5 mamy

$$\left| \tau_n^{(2)}(x) \right| = \left| \sum_{k=n+N^{\frac{1}{p}}}^{n+N} d_k \cos(kx) \right| \leq \sum_{k=n+N^{\frac{1}{p}}}^{n+N} \frac{k \ln k}{k \ln k} |d_k| \ll \varepsilon \int_{n+N^{\frac{1}{p}}}^{n+N} \frac{1}{k \ln k} dk \leq \varepsilon \ln p. \quad (2.35)$$

Jeśli $\{d_k\}_{k=1}^{\infty} \in GM(p, {}_5\delta(q), r)$, to wykorzystując Lemat 3, otrzymujemy

$$\begin{aligned} \left| \tau_n^{(3)}(x) \right| &= \left| \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=2^j(n+N+1)}^{2^{j+1}(n+N+1)-1} d_k \cos(kx) \right| \\ &\leq \sum_{j=0}^{\infty} \left| \frac{1}{2 \sin(rx/2)} \left\{ \sum_{k=2^j(n+N+1)}^{2^{j+1}(n+N+1)-1} (d_k - d_{k+r}) \sin\left(k + \frac{r}{2}\right)x \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \sum_{k=2^{j+1}(n+N+1)}^{2^{j+1}(n+N+1)+r-1} d_k \sin\left(k - \frac{r}{2}\right)x + \sum_{k=2^j(n+N+1)}^{2^j(n+N+1)+r-1} d_k \sin\left(k - \frac{r}{2}\right)x \right\} \right| \\ &\leq \frac{1}{2 |\sin(rx/2)|} \sum_{j=0}^{\infty} \left\{ \sum_{k=2^j(n+N+1)}^{2^{j+1}(n+N+1)-1} |d_k - d_{k+r}| + \sum_{k=2^{j+1}(n+N+1)}^{2^{j+1}(n+N+1)+r-1} |d_k| \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=2^j(n+N+1)}^{2^j(n+N+1)+r-1} |d_k| \right\}. \end{aligned}$$

Dalej, analogicznie jak w (2.19), stosując nierówność Hölder'a z $p > 1$, nierówność $\frac{r}{\pi}x - 2l \leq \left| \sin \frac{rx}{2} \right|$ (gdy $x \in \left[\frac{2l\pi}{r}, \frac{2l\pi}{r} + \frac{\pi}{r} \right]$ oraz $0 \leq 2l < r$), (2.32) i (2.28), otrzymujemy

$$\begin{aligned} \left| \tau_n^{(3)}(x) \right| &\leq \frac{1}{\frac{r}{\pi}x - 2l} \sum_{j=0}^{\infty} \left\{ \left(\sum_{k=2^j(n+N+1)}^{2^{j+1}(n+N+1)-1} |d_k - d_{k+r}|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=2^j(n+N+1)}^{2^{j+1}(n+N+1)-1} 1 \right)^{1-\frac{1}{p}} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=2^j(n+N+1)}^{2^j(n+N+1)+r-1} |d_k| + \sum_{k=2^{j+1}(n+N+1)}^{2^{j+1}(n+N+1)+r-1} |d_k| \right\} \\ &\leq \frac{\varepsilon \left(C + \frac{3}{2}r \right)}{r} \frac{1}{1 - 2^{\frac{1}{p}}}. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Pokażemy teraz, że nierówność (2.31) jest spełniona dla $\frac{2l\pi}{r} + \frac{\pi}{r} \leq x < \frac{2(l+1)\pi}{r}$, gdzie $0 < 2(l+1) \leq r$.

Niech $M^{\frac{1}{p}} := M^{\frac{1}{p}}(x) \geq r$ będzie liczbą naturalną taką, że

$$\frac{2(l+1)\pi}{r} - \frac{\pi}{M^{\frac{1}{p}}} \leq x < \frac{2(l+1)\pi}{r} - \frac{\pi}{(M+1)^{\frac{1}{p}}}. \quad (2.37)$$

Wtedy

$$\begin{aligned} \tau_n(x) &= \sum_{k=n}^{n+M^{\frac{1}{p}}-1} d_k \cos(kx) + \sum_{k=n+M^{\frac{1}{p}}}^{n+M} d_k \cos(kx) + \sum_{k=n+M+1}^{\infty} d_k \cos(kx) \\ &= \tau_n^{(4)}(x) + \tau_n^{(5)}(x) + \tau_n^{(6)}(x). \end{aligned}$$

Stosując twierdzenie Lagrange'a o wartości średniej do funkcji $f(x) = \cos(kx)$ w przedziale $[x, \frac{2(l+1)\pi}{r}]$ otrzymujemy, że dla dowolnego k istnieje liczba $z_k \in (x, \frac{2(l+1)\pi}{r})$ taka, że

$$\cos\left(k \frac{2(l+1)\pi}{r}\right) - \cos(kx) = -k \sin(kz_k) \left(\frac{2(l+1)\pi}{r} - x\right).$$

Wykorzystując powyższe otrzymujemy

$$\begin{aligned} \tau_n^{(4)}(x) &= - \sum_{k=n}^{n+M^{\frac{1}{p}}-1} k d_k \sin(kz_k) \left(\frac{2(l+1)\pi}{r} - x\right) + \sum_{k=n}^{n+M^{\frac{1}{p}}-1} d_k \cos\left(k \frac{2(l+1)\pi}{r}\right) \\ &= \tau_n^{(4.1)}(x) + \tau_n^{(4.2)}(x). \end{aligned}$$

Z (2.30) mamy

$$|\tau_n^{(4.2)}(x)| < \varepsilon. \quad (2.38)$$

Korzystając z (2.37) oraz (2.28) dostajemy

$$|\tau_n^{(4.1)}(x)| \leq \left(\frac{2(l+1)\pi}{r} - x\right) \sum_{k=n}^{n+M^{\frac{1}{p}}-1} k |d_k| \leq \frac{\pi}{M^{\frac{1}{p}}} \sum_{k=n}^{n+M^{\frac{1}{p}}-1} \frac{k \ln k}{\ln k} |d_k| < \frac{\pi \varepsilon}{\ln 2}. \quad (2.39)$$

Korzystając z Lematu 5 otrzymujemy

$$|\tau_n^{(5)}(x)| = \left| \sum_{k=n+M^{\frac{1}{p}}}^{n+M} d_k \cos(kx) \right| \leq \sum_{k=n+M^{\frac{1}{p}}}^{n+M} \frac{k \ln k}{k \ln k} |d_k| < \varepsilon \int_{n+M^{\frac{1}{p}}}^{n+M} \frac{1}{k \ln k} dk \leq \varepsilon \ln p. \quad (2.40)$$

Jeśli $\{d_k\}_{k=1}^{\infty} \in GM(p, \delta, r)$, to wykorzystując Lemat 3, otrzymujemy

$$\begin{aligned} |\tau_n^{(6)}(x)| &= \left| \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=2^j(n+M+1)}^{2^{j+1}(n+M+1)-1} d_k \sin(kx) \right| \\ &\leq \frac{1}{2 |\sin(rx/2)|} \sum_{j=0}^{\infty} \left\{ \sum_{k=2^j(n+M+1)}^{2^{j+1}(n+M+1)-1} |d_k - d_{k+r}| + \sum_{k=2^{j+1}(n+M+1)}^{2^{j+1}(n+M+1)+r-1} |d_k| \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=2^j(n+M+1)}^{2^j(n+M+1)+r-1} |d_k| \right\}. \end{aligned}$$

Dalej, analogicznie jak w (2.24), stosując nierówność $2(l+1) - \frac{rc}{\pi}x \leq \left| \sin \frac{rx}{2} \right|$, nierówność Hölder'a z $p > 1$, (gdy $x \in \left[\frac{2l\pi}{r} + \frac{\pi}{r}, \frac{2(l+1)\pi}{r} \right]$ oraz $0 < 2(l+1) \leq r$), (2.15) i (2.12), otrzymujemy

$$\begin{aligned} |\tau_n^{(6)}(x)| &\leq \frac{1}{2(l+1) - \frac{rc}{\pi}x} \sum_{j=0}^{\infty} \left\{ \left(\sum_{k=2^j(n+M+1)}^{2^{j+1}(n+M+1)-1} |d_k - d_{k+r}|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=2^j(n+M+1)}^{2^{j+1}(n+M+1)-1} 1 \right)^{1-\frac{1}{p}} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=2^j(n+M+1)}^{2^j(n+M+1)+r-1} |d_k| + \sum_{k=2^{j+1}(n+M+1)}^{2^{j+1}(n+M+1)+r-1} |d_k| \right\} \\ &< \frac{\varepsilon \left(C + \frac{3}{2}r \right)}{r} \frac{1}{1 - 2^{\frac{1}{p}}}. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Łącząc uzyskane oszacowania: (2.33), (2.34), (2.35), (2.36), (2.38), (2.39), (2.40), (2.41) otrzymujemy, że szereg (2.8) jest zbieżny jednostajnie. Co kończy dowód twierdzenia. $\square$

Poniższa uwaga pokazuje, że warunek (2.27) nie gwarantuje zbieżności bezwzględnej szeregu $\sum_{k=1}^{\infty} d_k$. Zatem w tym przypadku nie można zastosować kryterium Weierstrassa zbieżności szeregów funkcyjnych.

Uwaga 13. Jeżeli szereg $\sum_{k=1}^{\infty} d_k$ jest bezwzględnie zbieżny, to warunek (2.27) jest spełniony. Ponadto, odwrotna implikacja nie jest prawdziwa.

Dowód. Niech $r \in \mathbb{N}$ i $l \in \{0, 1, \dots, [\frac{r}{2}]\}$, oraz $d_k = a_k b_k$ dla $k \in \mathbb{N}$, gdzie

$$a_k = \frac{1}{k \ln(k+1) \ln(\ln(k+1))}, \quad (2.42)$$

$$b_k = \begin{cases} 1, & \text{gdy } k = 2ri + 1, \dots, 2ri + r, \\ -1, & \text{gdy } k = 2ri + r + 1, \dots, 2ri + 2r, \end{cases} \quad \text{dla } i \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Pierwsza implikacja jest prawdziwa, ponieważ $\left| \cos\left(\frac{2l\pi}{r}k\right) \right| \leq 1$ dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$. Pokażemy teraz, że odwrotna implikacja nie jest prawdziwa.

Niech $n \in \mathbb{N}$. Wtedy istnieje liczba $m \in \mathbb{N}$ taka, że $2rm \leq n \leq 2r(m+1)$ oraz

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^n b_k \cos\left(\frac{2l\pi}{r}k\right) \right| &= \left| \sum_{k=1}^{2rm} b_k \cos\left(\frac{2l\pi}{r}k\right) \right| + \left| \sum_{k=2rm+1}^n b_k \cos\left(\frac{2l\pi}{r}k\right) \right| \\ &= \left| \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^{2r} b_{2r(k-1)+i} \cos\left(\frac{2l\pi}{r}(2r(k-1)+i)\right) \right| + \sum_{k=2rm+1}^n 1 \\ &= \left| \sum_{k=1}^m \left(\sum_{i=1}^r b_{2r(k-1)+i} \cos\left(\frac{2l\pi}{r}i\right) + \sum_{i=r+1}^{2r} b_{2r(k-1)+i} \cos\left(\frac{2l\pi}{r}i\right) \right) \right| + (n - 2rm) \\ &= \left| \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^r \left(\cos\left(\frac{2l\pi}{r}i\right) - \cos\left(\frac{2l\pi}{r}(i+r)\right) \right) \right| + n - 2rm \leq 2r. \end{aligned}$$

Zatem wykorzystując kryterium Dirichleta zbieżności szeregów otrzymujemy, że

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k \cos\left(\frac{2l\pi}{r}k\right) < \infty, \text{ bo } \{a_k\}_{k=1}^{\infty} \text{ jest malejący i } a_k \rightarrow 0, \text{ gdy } k \rightarrow \infty.$$

Ponadto

$$\sum_{k=1}^n |d_k| = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k \ln(k+1) \ln(\ln(k+1))} \rightarrow \infty, \text{ gdy } n \rightarrow \infty.$$

To kończy dowód. □

Analogicznie wykorzystując ciąg (2.42) można pokazać, że warunek (2.11) dla $r \geq 3$ nie gwarantuje zbieżności jednostajnej szeregu $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$.

Twierdzenia 10 i 12 podają warunki dostateczne zbieżności jednostajnej odpowiednio szeregu sinusów i szeregu cosinusów, gdy współczynniki tych szeregów tworzą ciągi należące do klasy $GM(p, {}_5\delta(q), r)$ dla $q \geq 1, p > 1, r \in \mathbb{N}$ i stanowią uogólnienia wcześniejszych wyników dotyczących tej problematyki. Należy zaznaczyć, że zostały one uzyskane przy dodatkowych warunkach odpowiednio (2.11), (2.12) i (2.27), (2.28). Konieczność założeń (2.11) oraz (2.27) została uzasadniona już w pracy B. Szala [37]. Natomiast Uwaga 11 uzasadnia celowość warunków (2.12) i (2.28). Należy zaznaczyć, że zarówno warunki (2.11), (2.27) jak i warunki (2.12), (2.28) nie pozwalają na zastosowanie kryterium Weierstrassa.

Sformułowane zostanie teraz twierdzenie podające warunek dostateczny jednostajnej zbieżności szeregu (2.9) pochodzące ze wspólnej pracy z B. Szalem [16].

Twierdzenie 14. [16] Niech $\{w_k\}_{k=1}^{\infty} \in GM(p, {}_5\delta(q), r)$, $q \geq 1, p > 1, r \in \mathbb{N}$ oraz

$$\sum_{k=1}^{\infty} w_k e^{\left(\frac{2l\pi}{r}k\right)i} < \infty$$

dla dowolnego $l \in \left\{0, 1, \dots, \left[\frac{r}{2}\right]\right\}$. Jeśli

$$n \ln n |w_n| \rightarrow 0 \text{ gdy } n \rightarrow \infty,$$

to szereg (2.9) jest zbieżny jednostajnie.

Dowód. Dowód tego twierdzenia można przeprowadzić podobnie jak dowód twierdzenia 10 lub 12 z tą różnicą, że zamiast Lematu 3 należy wykorzystać Lemat 4. □

Rozdział 3

Zbieżność jednostajna podwójnych szeregów trygonometrycznych

W rozdziale tym zostaną przedstawione wyniki pochodzące ze wspólnych prac z B. Szaleem ([14], [15]), dotyczące jednostajnej zbieżności podwójnych szeregów trygonometrycznych.

Na początek wprowadźmy podstawowe definicje związane z tą problematyką.

Mówimy, że szereg podwójny

$$\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{j,k}$$

liczb zespolonych jest zbieżny regularnie, jeśli ciąg sum

$$\sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n a_{j,k}$$

jest zbieżny do skończonej granicy, gdy m oraz n dążą do nieskończoności niezależnie od siebie, jak również szeregi kolumn

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_{j,n}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

i szeregi wierszy

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{m,k}, \quad m = 1, 2, \dots,$$

są zbieżne, tzn. dla każdego $\epsilon > 0$ istnieje dodatnia liczba $m_0 = m_0(\epsilon)$ taka, że nierówność

$$\left| \sum_{j=m}^M \sum_{k=n}^N a_{j,k} \right| < \epsilon$$

jest spełniona dla każdego m, n, M, N , gdzie $m + n > m_0$, $1 \leq m \leq M$ oraz $1 \leq n \leq N$.

3.1 Twierdzenia pomocnicze

W podrozdziale tym zostaną sformułowane i wykazane lematy, które będą wykorzystane w dowodzie głównych wyników kolejnych podrozdziałów.

Lemat 7. [14] Niech $\{c_{j,k}\}_{j,k=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$, oraz niech $m, n, \mu, \nu \in \mathbb{N}$ będą takie, że $\nu \geq n$ oraz $\mu \geq m$. Wtedy dla $p \geq 1$

$$\left(\sum_{j=m}^{\mu} \sum_{k=n}^{\nu} |\Delta_{rr} c_{j,k}|^p \right)^{\frac{1}{p}} \geq (\nu - n + 1)^{\frac{1}{p}-1} (\mu - m + 1)^{\frac{1}{p}-1} \sum_{j=m}^{\mu} \sum_{k=n}^{\nu} |\Delta_{rr} c_{j,k}|.$$

Dowód. Wykorzystując Lemat 2

$$\begin{aligned} \left(\sum_{j=m}^{\mu} \sum_{k=n}^{\nu} |\Delta_{rr} c_{j,k}|^p \right)^{\frac{1}{p}} &\geq (\nu - n + 1)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{j=m}^{\mu} \left(\frac{1}{\nu - n + 1} \sum_{k=n}^{\nu} |\Delta_{rr} c_{j,k}| \right)^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\geq (\nu - n + 1)^{\frac{1}{p}-1} (\mu - m + 1)^{\frac{1}{p}-1} \sum_{j=m}^{\mu} \sum_{k=n}^{\nu} |\Delta_{rr} c_{j,k}|, \end{aligned}$$

co kończy dowód. $\square$

Lemat 8. [14] Jeśli $\{c_{j,k}\}_{j,k=1}^{\infty}$ jest podwójnym ciągiem o wyrazach nieujemnych należącym do klasy $DGM(p, {}_2\alpha, {}_2\beta, {}_2\gamma, r)$ z $p \geq 1$ oraz $r \in \mathbb{N}$, to dla dowolnego $m, n \geq \max\{\lambda, 2r\}$ spełniona jest następująca nierówność:

$$\begin{aligned} (mn)^{\frac{1}{p}} c_{m,n} &\ll \sup_{M+N \geq b_3(m+n)} \sum_{j=M}^{2M} \sum_{k=N}^{2N} c_{j,k} + \sum_{j=b_1(m)}^{2\lambda b_1(m)} \sum_{k=n+r}^{2n+r-1} c_{j,k} + \sum_{k=b_2(n)}^{2\lambda b_2(n)} \sum_{j=m+r}^{2m+r-1} c_{j,k} \\ &\quad + \sum_{j=m+r}^{2m+r-1} \sum_{k=n+r}^{2n+r-1} c_{j,k}. \end{aligned}$$

Dowód. Niech $m, n \geq \max\{\lambda, 2r\}$. Jeśli $\{c_{j,k}\}_{j,k=1}^{\infty} \in DGM(p, {}_2\alpha, {}_2\beta, {}_2\gamma, r)$ z $p \geq 1$ oraz $r \in \mathbb{N}$, wtedy wykorzystując Lemat 2 dla dowolnego $\nu \in \mathbb{N}$ oraz $m+r \leq \mu \leq 2m$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^{r-1} c_{m+l,v} &= \sum_{j=m}^{\mu-1} (\Delta_{r0} c_{j,v}) + \sum_{l=0}^{r-1} c_{\mu+l,v} \\ &\leq \sum_{j=m}^{\mu-1} |\Delta_{r0} c_{j,v}| + \sum_{l=0}^{r-1} c_{\mu+l,v} \leq (\mu - m)^{1-\frac{1}{p}} \left(\sum_{j=m}^{2m-1} |\Delta_{r0} c_{j,v}|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \sum_{l=0}^{r-1} c_{\mu+l,v} \\ &\leq (\mu - m)^{1-\frac{1}{p}} \left(\frac{C}{m} \max_{b_1(m) \leq M \leq \lambda b_1(m)} \sum_{j=M}^{2M} c_{j,v} \right) + \sum_{l=0}^{r-1} c_{\mu+l,v}. \end{aligned} \tag{3.1}$$

W analogiczny sposób, dla dowolnego $\mu \in \mathbb{N}$ oraz $n+r \leq \nu \leq 2n$ otrzymujemy

$$\sum_{l=0}^{r-1} c_{\mu,n+l} \leq (\nu - n)^{1-\frac{1}{p}} \left(\frac{C}{m} \max_{b_2(n) \leq N \leq \lambda b_2(n)} \sum_{k=N}^{2N} c_{\mu,k} \right) + \sum_{l=0}^{r-1} c_{\mu,\nu+l}. \tag{3.2}$$

Ponadto, dla μ, ν takich, że $m + r \leq \mu \leq 2m$ oraz $n + r \leq \nu \leq 2n$ otrzymujemy

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=m}^{\mu-1} \sum_{k=n}^{\nu-1} \Delta_{rr} c_{j,k} &= \sum_{j=m}^{\mu-1} \sum_{k=n}^{\nu-1} ((c_{j,k} - c_{j+r,k}) - (c_{j,k+r} - c_{j+r,k+r})) \\
 &= \sum_{k=n}^{\nu-1} \left(\left(\sum_{j=m}^{m+r-1} c_{j,k} - \sum_{j=\mu}^{\mu+r-1} c_{j,k} \right) - \left(\sum_{j=m}^{m+r-1} c_{j,k+r} - \sum_{j=\mu}^{\mu+r-1} c_{j,k+r} \right) \right) \\
 &= \sum_{k=n}^{\nu-1} \left(\sum_{j=m}^{m+r-1} (c_{j,k} - c_{j,k+r}) - \sum_{j=\mu}^{\mu+r-1} (c_{j,k} - c_{j,k+r}) \right) \\
 &= \sum_{j=m}^{m+r-1} \sum_{k=n}^{n+r-1} c_{j,k} - \sum_{j=m}^{m+r-1} \sum_{k=\nu}^{\nu+r-1} c_{j,k} - \sum_{j=\mu}^{\mu+r-1} \left(\sum_{k=n}^{n+r-1} c_{j,k} - \sum_{k=\nu}^{\nu+r-1} c_{j,k} \right) \\
 &= c_{m,n} + \sum_{k=n+1}^{n+r-1} c_{m,k} + \sum_{j=m+1}^{m+r-1} \sum_{k=n}^{n+r-1} c_{j,k} - \sum_{j=m}^{m+r-1} \sum_{k=\nu}^{\nu+r-1} c_{j,k} - \sum_{j=\mu}^{\mu+r-1} \sum_{k=n}^{n+r-1} c_{j,k} + \sum_{j=\mu}^{\mu+r-1} \sum_{k=\nu}^{\nu+r-1} c_{j,k}.
 \end{aligned}$$

Wykorzystując Lemat 7 dostajemy

$$\begin{aligned}
 c_{m,n} &= \sum_{j=m}^{\mu-1} \sum_{k=n}^{\nu-1} \Delta_{rr} c_{j,k} + \sum_{j=m}^{m+r-1} \sum_{k=\nu}^{\nu+r-1} c_{j,k} + \sum_{j=\mu}^{\mu+r-1} \sum_{k=n}^{n+r-1} c_{j,k} - \sum_{j=\mu}^{\mu+r-1} \sum_{k=\nu}^{\nu+r-1} c_{j,k} \\
 &\quad - \sum_{j=m+1}^{m+r-1} \sum_{k=n}^{n+r-1} c_{j,k} - \sum_{k=n+1}^{n+r-1} c_{j,k} \\
 &\leq \sum_{j=m}^{\mu-1} \sum_{k=n}^{\nu-1} \Delta_{rr} c_{j,k} + \sum_{j=m}^{m+r-1} \sum_{k=\nu}^{\nu+r-1} c_{j,k} + \sum_{j=\mu}^{\mu+r-1} \sum_{k=n}^{n+r-1} c_{j,k} \\
 &\leq \sum_{j=m}^{\mu-1} \sum_{k=n}^{\nu-1} |\Delta_{rr} c_{j,k}| + \sum_{j=m}^{m+r-1} \sum_{k=\nu}^{\nu+r-1} c_{j,k} + \sum_{j=\mu}^{\mu+r-1} \sum_{k=n}^{n+r-1} c_{j,k} \\
 &\leq (\mu - m)^{1-\frac{1}{p}} (\nu - n)^{1-\frac{1}{p}} \left(\sum_{j=m}^{2m-1} \sum_{k=n}^{2n-1} |\Delta_{rr} c_{j,k}|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
 &\quad + \sum_{j=m}^{m+r-1} \sum_{k=\nu}^{\nu+r-1} c_{j,k} + \sum_{j=\mu}^{\mu+r-1} \sum_{k=n}^{n+r-1} c_{j,k} \\
 &\leq (\mu - m)^{1-\frac{1}{p}} (\nu - n)^{1-\frac{1}{p}} \frac{C}{mn} \sup_{M+N \geq b_3(m+n)} \sum_{j=M}^{2M} \sum_{k=N}^{2N} c_{j,k} \\
 &\quad + \sum_{j=m}^{m+r-1} \sum_{k=\nu}^{\nu+r-1} c_{j,k} + \sum_{j=\mu}^{\mu+r-1} \sum_{k=n}^{n+r-1} c_{j,k}.
 \end{aligned}$$

Stąd

$$\begin{aligned}
 (\mu\nu)^{\frac{1}{p}-1} c_{m,n} &\leq (\mu\nu)^{\frac{1}{p}-1} (\mu - m)^{1-\frac{1}{p}} (\nu - n)^{1-\frac{1}{p}} \frac{C}{mn} \sup_{M+N \geq b_3(m+n)} \sum_{j=M}^{2M} \sum_{k=N}^{2N} c_{j,k} \\
 &\quad + (\mu\nu)^{\frac{1}{p}-1} \sum_{j=m}^{m+r-1} \sum_{k=\nu}^{\nu+r-1} c_{j,k} + (\mu\nu)^{\frac{1}{p}-1} \sum_{j=\mu}^{\mu+r-1} \sum_{k=n}^{n+r-1} c_{j,k}.
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

Sumując nierówności (3.3) dla $\mu = m + r, \dots, 2m$ oraz $\nu = n + r, \dots, 2n$ dostajemy

$$\sum_{\mu=m+r}^{2m} \sum_{\nu=n+r}^{2n} (\mu\nu)^{\frac{1}{p}-1} c_{\mu,n} \leq S_1 + S_2 + S_3.$$

Wykorzystując (3.1) mamy

$$\begin{aligned} S_2 &= \sum_{\mu=m+r}^{2m} \sum_{\nu=n+r}^{2n} (\mu\nu)^{\frac{1}{p}-1} \sum_{k=\nu}^{\nu+r-1} \sum_{j=0}^{r-1} c_{j+m,k} \\ &\leq \sum_{\mu=m+r}^{2m} \sum_{\nu=n+r}^{2n} (\mu\nu)^{\frac{1}{p}-1} \sum_{k=\nu}^{\nu+r-1} \left((\mu - m)^{1-\frac{1}{p}} \frac{C}{m^{b_1(m)}} \max_{M \leq \lambda b_1(m)} \sum_{j=M}^{2M} c_{j,k} + \sum_{j=0}^{r-1} c_{\mu+j,k} \right). \end{aligned}$$

Dalej, wykonując elementarne szacowania otrzymujemy

$$\begin{aligned} S_2 &\leq C((m+r)(n+r))^{\frac{1}{p}-1} m^{-\frac{1}{p}} \sum_{\nu=n+r}^{2n} \sum_{\mu=m+r}^{2m} \sum_{k=\nu}^{\nu+r-1} \max_{b_1(m) \leq M \leq \lambda b_1(m)} \sum_{j=M}^{2M} c_{j,k} \\ &\quad + \sum_{\mu=m+r}^{2m} \sum_{\nu=n+r}^{2n} (\mu\nu)^{\frac{1}{p}-1} \sum_{k=\nu}^{\nu+r-1} \sum_{j=0}^{r-1} c_{\mu+j,k} \\ &\leq C m^{-\frac{1}{p}} ((m+r)(n+r))^{\frac{1}{p}-1} (m-r+1) \sum_{j=b_1(m)}^{2\lambda b_1(m)} \sum_{\nu=n+r}^{2n} \sum_{k=\nu}^{\nu+r-1} c_{j,k} \\ &\quad + ((m+r)(n+r))^{\frac{1}{p}-1} \sum_{\mu=m+r}^{2m} \sum_{\nu=n+r}^{2n} \sum_{k=\nu}^{\nu+r-1} \sum_{j=0}^{r-1} c_{\mu+j,k} \\ &\leq C n^{\frac{1}{p}-1} \sum_{j=b_1(m)}^{2\lambda b_1(m)} \sum_{\nu=n+r}^{2n} (c_{j,\nu} + c_{j,\nu+1} + \dots + c_{j,\nu+r-1}) \\ &\quad + ((m+r)(n+r))^{\frac{1}{p}-1} \sum_{\mu=m+r}^{2m} \sum_{\nu=n+r}^{2n} \sum_{j=0}^{r-1} (c_{\mu+j,\nu} + c_{\mu+j,\nu+1} + \dots + c_{\mu+j,\nu+r-1}) \\ &\leq C r n^{\frac{1}{p}-1} \sum_{j=b_1(m)}^{2\lambda b_1(m)} \sum_{k=n+r}^{2n+r-1} c_{j,k} + r^2 ((m+r)(n+r))^{\frac{1}{p}-1} \sum_{j=m+r}^{2m+r-1} \sum_{k=n+r}^{2n+r-1} c_{j,k} \\ &\leq C r \sum_{j=b_1(m)}^{2\lambda b_1(m)} \sum_{k=n+1}^{2n+r-1} c_{j,k} + r^2 \sum_{j=m+r}^{2m+r-1} \sum_{k=n+r}^{2n+r-1} c_{j,k}. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Analogicznie wykorzystując (3.2) zamiast (3.1) dostajemy

$$S_3 = \sum_{\mu=m+r}^{2m} \sum_{\nu=n+r}^{2n} (\mu\nu)^{\frac{1}{p}-1} \sum_{j=\mu}^{\mu+r-1} \sum_{k=0}^{r-1} c_{j,k+n} \leq C r \sum_{k=b_2(n)}^{2\lambda b_2(n)} \sum_{j=m+1}^{2m+r-1} c_{j,k} + r^2 \sum_{j=m+r}^{2m+r-1} \sum_{k=n+r}^{2n+r-1} c_{j,k}. \tag{3.5}$$

Szacując S_1 otrzymujemy

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{\mu=m+r}^{2m} \sum_{\nu=n+r}^{2n} (\mu\nu)^{\frac{1}{p}-1} (\mu - m)^{1-\frac{1}{p}} (\nu - n)^{1-\frac{1}{p}} \frac{C}{mn} \sup_{M+N \geq b_3(m+n)} \sum_{j=M}^{2M} \sum_{k=N}^{2N} c_{j,k} \\ &\leq ((m+r)(n+r))^{\frac{1}{p}-1} (mn)^{1-\frac{1}{p}} (m-r+1)(n-r+1) \frac{C}{mn} \sup_{M+N \geq b_3(m+n)} \sum_{j=M}^{2M} \sum_{k=N}^{2N} c_{j,k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\leq C \left(\frac{m}{m+r} \right)^{1-\frac{1}{p}} \left(\frac{n}{n+r} \right)^{1-\frac{1}{p}} \sup_{M+N \geq b_3(m+n)} \sum_{j=M}^{2M} \sum_{k=N}^{2N} c_{j,k} \\
 &\leq C \sup_{M+N \geq b_3(m+n)} \sum_{j=M}^{2M} \sum_{k=N}^{2N} c_{j,k}.
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

Z drugiej strony, jeśli $m, n \geq 2r$ to

$$\begin{aligned}
 \sum_{\mu=m+r}^{2m} \sum_{\nu=n+r}^{2n} (\mu\nu)^{\frac{1}{p}-1} c_{\mu,\nu} &\geq (2m2n)^{\frac{1}{p}-1} (m-r+1)(n-r+1) c_{m,n} \\
 &\geq (mn)^{\frac{1}{p}} 4^{\frac{1}{p}-1} \frac{(m-r)(n-r)}{mn} c_{m,n} \geq (mn)^{\frac{1}{p}} 4^{\frac{1}{p}-2} c_{m,n}.
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

Wykorzystując (3.4), (3.5), (3.6) oraz (3.7) otrzymujemy

$$\begin{aligned}
 (mn)^{\frac{1}{p}} c_{m,n} &\leq \sup_{M+N \geq b_3(m+n)} \sum_{j=M}^{2M} \sum_{k=N}^{2N} c_{j,k} + \sum_{j=b_1(m)}^{2\lambda b_1(m)} \sum_{k=n+r}^{2n+r-1} c_{j,k} + \sum_{k=b_2(n)}^{2\lambda b_2(n)} \sum_{j=m+r}^{2m+r-1} c_{j,k} \\
 &\quad + \sum_{j=m+r}^{2m+r-1} \sum_{k=n+r}^{2n+r-1} c_{j,k}.
 \end{aligned}$$

To kończy dowód. □

Lemat 9. [15] Niech $\{c_{j,k}\}_{j,k=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$, $p \geq 1$ oraz niech $\{b(n)\}_{n=1}^{\infty}$ będzie ciągiem rosnącym o wyrazach nieujemnych takim, że $b(n) \rightarrow \infty$, gdy $n \rightarrow \infty$ oraz

$$jkc_{j,k} \rightarrow 0 \text{ as } j+k \rightarrow \infty. \tag{3.8}$$

Jeśli

$$\left(\sum_{j=m}^{2m-1} |\Delta_{r0} c_{j,k}|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{C}{m b(m)} \max_{M \leq \lambda b(m)} \sum_{j=M}^{2M} |c_{j,n}| \text{ dla } m, k \in \mathbb{N},$$

to

$$m^{\frac{1}{p}} \sup_{k \geq n} k \sum_{j=n}^{\infty} |\Delta_{r0} c_{j,k}| \rightarrow 0, \text{ gdy } m+n \rightarrow \infty \tag{3.9}$$

oraz jeśli

$$\left(\sum_{k=n}^{2n-1} |\Delta_{0r} c_{j,k}|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{C}{n b(n)} \max_{N \leq \lambda b(n)} \sum_{k=N}^{2N} |c_{j,k}| \text{ dla } n, j \in \mathbb{N},$$

to

$$n^{\frac{1}{p}} \sup_{j \geq m} j \sum_{k=n}^{\infty} |\Delta_{0r} c_{j,k}| \rightarrow 0, \text{ gdy } m+n \rightarrow \infty. \tag{3.10}$$

Dowód. Niech $\varepsilon > 0$. Wykorzystując nierówność Höldera z $p > 1$ oraz (3.8) otrzymujemy

$$\begin{aligned}
 \sup_{k \geq n} k \sum_{k=n}^{\infty} |\Delta_{r0} c_{j,k}| &= \sup_{k \geq n} k \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{j=2^s m}^{2^{s+1}m-1} |\Delta_{r0} c_{j,k}| \\
 &\leq \sup_{k \geq n} k \sum_{s=0}^{\infty} \left(\left(\sum_{j=2^s m}^{2^{s+1}m-1} |\Delta_{r0} c_{j,k}|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{j=2^s m}^{2^{s+1}m-1} 1 \right)^{1-\frac{1}{p}} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\leq \sup_{k \geq n} k \sum_{s=0}^{\infty} \frac{C}{2^s m} \left(\max_{b(2^s m) \leq M \leq \lambda b(2^s m)} \sum_{j=M}^{2M} |c_{j,k}| (2^s m)^{1-\frac{1}{p}} \right) \\
 &< \frac{C\varepsilon}{m^{\frac{1}{p}}} \sup_{k \geq n} k \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{(2^s)^{\frac{1}{p}}} \left(\max_{b(2^s m) \leq M \leq \lambda b(2^s m)} \sum_{j=M}^{2M} \frac{1}{kj} \right) \leq \frac{2C\lambda\varepsilon}{m^{\frac{1}{p}}} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{(2^s)^{\frac{1}{p}}} \ll \frac{\varepsilon}{m^{\frac{1}{p}}}.
 \end{aligned}$$

Co implikuje (3.9). W analogiczny sposób, uzyskujemy, że warunek (3.10) jest spełniony, co kończy dowód. $\square$

Lemat 10. [15] Niech $\{c_{j,k}\}_{j,k=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$, $p \geq 1$ oraz niech $\{b(n)\}_{n=1}^{\infty}$ będzie ciągiem rosnącym o wyrazach nieujemnych takim, że $b(n) \rightarrow \infty$, gdy $n \rightarrow \infty$ i zachodzi warunek (3.8). Jeśli nierówność

$$\left(\sum_{j=m}^{2m-1} \sum_{k=m}^{2m-1} |\Delta_{rr} c_{j,k}|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{C}{nm} \sup_{M+N \geq b(m+n)} \sum_{k=M}^{2M} \sum_{j=N}^{2N} |c_{j,k}|, \text{ dla } m, n \in \mathbb{N}$$

jest spełniona, to

$$m^{\frac{1}{p}} n^{\frac{1}{p}} \sum_{j=m}^{\infty} \sum_{k=n}^{\infty} |\Delta_{rr} c_{j,k}| \rightarrow 0, \text{ gdy } m+n \rightarrow \infty. \quad (3.11)$$

Dowód. Niech $\varepsilon > 0$. Wykorzystując nierówność Höldera z $p > 1$ oraz (3.8) otrzymujemy

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=m}^{\infty} \sum_{n=m}^{\infty} |\Delta_{rr} c_{j,k}| &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{j=2^l m}^{2^{l+1}m-1} \sum_{k=2^s n}^{2^{s+1}n-1} |\Delta_{rr} c_{j,k}| \\
 &\leq \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \left\{ \left(\sum_{j=2^l m}^{2^{l+1}m-1} \sum_{k=2^s n}^{2^{s+1}n-1} |\Delta_{rr} c_{j,k}|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{j=2^l m}^{2^{l+1}m-1} \sum_{k=2^s n}^{2^{s+1}n-1} 1 \right)^{1-\frac{1}{p}} \right\} \\
 &\leq \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \left\{ \frac{C}{2^l m 2^s n} \sup_{M+N \geq b(2^l m + 2^s n)} \sum_{k=M}^{2M} \sum_{j=N}^{2N} |c_{j,k}| (2^s m 2^l n)^{1-\frac{1}{p}} \right\} \\
 &\leq \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \left\{ \frac{C}{(2^l m 2^s n)^{\frac{1}{p}}} \sup_{M+N \geq b(2^l m + 2^s n)} \sum_{k=M}^{2M} \sum_{j=N}^{2N} \frac{kj |c_{j,k}|}{kj} \right\} \\
 &< \frac{C\varepsilon}{(mn)^{\frac{1}{p}}} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{(2^l 2^s)^{\frac{1}{p}}} \sup_{M+N \geq b(2^l m + 2^s n)} \sum_{k=M}^{2M} \sum_{j=N}^{2N} \frac{1}{kj} \right\} \\
 &\leq \frac{4C\varepsilon}{(mn)^{\frac{1}{p}}} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{(2^l 2^s)^{\frac{1}{p}}} \right\} \ll \frac{\varepsilon}{m^{\frac{1}{p}} n^{\frac{1}{p}}}.
 \end{aligned}$$

Zatem, warunek (3.11) jest spełniony, co kończy dowód. $\square$

Warto w tym miejscu zauważyć, że jądro oraz jądro sprzężone typu Dirichleta posiadają osobliwości w punktach przedziału $[0, \pi]$, a ich liczba jest zależna od r . Z tego powodu, w dowodach twierdzeń podających warunki dostateczne zbieżności jednostajnej szeregów trygonometrycznych, konieczne jest dokonanie podziału przedziału $[0, \pi]$ na podprzedziały oraz wykorzystanie nierówności przedstawionych w poniższym lemacie.

Lemat 11. Niech $\{a_k\}_{k=0}^{\infty} \subset \mathbb{C}$, $l \in \mathbb{Z}$, $r \in \mathbb{N}$ oraz niech dane będą liczby $n, N \in \mathbb{N}$ takie, że $n \leq N$. Jeśli $x \in \left(\frac{2l\pi}{r}, \frac{(2l+1)\pi}{r}\right]$, to

$$\left| \sum_{k=n}^N a_k \sin(kx) \right| \leq \frac{\pi}{2(rx - 2\pi l)} \left(\sum_{k=n}^N |\Delta_r a_k| + \sum_{k=N+1}^{N+r} |a_k| + \sum_{k=n}^{n+r-1} |a_k| \right) \quad (3.12)$$

i

$$\left| \sum_{k=n}^N a_k \cos(kx) \right| \leq \frac{\pi}{2(rx - 2\pi l)} \left(\sum_{k=n}^N |\Delta_r a_k| + \sum_{k=N+1}^{N+r} |a_k| + \sum_{k=n}^{n+r-1} |a_k| \right), \quad (3.13)$$

oraz jeśli $x \in \left(\frac{(2l+1)\pi}{r}, \frac{(2l+2)\pi}{r}\right)$, to

$$\left| \sum_{k=n}^N a_k \sin(kx) \right| \leq \frac{\pi}{2(2(l+1)\pi - rx)} \left(\sum_{k=n}^N |\Delta_r a_k| + \sum_{j=N+1}^{N+r} |a_k| + \sum_{j=n}^{n+r-1} |a_k| \right) \quad (3.14)$$

i

$$\left| \sum_{k=n}^N a_k \cos(kx) \right| \leq \frac{\pi}{2(2(l+1)\pi - rx)} \left(\sum_{k=n}^N |\Delta_r a_k| + \sum_{j=N+1}^{N+r} |a_k| + \sum_{j=n}^{n+r-1} |a_k| \right). \quad (3.15)$$

Dowód. Wykorzystując Lemat 3 uzyskujemy

$$\left| \sum_{k=n}^N a_k \sin(kx) \right| \leq \sum_{k=n}^N |\Delta_r a_k| |\tilde{D}_{k,r}(x)| + \sum_{k=N+1}^{N+r} |a_k| |\tilde{D}_{k,-r}(x)| + \sum_{k=n}^{n+r-1} |a_k| |\tilde{D}_{k,-r}(x)|$$

oraz

$$\left| \sum_{k=n}^N a_k \cos(kx) \right| \leq \sum_{k=n}^N |\Delta_r a_k| |D_{k,r}(x)| + \sum_{k=N+1}^{N+r} |a_k| |D_{k,-r}(x)| + \sum_{k=n}^{n+r-1} |a_k| |D_{k,-r}(x)|.$$

Jeśli $x \in \left(\frac{2l\pi}{r}, \frac{(2l+1)\pi}{r}\right]$, to korzystając z nierówności $|\sin(\frac{rx}{2})| \geq \frac{rx}{\pi} - 2l$ otrzymujemy

$$|\tilde{D}_{k,\pm r}(x)| = \left| \frac{\cos(k \pm \frac{r}{2})x}{2 \sin(\pm \frac{rx}{2})} \right| \leq \frac{1}{|2 \sin(\pm \frac{rx}{2})|} \leq \frac{1}{2 \left(\frac{rx}{\pi} - 2l \right)} \quad (3.16)$$

oraz

$$|D_{k,\pm r}(x)| = \left| \frac{\sin(k \pm \frac{r}{2})x}{2 \sin(\pm \frac{rx}{2})} \right| \leq \frac{1}{|2 \sin(\pm \frac{rx}{2})|} \leq \frac{1}{2 \left(\frac{rx}{\pi} - 2l \right)}. \quad (3.17)$$

Z powyższych oszacowań mamy

$$\left| \sum_{k=n}^N a_k \sin(kx) \right| \leq \frac{\pi}{2(rx - 2l\pi)} \left(\sum_{k=n}^N |\Delta_r a_k| + \sum_{k=N+1}^{N+r} |a_k| + \sum_{k=n}^{n+r-1} |a_k| \right)$$

oraz

$$\left| \sum_{k=n}^N a_k \cos(kx) \right| \leq \frac{\pi}{2(rx - 2\pi l)} \left(\sum_{k=n}^N |\Delta_r a_k| + \sum_{k=N+1}^{N+r} |a_k| + \sum_{k=n}^{n+r-1} |a_k| \right),$$

Analogicznie, jeśli $x \in \left(\frac{(2l+1)\pi}{r}, \frac{(2l+2)\pi}{r}\right)$, to korzystając z nierówności $\left|\sin\left(\frac{rx}{2}\right)\right| \geq 2(l+1) - \frac{rx}{\pi}$ otrzymujemy

$$\left|\sum_{k=n}^N a_k \sin(kx)\right| \leq \frac{\pi}{2\left(2(l+1) - \frac{rx}{\pi}\right)} \left(\sum_{k=n}^N |\Delta_r a_k| + \sum_{k=N+1}^{N+r} |a_k| + \sum_{k=n}^{n+r-1} |a_k|\right)$$

oraz

$$\left|\sum_{k=n}^N a_k \cos(kx)\right| \leq \frac{\pi}{2(2(l+1)\pi - rx)} \left(\sum_{k=n}^N |\Delta_r a_k| + \sum_{j=N+1}^{N+r} |a_k| + \sum_{j=n}^{n+r-1} |a_k|\right).$$

To kończy dowód. $\square$

3.2 Zbieżność jednostajna podwójnych szeregów sinusów

Niech $\{c_{j,k}\}_{j,k=1}^{\infty}$ będzie podwójnym ciągiem liczb zespolonych. Rozważmy podwójny szereg sinusów postaci

$$\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} c_{j,k} \sin(jx) \sin(ky). \quad (3.18)$$

Pierwszy wynik dotyczący jednostajnej zbieżności podwójnych szeregów sinusów został przedstawiony przez I. E. Żaka oraz A. A. Šneidera w pracy [48]. Można go sformułować w postaci następującego twierdzenia:

Twierdzenie 15. [48] *Jeżeli $\{c_{j,k}\}_{j,k=1}^{\infty} \in MDS$, to szereg (3.18) jest zbieżny regularnie jednostajnie względem (x, y) wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi (3.8).*

Twierdzenie to w kolejnych latach zostało uogólnione poprzez zastąpienie ciągów monotonicznych ciągami o ograniczonych wariacjach zdefiniowanych w Rozdziale 1 tej rozprawy. Dla klasy ciągów $DGM(1, {}_1\alpha, {}_1\beta, {}_1\gamma, 1)$ wynik ten został udowodniony przez P. Kórusa oraz F. Móricza w artykule [11], a w pracy [12] dla klasy ciągów $DGM(1, {}_2\alpha, {}_2\beta, {}_2\gamma, 1)$. W tej samej pracy P. Kórus udowodnił warunek dostateczny dla klasy ciągów $DGM(1, {}_3\alpha, {}_3\beta, {}_3\gamma, 1)$. Dalej, L. Leindler w artykule [28] rozszerzył wynik otrzymany przez I. E. Żaka oraz A. A. Šneidera dla klasy ciągów $DGM(1, \alpha, \beta, \gamma, 1)$, gdzie $\alpha = \alpha_{m,n} = O(m^{-1})$, $\beta = \beta_{m,n} = O(m^{-1})$, $\gamma = \gamma_{m,n} = O(mn^{-1})$, gdy $m + n \rightarrow \infty$. Ponadto Twierdzenie 15 zostało uogólnione przez K. Duzinkiewicza oraz B. Szala w pracy [3] dla klasy ciągów $DGM(1, {}_3\alpha, {}_3\beta, {}_3\gamma, 2)$.

Poniższe twierdzenia są głównymi wynikami tego rozdziału i podają one warunki konieczne oraz dostateczne jednostajnej regularnej zbieżności szeregu (3.18), którego współczynniki należą do klasy $DGM(p, {}_2\alpha, {}_2\beta, {}_2\gamma, r)$. Zostały one udowodnione w pracach [14] i [15].

Twierdzenie 16. [14] *Niech dany będzie ciąg o wyrazach nieujemnych $\{c_{j,k}\}_{j,k=1}^{\infty}$ należący do klasy $DGM(p, {}_2\alpha, {}_2\beta, {}_2\gamma, r)$, gdzie $r \in \mathbb{N}$ oraz $p \geq 1$. Jeśli szereg (3.18) jest zbieżny jednostajnie regularnie względem (x, y) , to*

$$(mn)^{\frac{1}{p}} c_{m,n} \rightarrow 0, \quad (3.19)$$

gdy $m + n \rightarrow \infty$.

Dowód. Niech $\{c_{j,k}\}_{j,k=1}^{\infty}$ będzie podwójnym ciągiem o wyrazach nieujemnych oraz niech $\varepsilon > 0$. Wykorzystując założenie, że szereg (3.18) jest zbieżny jednostajnie regularnie względem (x, y) otrzymujemy, że istnieje liczba naturalna $m_0 = m_0(\varepsilon)$ taka, że nierówność

$$\left| \sum_{j=m}^M \sum_{k=n}^N c_{j,k} \sin(jx) \sin(ky) \right| < \varepsilon, \quad (\text{gdzie } 1 \leq m \leq M, 1 \leq n \leq N) \quad (3.20)$$

jest spełniona dla dowolnego $m, n, M, N \in \mathbb{N}$, gdy $m + n > m_0$ oraz dowolnego $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Niech

$$\begin{aligned} x_1(m) &= \frac{\pi}{4(m+r)}, \\ x_2(m) &= \frac{\pi}{4\lambda b_1(m)}, \\ x_3(m) &= \frac{\pi}{4m}, \\ y_1(n) &= \frac{\pi}{4(n+r)}, \\ y_2(n) &= \frac{\pi}{4\lambda b_2(n)}, \\ y_3(n) &= \frac{\pi}{4n}. \end{aligned}$$

Wtedy

$$\begin{aligned} \sin(jx_1(m)) &\geq \sin\left(\frac{\pi}{4}\right), \quad \text{dla } m+r \leq j \leq 2m+r-1, \\ \sin(jx_2(m)) &\geq \sin\left(\frac{\pi}{4\lambda}\right), \quad \text{dla } b_1(m) \leq j \leq 2\lambda b_1(m), \\ \sin(jx_3(m)) &\geq \sin\left(\frac{\pi}{4}\right), \quad \text{dla } m \leq j \leq 2m, \\ \sin(ky_1(n)) &\geq \sin\left(\frac{\pi}{4}\right), \quad \text{dla } n+r \leq k \leq 2n+r-1, \\ \sin(ky_2(n)) &\geq \sin\left(\frac{\pi}{4\lambda}\right), \quad \text{dla } b_2(n) \leq k \leq 2\lambda b_2(n), \\ \sin(ky_3(n)) &\geq \sin\left(\frac{\pi}{4}\right), \quad \text{dla } n \leq k \leq 2n. \end{aligned}$$

Ponieważ ciągi $\{b_1(l)\}_{l=1}^{\infty}$, $\{b_2(l)\}_{l=1}^{\infty}$, $\{b_3(l)\}_{l=1}^{\infty}$ dążą do nieskończoności, to istnieje liczba naturalna m_1 , taka, że dla dowolnych m, n spełniających nierówność $m + n > m_1$ prawdziwe są również nierówności $m + n > m_0$, $b_1(m) + n > m_0$, $m + b_2(n) > m_0$ i $b_3(m + n) > m_0$. Wykorzystując powyższe nierówności, Lemat 8 oraz (3.20) otrzymujemy

$$\begin{aligned} 4\varepsilon &> \sup_{M+N \geq b_3(m+n)} \sum_{j=M}^{2M} \sum_{k=N}^{2N} c_{j,k} \sin(jx_3(M)) \sin(ky_3(N)) \\ &+ \sum_{j=b_1(m)}^{2\lambda b_1(m)} \sum_{k=n+1}^{2n+r-1} c_{j,k} \sin(jx_2(m)) \sin(ky_1(n)) \\ &+ \sum_{j=m+r}^{2m+r-1} \sum_{k=n+r}^{2n+r-1} c_{j,k} \sin(jx_1(m)) \sin(ky_1(n)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{k=b_2(n)}^{2\lambda b_2(n)} \sum_{j=m+1}^{2m+r-1} c_{j,k} \sin(jx_1(m)) \sin(ky_2(n)) \\
 & \geq \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 \sup_{M+N \geq b_3(m+n)} \sum_{j=M}^{2M} \sum_{k=N}^{2N} c_{j,k} + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \sin\left(\frac{\pi}{4\lambda}\right) \sum_{j=b_1(m)}^{2\lambda b_1(m)} \sum_{k=n+1}^{2n+r-1} c_{j,k} \\
 & + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 \sum_{j=m+r}^{2m+r-1} \sum_{k=n+r}^{2n+r-1} c_{j,k} + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \sin\left(\frac{\pi}{4\lambda}\right) \sum_{k=b_2(n)}^{2\lambda b_2(n)} \sum_{j=m+1}^{2m+r-1} c_{j,k} \\
 & \gg \left(\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \sin\left(\frac{\pi}{4\lambda}\right) \right) (mn)^{\frac{1}{p}} c_{m,n}, \text{ gdy } m+n > m_1 \text{ oraz } m, n \geq \max\{\lambda, 2r\}.
 \end{aligned}$$

Jeśli $j \rightarrow \infty$ oraz $k < \max\{\lambda, 2r\}$ lub $j < \max\{\lambda, 2r\}$ oraz $k \rightarrow \infty$, wtedy warunek (3.19) wynika z jednostajnej zbieżności szeregów pojedynczych (3.25) analogicznie jak w pracy P. Kórusa oraz F. Móricza [11], co kończy dowód. $\square$

Poniższa uwaga pokazuje, że Twierdzenie 16 uogólnia wynik podający warunek konieczny jednostajnej zbieżności podwójnego szeregu sinusów (3.18) uzyskany przez B. Szala oraz K. Duzinkiewicza w pracy [3] dla klasy $DGM(1, 2\alpha, 2\beta, 2\gamma, 2)$, a w konsekwencji wszystkie wcześniejsze wyniki dotyczące tej problematyki.

Uwaga 17. Podstawiając $p = 1$, $r = 2$ w Twierdzeniu 16 uzyskujemy wynik otrzymany przez B. Szala oraz K. Duzinkiewicza w pracy [3].

Przedstawione zostanie teraz twierdzenie podające warunek dostateczny jednostajnej regularnej zbieżności szeregu (3.18), którego współczynniki należą do klasy $DGM(p, 2\alpha, 2\beta, 2\gamma, r)$.

Twierdzenie 18. [15] Niech ciąg $\{c_{j,k}\}_{j,k=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ należy do klasy $DGM(p, 2\alpha, 2\beta, 2\gamma, r)$, gdzie $p > 1$, $r \in \mathbb{N}$. Załóżmy, że dla dowolnego $r \geq 3$ szereg

$$\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} c_{j,k} \sin\left(\frac{2l_1\pi}{r}j\right) \sin\left(\frac{2l_2\pi}{r}k\right) \quad (3.21)$$

jest zbieżny regularnie, gdzie $l_1, l_2 \in \{1, \dots, [\frac{r}{2}] - 1\}$, gdy r jest liczbą parzystą oraz $l_1, l_2 \in \{1, \dots, [\frac{r}{2}]\}$, gdy r jest liczbą nieparzystą oraz

$$\sup_{j \geq m} j \ln j \sum_{k=n}^{\infty} |c_{j,k}| \rightarrow 0, \quad (3.22)$$

$$\sup_{k \geq n} k \ln k \sum_{j=m}^{\infty} |c_{j,k}| \rightarrow 0, \quad (3.23)$$

gdy $m+n \rightarrow \infty$. Jeśli

$$mn \ln m \ln n |c_{m,n}| \rightarrow 0, \text{ gdy } m+n \rightarrow \infty, \quad (3.24)$$

to szereg (3.18) jest zbieżny jednostajnie regularnie względem (x, y) .

Dowód. Niech $r \in \mathbb{N}$ oraz $p > 1$. Analogicznie jak w Twierdzeniu 10 dostajemy, że pojedyncze szeregi:

$$\sum_{j=1}^{\infty} c_{j,n} \sin jx, \quad n = 1, 2, \dots, \quad \sum_{k=1}^{\infty} c_{m,k} \sin ky, \quad m = 1, 2, \dots \quad (3.25)$$

są jednostajnie zbieżne, ponieważ dla dowolnego $m, n \in \mathbb{N}$ otrzymujemy, że $\{c_{j,n}\}_{j=1}^{\infty} \in GM(p, {}_2\alpha, r) \subseteq GM(p, {}_3\alpha, r) \equiv GM(p, {}_5\delta, r)$, $j \ln j c_{j,n} \rightarrow 0$, gdy $j \rightarrow \infty$, $\{c_{m,k}\}_{k=1}^{\infty} \in GM(p, {}_2\beta, r) \subseteq GM(p, {}_3\beta, r) \equiv GM(p, {}_5\delta, r)$, $k \ln k c_{m,k} \rightarrow 0$, gdy $k \rightarrow \infty$ oraz $\sum_{j=1}^{\infty} c_{j,n} \sin\left(\frac{2l_1\pi}{r}\right) < \infty$ i $\sum_{k=1}^{\infty} c_{m,k} \sin\left(\frac{2l_2\pi}{r}\right) < \infty$ dla dowolnego $r \geq 3$ i dowolnych $l_1, l_2 \in \{1, \dots, [\frac{r}{2}]\}$, gdy r jest liczbą parzystą oraz $l_1, l_2 \in \{1, \dots, [\frac{r}{2}]\}$, gdy r jest liczbą nieparzystą. Niech $\epsilon > 0$. Pokażemy, że dla dowolnych $M \geq m > \eta(\epsilon)$, $N \geq n > \eta(\epsilon)$ oraz dla dowolnego $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ zachodzi nierówność

$$\left| \sum_{j=m}^M \sum_{k=n}^N c_{j,k} \sin(jx) \sin(ky) \right| \ll \epsilon, \quad (3.26)$$

gdzie $\eta = \eta(\epsilon) > \lambda$ jest liczbą naturalną taką, że dla dowolnego $m, n > \eta$ i $M \geq m$ oraz $N \geq n$ zachodzi

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{j=m}^M \sum_{k=n}^N c_{j,k} \sin\left(j \frac{2l_1\pi}{r}\right) \sin\left(k \frac{2l_2\pi}{r}\right) \right| < \epsilon, \text{ gdzie } l_1, l_2 \text{ spełniają założenia twierdzenia,} \\ & m^{\frac{1}{p}} \sup_{k \geq n} k \sum_{j=n}^{\infty} |\Delta_{r0} c_{j,k}| < \epsilon, \quad n^{\frac{1}{p}} \sup_{j \geq m} j \sum_{k=n}^{\infty} |\Delta_{r0} c_{j,k}| < \epsilon, \\ & m^{\frac{1}{p}} n^{\frac{1}{p}} \sum_{j=m}^{\infty} \sum_{k=n}^{\infty} |\Delta_{rr} a_n| < \epsilon \quad mn \ln m \ln n |c_{m,n}| < \epsilon, \\ & \sup_{j \geq m} j \ln j \sum_{k=n}^{\infty} |c_{j,k}| < \epsilon, \quad \sup_{k \geq n} k \ln k \sum_{j=m}^{\infty} |c_{j,k}| < \epsilon. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Powyższe nierówności wynikają bezpośrednio z Lematu 9, Lematu 10, (3.21), (3.22) (3.23) oraz (3.24).

Jeśli $x = 0$ lub $y = 0$, oraz jeśli $x = \pi$ lub $y = \pi$ nierówność (3.26) jest prawdziwa. Wykorzystując (3.21) otrzymujemy, że nierówność (3.26) jest spełniona jeśli $x = \frac{2l_1\pi}{r}$ i $y = \frac{2l_2\pi}{r}$, gdzie $r \geq 3$ i $l_1, l_2 \in \{1, \dots, [\frac{r}{2}] - 1\}$, gdy r jest liczbą parzystą, oraz $l_1, l_2 \in \{1, \dots, [\frac{r}{2}]\}$, gdy r jest liczbą nieparzystą.

Założmy, że $x \in \left(\frac{2l_1\pi}{r}, \frac{(2l_1+1)\pi}{r}\right]$ oraz $y \in \left(\frac{2l_2\pi}{r}, \frac{(2l_2+1)\pi}{r}\right]$, gdzie $l_1, l_2 \in \{0, 1, \dots, [\frac{r}{2}] - 1\}$, gdy r jest liczbą parzystą, oraz $l_1, l_2 \in \{0, 1, \dots, [\frac{r}{2}]\}$, gdy r jest liczbą nieparzystą. Niech $\mu = \left[\frac{1}{x - \frac{2l_1\pi}{r}}\right]^p$ oraz $\nu = \left[\frac{1}{y - \frac{2l_2\pi}{r}}\right]^p$. Wykorzystując elementarne przekształcenia otrzymujemy

$$\begin{aligned} \sin(jx) \sin(ky) &= \left(\sin(jx) - \sin\left(j \frac{2l_1\pi}{r}\right) \right) \left(\sin(ky) - \sin\left(k \frac{2l_2\pi}{r}\right) \right) \\ &+ \left(\sin(jx) - \sin\left(j \frac{2l_1\pi}{r}\right) \right) \sin\left(k \frac{2l_2\pi}{r}\right) \\ &+ \sin\left(j \frac{2l_1\pi}{r}\right) \left(\sin(ky) - \sin\left(k \frac{2l_2\pi}{r}\right) \right) + \sin\left(j \frac{2l_1\pi}{r}\right) \sin\left(k \frac{2l_2\pi}{r}\right). \end{aligned} \quad (3.28)$$

Stosując twierdzenie Lagrange'a o wartości średniej odpowiednio do funkcji $f(x) = \sin(jx)$ oraz $f(y) = \sin(ky)$ na przedziałach $\left[\frac{2l_1\pi}{r}, x\right]$ oraz $\left[\frac{2l_2\pi}{r}, y\right]$, uzyskujemy,

że dla dowolnego $j, k \in \mathbb{N}$ istnieją liczby $z_j \in \left(\frac{2l_1\pi}{r}, x\right)$ oraz $q_k \in \left(\frac{2l_2\pi}{r}, y\right)$ takie, że

$$\begin{aligned}\sin(jx) - \sin\left(\frac{2l_1\pi}{r}\right) &= j \cos(jz_j) \left(x - \frac{2l_1\pi}{r}\right), \\ \sin(ky) - \sin\left(\frac{2l_2\pi}{r}\right) &= k \cos(kq_k) \left(y - \frac{2l_2\pi}{r}\right).\end{aligned}\tag{3.29}$$

Rozważmy teraz dziewięć następujących przypadków:

Przypadek (a): $\eta < m \leq M \leq \mu$ oraz $\eta < n \leq N \leq \nu$. W przypadku (a) mamy do rozpatrzenia cztery przypadki:

(a₁): $m + \mu^{\frac{1}{p}} > M$ oraz $n + \nu^{\frac{1}{p}} > N$. Wykorzystując (3.27), (3.28) i (3.29) uzyskujemy

$$\begin{aligned}\left| \sum_{j=m}^M \sum_{k=n}^N c_{j,k} \sin(jx) \sin(ky) \right| &\leq \left| \sum_{j=m}^M \sum_{k=n}^N c_{j,k} \left(\sin(jx) - \sin\left(j\frac{2l_1\pi}{r}\right) \right) \left(\sin(ky) - \sin\left(k\frac{2l_2\pi}{r}\right) \right) \right| \\ &+ \left| \sum_{j=m}^M \sum_{k=n}^N c_{j,k} \left(\sin(jx) - \sin\left(j\frac{2l_1\pi}{r}\right) \right) \sin\left(k\frac{2l_2\pi}{r}\right) \right| \\ &+ \left| \sum_{j=m}^M \sum_{k=n}^N c_{j,k} \sin\left(j\frac{2l_1\pi}{r}\right) \left(\sin(ky) - \sin\left(k\frac{2l_2\pi}{r}\right) \right) \right| \\ &+ \left| \sum_{j=m}^M \sum_{k=n}^N c_{j,k} \sin\left(j\frac{2l_1\pi}{r}\right) \sin\left(k\frac{2l_2\pi}{r}\right) \right| \\ &< \left(x - \frac{2l_1\pi}{r}\right) \left(y - \frac{2l_2\pi}{r}\right) \sum_{j=m}^M \sum_{k=n}^N |c_{j,k} j \cos(jz_j) k \cos(kq_k)| \\ &+ \left(x - \frac{2l_1\pi}{r}\right) \sum_{j=m}^M \sum_{k=n}^N |c_{j,k} j \cos(jz_j) \sin\left(k\frac{2l_2\pi}{r}\right)| \\ &+ \left(y - \frac{2l_2\pi}{r}\right) \sum_{j=m}^M \sum_{k=n}^N |c_{j,k} k \cos(kq_k) \sin\left(j\frac{2l_1\pi}{r}\right)| + \varepsilon \\ &\leq \frac{1}{\mu^{\frac{1}{p}} \nu^{\frac{1}{p}}} \sum_{j=m}^{m+\mu^{\frac{1}{p}}-1} \sum_{k=n}^{n+\nu^{\frac{1}{p}}-1} j k \ln j \ln k |c_{j,k}| \\ &+ \frac{1}{\mu^{\frac{1}{p}}} \sum_{j=m}^{m+\mu^{\frac{1}{p}}-1} \sup_{j \geq m} j \ln j \sum_{k=n}^{\infty} |c_{j,k}| + \frac{1}{\nu^{\frac{1}{p}}} \sum_{k=n}^{n+\nu^{\frac{1}{p}}-1} \sup_{k \geq n} k \ln k \sum_{j=m}^{\infty} |c_{j,k}| + \varepsilon < 4\varepsilon.\end{aligned}$$

(a₂): $m + \mu^{\frac{1}{p}} > M$ oraz $n + \nu^{\frac{1}{p}} \leq N$. Wtedy

$$\begin{aligned}\sum_{j=m}^M \sum_{k=n}^N c_{j,k} \sin(jx) \sin(ky) &= \sum_{j=m}^M \sum_{k=n}^{n+\nu^{\frac{1}{p}}-1} c_{j,k} \sin(jx) \sin(ky) + \sum_{j=m}^M \sum_{k=n+\nu^{\frac{1}{p}}}^N c_{j,k} \sin(jx) \sin(ky) \\ &= S_1 + S_2.\end{aligned}$$

Analogicznie jak w przypadku (a₁) mamy

$$|S_1| = \left| \sum_{j=m}^M \sum_{k=n}^{n+\nu^{\frac{1}{p}}-1} c_{j,k} \sin(jx) \sin(ky) \right| \leq \frac{1}{\mu^{\frac{1}{p}} \nu^{\frac{1}{p}}} \sum_{j=m}^{m+\mu^{\frac{1}{p}}-1} \sum_{k=n}^{n+\nu^{\frac{1}{p}}-1} j \ln j k \ln k |c_{j,k}|$$

$$+ \frac{1}{\mu^{\frac{1}{p}}} \sum_{j=m}^{m+\mu^{\frac{1}{p}}-1} \sup_{j \geq m} j \ln j \sum_{k=n}^{\infty} |c_{j,k}| + \frac{1}{\nu^{\frac{1}{p}}} \sum_{k=n}^{n+\nu^{\frac{1}{p}}-1} \sup_{k \geq n} k \ln k \sum_{j=m}^{\infty} |c_{j,k}| + \varepsilon < 4\varepsilon.$$

Wykorzystując Lemat 5, (3.27) i (3.29) otrzymujemy

$$\begin{aligned} |S_2| &= \left| \sum_{j=m}^M \sum_{k=n+\nu^{\frac{1}{p}}}^N c_{j,k} \sin(jx) \sin(ky) \right| \\ &= \left| \sum_{j=m}^M \sum_{k=n+\nu^{\frac{1}{p}}}^N c_{j,k} \left(j \cos(jz_j) \left(x - \frac{2l_1\pi}{r} \right) + \sin(j \frac{2l_1\pi}{r}) \right) \sin(ky) \right| \\ &\leq \left(x - \frac{2l_1\pi}{r} \right) \sum_{j=m}^M \sum_{k=n+\nu^{\frac{1}{p}}}^N |c_{j,k} j \cos(jz_j)| + \sum_{j=m}^M \sum_{k=n+\nu^{\frac{1}{p}}}^N \left| c_{j,k} \sin(j \frac{2l_1\pi}{r}) \sin(ky) \right| \\ &< \frac{4\varepsilon}{\mu^{\frac{1}{p}}} \sum_{j=m}^{m+\mu^{\frac{1}{p}}-1} \sum_{k=n+\nu^{\frac{1}{p}}}^{n+\nu-1} \frac{1}{(k+1) \ln(k+1)} + 4 \sup_{k \geq n} k \ln k \sum_{j=m}^{\infty} |c_{j,k}| \sum_{k=n+\nu^{\frac{1}{p}}}^{n+\nu-1} \frac{1}{(k+1) \ln(k+1)} \\ &\leq \frac{4\varepsilon}{\mu^{\frac{1}{p}}} \sum_{j=m}^{m+\mu^{\frac{1}{p}}-1} \sum_{k=n+\nu^{\frac{1}{p}}}^{n+\nu-1} \int_k^{k+1} \frac{1}{x \ln x} dx + 4 \sup_{k \geq n} k \ln k \sum_{j=m}^{\infty} |c_{j,k}| \sum_{k=n+\nu^{\frac{1}{p}}}^{n+\nu-1} \int_k^{k+1} \frac{1}{x \ln x} dx \\ &\leq \frac{4\varepsilon}{\mu^{\frac{1}{p}}} \sum_{j=m}^{m+\mu^{\frac{1}{p}}-1} \int_{n+\nu^{\frac{1}{p}}}^{n+\nu} \frac{1}{k \ln k} dk + 4\varepsilon \int_{n+\nu^{\frac{1}{p}}}^{n+\nu} \frac{1}{k \ln k} dk \leq \frac{4\varepsilon}{\mu^{\frac{1}{p}}} \sum_{j=m}^{m+\mu^{\frac{1}{p}}-1} \ln p + 4\varepsilon \ln p \\ &\leq 8\varepsilon \ln p. \end{aligned}$$

Zatem

$$\left| \sum_{j=m}^M \sum_{k=n}^N c_{j,k} \sin(jx) \sin(ky) \right| < \varepsilon (4 + 8 \ln p). \quad (3.30)$$

(a_3): $m + \mu^{\frac{1}{p}} \leq M$ oraz $n + \nu^{\frac{1}{p}} > N$. Analogicznie jak w (a_2) otrzymujemy, że nierówność (3.30) jest prawdziwa.

(a_4): $m + \mu^{\frac{1}{p}} \leq M$ oraz $n + \nu^{\frac{1}{p}} \leq N$. Wtedy

$$\begin{aligned} &\sum_{j=m}^M \sum_{k=n}^N c_{j,k} \sin(jx) \sin(ky) \\ &= \sum_{j=m}^{m+\mu^{\frac{1}{p}}-1} \sum_{k=n}^{n+\nu^{\frac{1}{p}}-1} c_{j,k} \sin(jx) \sin(ky) + \sum_{j=m+\mu^{\frac{1}{p}}}^M \sum_{k=n}^{n+\nu^{\frac{1}{p}}-1} c_{j,k} \sin(jx) \sin(ky) \\ &+ \sum_{j=m}^{m+\mu^{\frac{1}{p}}-1} \sum_{k=n+\nu^{\frac{1}{p}}}^N c_{j,k} \sin(jx) \sin(ky) + \sum_{j=m+\mu^{\frac{1}{p}}}^M \sum_{k=n+\nu^{\frac{1}{p}}}^N c_{j,k} \sin(jx) \sin(ky) \\ &= S_3 + S_4 + S_5 + S_6. \end{aligned}$$

Analogicznie jak w (a_1) mamy

$$|S_3| = \left| \sum_{j=m}^{m+\mu^{\frac{1}{p}}-1} \sum_{k=n}^{n+\nu^{\frac{1}{p}}-1} c_{j,k} \sin(jx) \sin(ky) \right| < 4\varepsilon.$$

Wykorzystując oszacowania z (a_2) , otrzymujemy

$$\begin{aligned} |S_4| &= \left| \sum_{j=m+\mu^{\frac{1}{p}}}^M \sum_{k=n}^{n+\nu^{\frac{1}{p}}-1} c_{j,k} \sin(jx) \sin(ky) \right| \\ &\leq \left(y - \frac{2l_2\pi}{r} \right) \sum_{j=m+\mu^{\frac{1}{p}}}^M \sum_{k=n}^{n+\nu^{\frac{1}{p}}-1} |c_{j,k} \sin(jx) k \cos(kq_k)| + \sum_{j=m+\mu^{\frac{1}{p}}}^M \sum_{k=n}^{n+\nu^{\frac{1}{p}}-1} \left| c_{j,k} \sin(jx) \sin(k \frac{2l_2\pi}{r}) \right| \\ &< \frac{4\varepsilon}{\nu^{\frac{1}{p}}} \sum_{j=m+\mu^{\frac{1}{p}}}^{m+\mu-1} \sum_{k=n}^{n+\nu^{\frac{1}{p}}-1} \frac{1}{(j+1) \ln(j+1)} + 4 \sup_{j \geq m} j \ln j \sum_{k=n}^{\infty} |c_{j,k}| \sum_{j=m+\mu^{\frac{1}{p}}}^{m+\mu-1} \frac{1}{(j+1) \ln(j+1)} \\ &\leq 8\varepsilon \sum_{j=m+\mu^{\frac{1}{p}}}^{m+\mu-1} \int_j^{j+1} \frac{1}{x \ln x} dx \leq 8\varepsilon \int_{j+\mu^{\frac{1}{p}}}^{j+\mu} \frac{1}{x \ln x} dx \leq 8\varepsilon \ln p \end{aligned}$$

oraz

$$|S_5| = \left| \sum_{j=m}^{m+\mu^{\frac{1}{p}}-1} \sum_{k=n+\nu^{\frac{1}{p}}}^N c_{j,k} \sin(jx) \sin(ky) \right| < 8\varepsilon \ln p.$$

Dalej, korzystając z Lematu 5, dostajemy

$$\begin{aligned} |S_6| &= \left| \sum_{j=m+\mu^{\frac{1}{p}}}^M \sum_{k=n+\nu^{\frac{1}{p}}}^N c_{j,k} \sin(jx) \sin(ky) \right| \leq \sum_{j=m+\mu^{\frac{1}{p}}}^M \sum_{k=n+\nu^{\frac{1}{p}}}^N |c_{j,k}| \\ &< 16\varepsilon \sum_{j=m+\mu^{\frac{1}{p}}}^{m+\mu-1} \sum_{k=n+\nu^{\frac{1}{p}}}^{n+\nu-1} \frac{1}{(j+1) \ln(j+1)} \frac{1}{(k+1) \ln(k+1)} \\ &\leq 16\varepsilon \sum_{j=m+\mu^{\frac{1}{p}}}^{m+\mu-1} \int_j^{j+1} \frac{1}{x \ln x} dx \sum_{k=n+\nu^{\frac{1}{p}}}^{n+\nu-1} \int_k^{k+1} \frac{1}{y \ln y} dy \\ &\leq 16\varepsilon \int_{n+\nu^{\frac{1}{p}}}^{n+\nu} \int_{m+\mu^{\frac{1}{p}}}^{m+\mu} \frac{1}{x \ln x} \frac{1}{y \ln y} dx dy \leq 16\varepsilon \ln^2 p. \end{aligned}$$

Przypadek (b): $\max\{\mu, \eta\} < m \leq M$ oraz $\eta < n \leq N \leq \nu$. W tym przypadku mamy do rozważenia dwa przypadki:

(b_1) : $n + \nu^{\frac{1}{p}} > N$. Wykorzystując (3.29) otrzymujemy

$$\sum_{j=m}^M \sum_{k=n}^N c_{j,k} \sin(jx) \sin(ky) = \sum_{k=n}^N \left(k \cos(kq_k) \left(y - \frac{2l_2\pi}{r} \right) + \sin(k \frac{2l_2\pi}{r}) \right) \sum_{j=m}^M c_{j,k} \sin(jx)$$

$$\begin{aligned}
 &= \left(y - \frac{2l_2\pi}{r} \right) \sum_{k=n}^N k \cos(kq_k) \sum_{j=m}^M c_{j,k} \sin(jx) + \sum_{k=n}^N \sum_{j=m}^M c_{j,k} \sin\left(k \frac{2l_2\pi}{r}\right) \sin(jx) \\
 &= S_7 + S_8.
 \end{aligned}$$

Korzystając z Lematu 11 oraz (3.27) mamy

$$\begin{aligned}
 |S_7| &\leq \left(y - \frac{2l_2\pi}{r} \right) \sum_{k=n}^{n+\nu^{\frac{1}{p}}-1} k \left| \sum_{j=m}^M c_{j,k} \sin(jx) \right| \\
 &\leq \frac{1}{\nu^{\frac{1}{p}}} \sum_{k=n}^{n+\nu^{\frac{1}{p}}-1} \frac{k}{2 \left(\frac{rx}{\pi} - 2l_1 \right)} \left(\sum_{j=m}^M |\Delta_{r0} c_{j,k}| + \sum_{j=M+1}^{M+r} |c_{j,k}| + \sum_{j=m}^{m+r-1} |c_{j,k}| \right) \\
 &\leq \frac{\pi(\mu+1)^{\frac{1}{p}}}{2r\nu^{\frac{1}{p}}} \sum_{k=n}^{n+\nu^{\frac{1}{p}}-1} k \left(\sum_{j=m}^M |\Delta_{r0} c_{j,k}| + \sum_{j=M+1}^{M+r} |c_{j,k}| + \sum_{j=m}^{m+r-1} |c_{j,k}| \right) \\
 &\leq \frac{\pi}{2\nu^{\frac{1}{p}}r} \sum_{k=n}^{n+\nu^{\frac{1}{p}}-1} \left(m^{\frac{1}{p}} \sup_{k \geq n} k \sum_{j=m}^M |\Delta_{r0} c_{j,k}| + \sum_{j=M+1}^{M+r} jk \ln j \ln k |c_{j,k}| + \sum_{j=m}^{m+r-1} jk \ln j \ln k |c_{j,k}| \right) \\
 &< \frac{\pi}{2\nu^{\frac{1}{p}}r} \sum_{k=n}^{n+\nu^{\frac{1}{p}}-1} (\varepsilon + r\varepsilon + r\varepsilon) \leq 3\pi\varepsilon.
 \end{aligned} \tag{3.31}$$

Dalej, korzystając z Lematu 11, (3.27) oraz definicji klasy $DGM(p, {}_2\alpha, {}_2\beta, {}_2\gamma, r)$ dostajemy

$$\begin{aligned}
 |S_8| &\leq \sum_{k=n}^{n+\nu^{\frac{1}{p}}-1} \left| \sum_{j=m}^M c_{j,k} \sin(jx) \right| \leq \sum_{k=n}^{n+\nu^{\frac{1}{p}}-1} \frac{1}{2 \left(\frac{rx}{\pi} - 2l_1 \right)} \left(\sum_{j=m}^M |\Delta_{r0} c_{j,k}| + \sum_{j=M+1}^{M+r} |c_{j,k}| + \sum_{j=m}^{m+r-1} |c_{j,k}| \right) \\
 &\leq \frac{\pi(\mu+1)^{\frac{1}{p}}}{2r} \sum_{k=n}^{n+\nu^{\frac{1}{p}}-1} \left(\sum_{j=m}^M |\Delta_{r0} c_{j,k}| + \sum_{j=M+1}^{M+r} |c_{j,k}| + \sum_{j=m}^{m+r-1} |c_{j,k}| \right) \\
 &\leq \frac{\pi}{2r} \left(m^{\frac{1}{p}} \sum_{k=n}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{j=2^s m}^{2^{s+1}m-1} |\Delta_{r0} c_{j,k}| + \sum_{j=M+1}^{M+r} \sup_{j \geq m} j \ln j \sum_{k=n}^{\infty} |c_{j,k}| + \sum_{j=m}^{m+r-1} \sup_{j \geq m} j \ln j \sum_{k=n}^{\infty} |c_{j,k}| \right) \\
 &< \frac{\pi}{2r} \left(m^{\frac{1}{p}} \sum_{k=n}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} (2^s m)^{1-\frac{1}{p}} \left(\sum_{j=2^s m}^{2^{s+1}m-1} |\Delta_{r0} c_{j,k}|^p \right)^{\frac{1}{p}} + 2r\varepsilon \right) \\
 &\leq \frac{\pi}{2r} \left(m^{\frac{1}{p}} \sum_{k=n}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{C}{(2^s m)^{\frac{1}{p}}} \max_{b_1(2^s m) \leq M \leq \lambda b_1(2^s m)} \sum_{j=M}^{2M} |c_{j,k}| + 2r\varepsilon \right) \\
 &\leq \frac{\pi}{2r} \left(C \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{2^{\frac{s}{p}}} \sum_{j=b_1(2^s m)}^{2\lambda b_1(2^s m)} \frac{1}{j \ln j} \left(\sup_{j \geq m} j \ln j \sum_{k=n}^{\infty} |c_{j,k}| \right) + 2r\varepsilon \right) \\
 &\leq \frac{\pi\varepsilon}{2r} \left(C \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{2^{\frac{s}{p}}} \sum_{j=b_1(2^s m)}^{2\lambda b_1(2^s m)} \frac{1}{j \ln j} + 2r\varepsilon \right) \leq \frac{\pi\varepsilon}{r} \left(C \lambda \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{2^{\frac{s}{p}}} + r \right) \ll \varepsilon.
 \end{aligned} \tag{3.32}$$

Zatem nierówność (3.26) jest spełniona.

(b₂): $n + \nu^{\frac{1}{p}} \leq N$. Wtedy korzystając z (3.29) mamy

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=m}^M \sum_{k=n}^N c_{j,k} \sin(jx) \sin(ky) &= \sum_{k=n}^{n+\nu^{\frac{1}{p}}-1} \sin(ky) \sum_{j=m}^M c_{j,k} \sin(jx) + \sum_{k=n+\nu^{\frac{1}{p}}}^N \sin(ky) \sum_{j=m}^M c_{j,k} \sin(jx) \\
 &= \sum_{k=n}^{n+\nu^{\frac{1}{p}}-1} \left(\left(k \cos(kq_k) \left(y - \frac{2l_2\pi}{r} \right) \right) + \sin\left(k \frac{2l_2\pi}{r}\right) \right) \sum_{j=m}^M c_{j,k} \sin(jx) \\
 &\quad + \sum_{k=n+\nu^{\frac{1}{p}}}^N \sin(ky) \sum_{j=m}^M c_{j,k} \sin(jx) \\
 &= \left(y - \frac{2l_2\pi}{r} \right) \sum_{k=n}^{n+\nu^{\frac{1}{p}}-1} k \cos(kq_k) \sum_{j=m}^M c_{j,k} \sin(jx) + \sum_{k=n}^{n+\nu^{\frac{1}{p}}-1} \sum_{j=m}^M c_{j,k} \sin\left(k \frac{2l_2\pi}{r}\right) \sin(jx) \\
 &\quad + \sum_{k=n+\nu^{\frac{1}{p}}}^N \sin(ky) \sum_{j=m}^M c_{j,k} \sin(jx) = S_9 + S_{10} + S_{11}.
 \end{aligned}$$

Analogicznie jak w (3.31) oraz (3.32) uzyskujemy, że $|S_9| \leq 3\pi\varepsilon$, $|S_{10}| \ll \varepsilon$. Wykorzystując Lemat 5, Lemat 11, (3.27), definicję klasy $DGM(p, {}_2\alpha, {}_2\beta, {}_2\gamma, r)$ oraz nierówność Höldera z $p > 1$ otrzymujemy

$$\begin{aligned}
 |S_{11}| &\leq \sum_{k=n+\nu^{\frac{1}{p}}}^N \left| \sum_{j=m}^M c_{j,k} \sin(jx) \right| \\
 &\leq \sum_{k=n+\nu^{\frac{1}{p}}}^N \frac{1}{2\left(\frac{rx}{\pi} - 2l_1\right)} \left(\sum_{j=m}^M |\Delta_{r0}c_{j,k}| + \sum_{j=M+1}^{M+r} |c_{j,k}| + \sum_{j=m}^{m+r-1} |c_{j,k}| \right) \\
 &\leq \frac{\pi(\mu+1)^{\frac{1}{p}}}{2r} \sum_{k=n+\nu^{\frac{1}{p}}}^N \left(\sum_{j=m}^M |\Delta_{r0}c_{j,k}| + \sum_{j=M+1}^{M+r} |c_{j,k}| + \sum_{j=m}^{m+r-1} |c_{j,k}| \right) \\
 &< \frac{\pi}{2r} m^{\frac{1}{p}} \sum_{k=n}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} (2^s m)^{1-\frac{1}{p}} \left(\sum_{j=2^s m}^{2^{s+1}m-1} |\Delta_{r0}c_{j,k}|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \frac{8\pi r\varepsilon}{2r} \sum_{k=n+\nu^{\frac{1}{p}}}^{n+\nu-1} \frac{1}{(k+1) \ln(k+1)} \\
 &\leq \frac{\pi}{2r} m^{\frac{1}{p}} \sum_{k=n}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{C}{(2^s m)^{\frac{1}{p}}} \max_{b_1(2^s m) \leq M \leq \lambda b_1(2^s m)} \sum_{j=M}^{2M} |c_{j,k}| + 4\pi\varepsilon \sum_{k=n+\nu^{\frac{1}{p}}}^{n+\nu-1} \int_k^{k+1} \frac{1}{x \ln x} dx \\
 &\leq \frac{C\pi}{2r} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{2^{\frac{s}{p}}} \sum_{j=b_1(2^s m)}^{2\lambda b_1(2^s m)} \frac{1}{j \ln j} \left(\sup_{j \geq m} j \ln j \sum_{k=n}^{\infty} |c_{j,k}| \right) + 4\pi\varepsilon \int_{n+\nu^{\frac{1}{p}}}^{n+\nu} \frac{1}{x \ln x} dx \\
 &\leq \frac{C\pi\varepsilon}{2r} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{2^{\frac{s}{p}}} \sum_{j=b_1(2^s m)}^{2\lambda b_1(2^s m)} \frac{1}{j \ln j} + 4\pi\varepsilon \ln p \\
 &\leq \frac{C\pi\varepsilon 2\lambda}{2r} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{2^{\frac{s}{p}}} + 4\pi\varepsilon \ln p \ll \varepsilon.
 \end{aligned} \tag{3.33}$$

Stąd nierówność (3.26) jest prawdziwa.

Przypadek (c): $\eta < m \leq M \leq \mu$ oraz $\max\{\eta, \nu\} < n \leq N$. Jest to symetryczny odpowiednik przypadku (b), więc dowód jest analogiczny. Zatem nierówność (3.26) jest spełniona.

Przypadek (d): $\max\{\eta, \mu\} < m \leq M$ oraz $\max\{\eta, \nu\} < n \leq N$. Wykorzystując Lemat 3 otrzymujemy

$$\begin{aligned}
 \left| \sum_{j=m}^M \sum_{k=n}^N c_{j,k} \sin(jx) \sin(ky) \right| &= \left| \sum_{j=m}^M \sin(jx) \sum_{k=n}^N c_{j,k} \sin(ky) \right| \\
 &= \left| \sum_{j=m}^M \sin(jx) \left(- \sum_{k=n}^N \Delta_{0r} c_{j,k} \tilde{D}_{k,r}(y) + \sum_{k=N+1}^{N+r} |c_{j,k}| |\tilde{D}_{k,-r}(y)| \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \sum_{k=n}^{n+r-1} c_{j,k} \tilde{D}_{k,-r}(y) \right) \right| \\
 &\leq \left| \sum_{j=m}^M \sum_{k=n}^N \Delta_{rr} c_{j,k} \tilde{D}_{j,r}(x) \tilde{D}_{k,r}(y) \right| + \left| \sum_{j=M+1}^{M+r} \sum_{k=n}^N \Delta_{0r} c_{j,k} \tilde{D}_{j,-r}(x) \tilde{D}_{k,r}(y) \right| \\
 &\quad + \left| \sum_{j=m}^{m+r-1} \sum_{k=n}^N \Delta_{0r} c_{j,k} \tilde{D}_{j,-r}(x) \tilde{D}_{k,r}(y) \right| + \left| \sum_{j=m}^M \sum_{k=N+1}^{N+r} \Delta_{r0} c_{j,k} \tilde{D}_{j,r}(x) \tilde{D}_{k,-r}(y) \right| \\
 &\quad + \left| \sum_{j=m}^M \sum_{k=n}^{n+r-1} \Delta_{r0} c_{j,k} \tilde{D}_{j,r}(x) \tilde{D}_{k,-r}(y) \right| + \left| \sum_{j=M+1}^{M+r} \sum_{k=N+1}^{N+r} c_{j,k} \tilde{D}_{j,-r}(x) \tilde{D}_{k,-r}(y) \right| \\
 &\quad + \left| \sum_{j=m}^{m+r-1} \sum_{k=N+1}^{N+r} c_{j,k} \tilde{D}_{j,-r}(x) \tilde{D}_{k,-r}(y) \right| + \left| \sum_{j=M}^{M+r} \sum_{k=n}^{n+r-1} c_{j,k} \tilde{D}_{j,-r}(x) \tilde{D}_{k,-r}(y) \right| \\
 &\quad + \left| \sum_{j=m}^{m+r-1} \sum_{k=n}^{n+r-1} c_{j,k} \tilde{D}_{j,-r}(x) \tilde{D}_{k,-r}(y) \right|.
 \end{aligned}$$

Korzystając z (3.16) oraz (3.27) uzyskujemy

$$\begin{aligned}
 \left| \sum_{j=m}^M \sum_{k=n}^N c_{j,k} \sin(jx) \sin(ky) \right| &\leq \frac{\pi^2}{r^2} (\mu + 1)^{\frac{1}{p}} (\nu + 1)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{j=m}^M \sum_{k=n}^N |\Delta_{rr} c_{j,k}| + \sum_{j=M+1}^{M+r} \sum_{k=n}^N |\Delta_{0r} c_{j,k}| \right. \\
 &\quad + \sum_{j=m}^{m+r-1} \sum_{k=n}^N |\Delta_{0r} c_{j,k}| + \sum_{j=m}^M \sum_{k=N+1}^{N+r} |\Delta_{r0} c_{j,k}| + \sum_{j=m}^M \sum_{k=n}^{n+r-1} |\Delta_{r0} c_{j,k}| + \sum_{j=M+1}^{M+r} \sum_{k=N+1}^{N+r} |c_{j,k}| \\
 &\quad \left. + \sum_{j=m}^{m+r-1} \sum_{k=N+1}^{N+r} |c_{j,k}| + \sum_{j=M}^{M+r} \sum_{k=n}^{n+r-1} |c_{j,k}| + \sum_{j=m}^{m+r-1} \sum_{k=n}^{n+r-1} |c_{j,k}| \right) \\
 &\leq \frac{\pi^2}{r^2} \left(m^{\frac{1}{p}} n^{\frac{1}{p}} \sum_{j=m}^{\infty} \sum_{k=n}^{\infty} |\Delta_{rr} c_{j,k}| + 2rm^{\frac{1}{p}} \sup_{k \geq n} k \sum_{j=m}^{\infty} |\Delta_{r0} c_{j,k}| \right. \\
 &\quad \left. + 2rn^{\frac{1}{p}} \sup_{j \geq m} j \sum_{k=n}^{\infty} |\Delta_{0r} c_{j,k}| + 4r^2 \sup_{j \geq m} j k \ln j \ln k |c_{j,k}| \right) \\
 &\leq \frac{\pi^2}{r^2} (\varepsilon + 2r\varepsilon + 2r\varepsilon + 4r^2\varepsilon) \leq 4\pi^2\varepsilon. \tag{3.34}
 \end{aligned}$$

Przypadek (e): $\eta < m \leq \mu < M$ i $\eta < n \leq N \leq \nu$. Wtedy

$$\left| \sum_{j=m}^M \sum_{k=n}^N c_{j,k} \sin(jx) \sin(ky) \right| \leq \left| \sum_{j=m}^{\mu} \sum_{k=n}^N c_{j,k} \sin(jx) \sin(ky) \right| + \left| \sum_{j=\mu+1}^M \sum_{k=n}^N c_{j,k} \sin(jx) \sin(ky) \right|$$

oraz korzystając z Przypadku (a) i (b) otrzymujemy (3.26).

Przypadek (f): $\eta < m \leq M \leq \mu$ i $\eta < n \leq \nu < N$. W tym przypadku mamy

$$\left| \sum_{j=m}^M \sum_{k=n}^N c_{j,k} \sin(jx) \sin(ky) \right| \leq \left| \sum_{j=m}^M \sum_{k=n}^{\nu} c_{j,k} \sin(jx) \sin(ky) \right| + \left| \sum_{j=m}^M \sum_{k=\nu+1}^N c_{j,k} \sin(jx) \sin(ky) \right|.$$

Korzystając z Przypadku (a) i (c) uzyskujemy (3.26).

Przypadek (g): $\max\{\eta, \mu\} < m \leq M$ i $\eta < n \leq \nu < N$. Wtedy

$$\left| \sum_{j=m}^M \sum_{k=n}^N c_{j,k} \sin(jx) \sin(ky) \right| \leq \left| \sum_{j=m}^{\mu} \sum_{k=n}^N c_{j,k} \sin(jx) \sin(ky) \right| + \left| \sum_{j=\mu+1}^M \sum_{k=n}^N c_{j,k} \sin(jx) \sin(ky) \right|$$

oraz korzystając z Przypadku (c) i (d) otrzymujemy (3.26).

Przypadek (h): $\eta < m \leq \mu < M$ i $\max\{\eta, \nu\} < n \leq N$. Teraz mamy

$$\left| \sum_{j=m}^M \sum_{k=n}^N c_{j,k} \sin(jx) \sin(ky) \right| \leq \left| \sum_{j=m}^M \sum_{k=n}^{\nu} c_{j,k} \sin(jx) \sin(ky) \right| + \left| \sum_{j=m}^M \sum_{k=\nu+1}^N c_{j,k} \sin(jx) \sin(ky) \right|.$$

Korzystając z Przypadku (b) i (d) uzyskujemy (3.26).

Przypadek (i): $\eta < m \leq \mu < M$ i $\eta < n \leq \nu < N$. Wtedy

$$\begin{aligned} \left| \sum_{j=m}^M \sum_{k=n}^N c_{j,k} \sin(jx) \sin(ky) \right| &\leq \left| \sum_{j=m}^{\mu} \sum_{k=n}^{\nu} c_{j,k} \sin(jx) \sin(ky) \right| + \left| \sum_{j=\mu+1}^M \sum_{k=n}^{\nu} c_{j,k} \sin(jx) \sin(ky) \right| \\ &\quad + \left| \sum_{j=m}^{\mu} \sum_{k=\nu+1}^N c_{j,k} \sin(jx) \sin(ky) \right| + \left| \sum_{j=\mu+1}^M \sum_{k=\nu+1}^N c_{j,k} \sin(jx) \sin(ky) \right|. \end{aligned}$$

Korzystając z Przypadków (a) - (d) otrzymujemy (3.26).

Założmy teraz, że $x \in (\frac{(2l_1+1)\pi}{r}, \frac{2(l_1+1)\pi}{r})$, $y \in (\frac{2l_2\pi}{r}, \frac{(2l_2+1)\pi}{r}]$, gdzie $l_1 \in \{0, 1, \dots, [\frac{r}{2}] - 1\}$ i $l_2 \in \{0, 1, \dots, [\frac{r}{2}]\}$, gdy $r \geq 3$ jest liczbą nieparzystą, oraz $l_1, l_2 \in \{0, 1, \dots, [\frac{r}{2}] - 1\}$, gdy r jest liczbą parzystą. Niech $\mu = \left\lfloor \frac{1}{\frac{2(l_1+1)\pi}{r} - x} \right\rfloor^p$ oraz $\nu = \left\lfloor \frac{1}{y - \frac{2l_2\pi}{r}} \right\rfloor^p$. Wykorzystując elementarne przekształcenia otrzymujemy

$$\begin{aligned} \sin(jx) \sin(ky) &= \left(\sin(jx) - \sin(j \frac{2(l_1+1)\pi}{r}) \right) \left(\sin(ky) - \sin(k \frac{2l_2\pi}{r}) \right) \\ &\quad + \left(\sin(jx) - \sin(j \frac{2(l_1+1)\pi}{r}) \right) \sin\left(k \frac{2l_2\pi}{r}\right) \\ &\quad + \sin\left(j \frac{2(l_1+1)\pi}{r}\right) \left(\sin(ky) - \sin(k \frac{2l_2\pi}{r}) \right) \\ &\quad + \sin\left(j \frac{2(l_1+1)\pi}{r}\right) \sin\left(k \frac{2l_2\pi}{r}\right). \end{aligned} \tag{3.35}$$

Stosując twierdzenie Lagrange'a o wartości średniej do funkcji $f(x) = \sin(jx)$ oraz $f(y) = \sin(ky)$ odpowiednio na przedziałach $[x, \frac{2(l_1+1)\pi}{r}]$ oraz $[\frac{2l_2\pi}{r}, y]$, uzyskujemy, że dla dowolnego $j, k \in \mathbb{N}$ istnieją liczby $z_j \in (x, \frac{2(l_1+1)\pi}{r})$, oraz $q_k \in (\frac{2l_2\pi}{r}, y)$ takie, że

$$\sin\left(\frac{2(l_1+1)\pi}{r}\right) - \sin(jx) = j \cos(jz_j) \left(\frac{2(l_1+1)\pi}{r} - x \right),$$

$$\sin(ky) - \sin\left(k\frac{2l_2\pi}{r}\right) = k \cos(kq_k)\left(y - \frac{2l_2\pi}{r}\right). \quad (3.36)$$

Mamy do rozważenia dziewięć przypadków: (a*)-(i*).

Przypadek (a*): $\eta < m \leq M \leq \mu$ oraz $\eta < n \leq N \leq \nu$. W przypadku (a*) mamy do rozpatrzenia cztery przypadki:

(a₁*) : $m + \mu^{\frac{1}{p}} > M$ oraz $n + \nu^{\frac{1}{p}} > N$. Wykorzystując (3.27), (3.35) i (3.36) uzyskujemy

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{j=m}^M \sum_{k=n}^N c_{j,k} \sin(jx) \sin(ky) \right| \\ & \leq \left| \sum_{j=m}^M \sum_{k=n}^N c_{j,k} \left(\sin(jx) - \sin\left(j\frac{2(l_1+1)\pi}{r}\right) \right) \left(\sin(ky) - \sin\left(k\frac{2l_2\pi}{r}\right) \right) \right| \\ & + \left| \sum_{j=m}^M \sum_{k=n}^N c_{j,k} \left(\sin(jx) - \sin\left(j\frac{2(l_1+1)\pi}{r}\right) \right) \sin\left(k\frac{2l_2\pi}{r}\right) \right| \\ & + \left| \sum_{j=m}^M \sum_{k=n}^N c_{j,k} \sin\left(j\frac{2(l_1+1)\pi}{r}\right) \left(\sin(ky) - \sin\left(k\frac{2l_2\pi}{r}\right) \right) \right| \\ & + \left| \sum_{j=m}^M \sum_{k=n}^N c_{j,k} \sin\left(j\frac{2(l_1+1)\pi}{r}\right) \sin\left(k\frac{2l_2\pi}{r}\right) \right| \\ & < \left(\frac{2(l_1+1)\pi}{r} - x \right) \left(y - \frac{2l_2\pi}{r} \right) \sum_{j=m}^M \sum_{k=n}^N |c_{j,k} j \cos(jz_j) k \cos(kq_k)| \\ & + \left(\frac{2(l_1+1)\pi}{r} - x \right) \sum_{j=m}^M \sum_{k=n}^N \left| c_{j,k} j \cos(jz_j) \sin\left(k\frac{(2l_2+1)\pi}{r}\right) \right| \\ & + \left(y - \frac{2l_2\pi}{r} \right) \sum_{j=m}^M \sum_{k=n}^N \left| c_{j,k} k \cos(kq_k) \sin\left(j\frac{2(l_1+1)\pi}{r}\right) \right| + \varepsilon \\ & \leq \frac{1}{\mu^{\frac{1}{p}} \nu^{\frac{1}{p}}} \sum_{j=m}^{m+\mu^{\frac{1}{p}}-1} \sum_{k=n}^{n+\nu^{\frac{1}{p}}-1} j k \ln j \ln k |c_{j,k}| \\ & + \frac{1}{\mu^{\frac{1}{p}}} \sum_{j=m}^{m+\mu^{\frac{1}{p}}-1} \sup_{j \geq m} j \ln j \sum_{k=n}^{\infty} |c_{j,k}| + \frac{1}{\nu^{\frac{1}{p}}} \sum_{k=n}^{n+\nu^{\frac{1}{p}}-1} \sup_{k \geq n} k \ln k \sum_{j=m}^{\infty} |c_{j,k}| + \varepsilon < 4\varepsilon. \end{aligned}$$

(a₂*) : $m + \mu^{\frac{1}{p}} > M$ oraz $n + \nu^{\frac{1}{p}} \leq N$. Wtedy

$$\begin{aligned} \sum_{j=m}^M \sum_{k=n}^N c_{j,k} \sin(jx) \sin(ky) &= \sum_{j=m}^M \sum_{k=n}^{n+\nu^{\frac{1}{p}}-1} c_{j,k} \sin(jx) \sin(ky) + \sum_{j=m}^M \sum_{k=n+\nu^{\frac{1}{p}}}^N c_{j,k} \sin(jx) \sin(ky) \\ &= S_1^* + S_2^*. \end{aligned}$$

Analogicznie jak w przypadku (a₁*) dostajemy, że

$$|S_1^*| = \left| \sum_{j=m}^M \sum_{k=n}^{n+\nu^{\frac{1}{p}}-1} c_{j,k} \sin(jx) \sin(ky) \right| < 4\varepsilon.$$

Korzystając z Lematu 5, (3.27) oraz (3.36) otrzymujemy analogicznie jak przy szacowaniu wielkości $|S_2|$, że

$$\begin{aligned}
 |S_2^*| &= \left| \sum_{j=m}^M \sum_{k=n+\nu^{\frac{1}{p}}}^N c_{j,k} \sin(jx) \sin(ky) \right| \\
 &= \left| \sum_{j=m}^M \sum_{k=n+\nu^{\frac{1}{p}}}^N c_{j,k} \left(-j \cos(jz_j) \left(\frac{2(l_1+1)\pi}{r} - x \right) + \sin \left(j \frac{2(l_1+1)\pi}{r} \right) \right) \sin(ky) \right| \\
 &\leq \left(\frac{2(l_1+1)\pi}{r} - x \right) \sum_{j=m}^M \sum_{k=n+\nu^{\frac{1}{p}}}^N |c_{j,k} j \cos(jz_j)| + \sum_{j=m}^M \sum_{k=n+\nu^{\frac{1}{p}}}^N \left| c_{j,k} \sin \left(j \frac{2(l_1+1)\pi}{r} \right) \sin(ky) \right| \\
 &< \frac{4\varepsilon}{\mu^{\frac{1}{p}}} \sum_{j=m}^{m+\mu^{\frac{1}{p}}-1} \sum_{k=n+\nu^{\frac{1}{p}}}^{n+\nu-1} \frac{1}{(k+1) \ln(k+1)} + 4 \sup_{k \geq n} k \ln k \sum_{j=m}^{\infty} \left| c_{j,k} \sum_{k=n+\nu^{\frac{1}{p}}}^{n+\nu-1} \frac{1}{(k+1) \ln(k+1)} \right| \\
 &\leq \frac{4\varepsilon}{\mu^{\frac{1}{p}}} \sum_{j=m}^{m+\mu^{\frac{1}{p}}-1} \sum_{k=n+\nu^{\frac{1}{p}}}^{n+\nu-1} \int_k^{k+1} \frac{1}{x \ln x} dx + 4 \sup_{k \geq n} k \ln k \sum_{j=m}^{\infty} |c_{j,k}| \sum_{k=n+\nu^{\frac{1}{p}}}^{n+\nu-1} \int_k^{k+1} \frac{1}{x \ln x} dx \\
 &\leq \frac{4\varepsilon}{\mu^{\frac{1}{p}}} \sum_{j=m}^{m+\mu^{\frac{1}{p}}-1} \int_{n+\nu^{\frac{1}{p}}}^{n+\nu} \frac{1}{k \ln k} dk + 4\varepsilon \int_{n+\nu^{\frac{1}{p}}}^{n+\nu} \frac{1}{k \ln k} dk \leq \frac{4\varepsilon}{\mu^{\frac{1}{p}}} \sum_{j=m}^{m+\mu^{\frac{1}{p}}-1} \ln p + 4\varepsilon \ln p \\
 &\leq 8\varepsilon \ln p.
 \end{aligned}$$

Zatem

$$\left| \sum_{j=m}^M \sum_{k=n}^N c_{j,k} \sin(jx) \sin(ky) \right| < \varepsilon (4 + 8 \ln p). \quad (3.37)$$

(a_3^*) : $m + \mu^{\frac{1}{p}} \leq M$ oraz $n + \nu^{\frac{1}{p}} > N$. Analogicznie jak w (a_2^*) otrzymujemy, że (3.37) jest prawdziwa.

(a_4^*) : $m + \mu^{\frac{1}{p}} \leq M$ oraz $n + \nu^{\frac{1}{p}} \leq N$. Wtedy

$$\begin{aligned}
 &\sum_{j=m}^M \sum_{k=n}^N c_{j,k} \sin(jx) \sin(ky) \\
 &= \sum_{j=m}^{m+\mu^{\frac{1}{p}}-1} \sum_{k=n}^{n+\nu^{\frac{1}{p}}-1} c_{j,k} \sin(jx) \sin(ky) + \sum_{j=m+\mu^{\frac{1}{p}}}^M \sum_{k=n}^{n+\nu^{\frac{1}{p}}-1} c_{j,k} \sin(jx) \sin(ky) \\
 &+ \sum_{j=m}^{m+\mu^{\frac{1}{p}}-1} \sum_{k=n+\nu^{\frac{1}{p}}}^N c_{j,k} \sin(jx) \sin(ky) + \sum_{j=m+\mu^{\frac{1}{p}}}^M \sum_{k=n+\nu^{\frac{1}{p}}}^N c_{j,k} \sin(jx) \sin(ky) \\
 &= S_3^* + S_4^* + S_5^* + S_6^*.
 \end{aligned}$$

Analogicznie jak w (a_1^*) uzyskujemy, że

$$|S_3^*| = \left| \sum_{j=m}^{m+\mu^{\frac{1}{p}}-1} \sum_{k=n}^{n+\nu^{\frac{1}{p}}-1} c_{j,k} \sin(jx) \sin(ky) \right| < 4\varepsilon.$$

Dodatkowo, wykorzystując oszacowania z (a_2^*) , otrzymujemy

$$\begin{aligned}
 |S_4^*| &= \left| \sum_{j=m+\mu^{\frac{1}{p}}}^M \sum_{k=n}^{n+\nu^{\frac{1}{p}}-1} c_{j,k} \sin(jx) \sin(ky) \right| \\
 &< \left| \left(y - \frac{2l_2\pi}{r} \right) \sum_{j=m+\mu^{\frac{1}{p}}}^M \sum_{k=n}^{n+\nu^{\frac{1}{p}}-1} c_{j,k} \sin(jx) k \cos(kq_k) + \sum_{j=m+\mu^{\frac{1}{p}}}^M \sum_{k=n}^{n+\nu^{\frac{1}{p}}-1} c_{j,k} \sin(jx) \sin\left(k \frac{2l_2\pi}{r}\right) \right| \\
 &< \frac{4\varepsilon}{\nu^{\frac{1}{p}}} \sum_{j=m+\mu^{\frac{1}{p}}}^{m+\mu-1} \sum_{k=n}^{n+\nu^{\frac{1}{p}}-1} \frac{1}{(j+1) \ln(j+1)} + 4 \sup_{j \geq m} j \ln j \sum_{k=n}^{\infty} |c_{j,k}| \sum_{j=m+\mu^{\frac{1}{p}}}^{m+\mu-1} \frac{1}{(j+1) \ln(j+1)} \\
 &\leq 8\varepsilon \sum_{j=m+\mu^{\frac{1}{p}}}^{m+\mu-1} \int_j^{j+1} \frac{1}{x \ln x} dx \leq 8\varepsilon \int_{j+\mu^{\frac{1}{p}}}^{j+\mu} \frac{1}{x \ln x} dx \leq 8\varepsilon \ln p
 \end{aligned}$$

oraz

$$|S_5^*| = \left| \sum_{j=m}^{m+\mu^{\frac{1}{p}}-1} \sum_{k=n+\nu^{\frac{1}{p}}}^N c_{j,k} \sin(jx) \sin(ky) \right| < 8\varepsilon \ln p.$$

Dalej, korzystając z Lematu 5, dostajemy, że $|S_6^*| < 16\varepsilon \ln^2 p$.

Przypadek (b^*) : $\max\{\mu, \eta\} < m \leq M$ oraz $\eta < n \leq N \leq \nu$. W przypadku (b^*) mamy dwa przypadki do rozważenia:

(b_1^*) : $n + \nu^{\frac{1}{p}} > N$. Analogicznie jak w (b_1) , korzystając z (3.36) otrzymujemy

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=m}^M \sum_{k=n}^N c_{j,k} \sin(jx) \sin(ky) &= \left(y - \frac{2l_2\pi}{r} \right) \sum_{k=n}^N k \cos(kq_k) \sum_{j=m}^M c_{j,k} \sin(jx) \\
 &+ \sum_{k=n}^N \sum_{j=m}^M c_{j,k} \sin\left(k \frac{2l_2\pi}{r}\right) \sin(jx) = S_7^* + S_8^*.
 \end{aligned}$$

W podobny sposób jak przy szacowaniu wielkości $|S_7|$ korzystając z (3.14) zamiast (3.12) oraz (3.27) uzyskujemy

$$\begin{aligned}
 |S_7^*| &\leq \left(y - \frac{2l_2\pi}{r} \right) \sum_{k=n}^{n+\nu^{\frac{1}{p}}-1} k \left| \sum_{j=m}^M c_{j,k} \sin(jx) \right| \\
 &\leq \frac{1}{\nu^{\frac{1}{p}}} \sum_{k=n}^{n+\nu^{\frac{1}{p}}-1} \frac{k}{2 \left(2(l_1+1) - \frac{rx}{\pi} \right)} \left(\sum_{j=m}^M |\Delta_{r0} c_{j,k}| + \sum_{j=M+1}^{M+r} |c_{j,k}| + \sum_{j=m}^{m+r-1} |c_{j,k}| \right) \\
 &< \frac{\pi}{2\nu^{\frac{1}{p}} r} \sum_{k=n}^{n+\nu^{\frac{1}{p}}-1} (\varepsilon + r\varepsilon + r\varepsilon) \leq 3\pi\varepsilon.
 \end{aligned} \tag{3.38}$$

Dalej, analogicznie jak przy szacowaniu wielkości $|S_8|$, wykorzystując (3.14) zamiast (3.12), (3.27) oraz definicję klasy $DGM(p, {}_2\alpha, {}_2\beta, {}_2\gamma, r)$ otrzymujemy

$$|S_8^*| \leq \sum_{k=n}^{n+\nu^{\frac{1}{p}}-1} \left| \sum_{j=m}^M c_{j,k} \sin(jx) \right|$$

$$\begin{aligned}
 &\leq \sum_{k=n}^{n+\nu^{\frac{1}{p}}-1} \frac{1}{2\left(2(l_1+1) - \frac{rx}{\pi}\right)} \left(\sum_{j=m}^M |\Delta_{r0}c_{j,k}| + \sum_{j=M+1}^{M+r} |c_{j,k}| + \sum_{j=m}^{m+r-1} |c_{j,k}| \right) \\
 &< \frac{\pi\varepsilon}{2r} \left(C \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{2^{\frac{s}{p}}} \sum_{j=b_1(2^s m)}^{2\lambda b_1(2^s m)} \frac{1}{j \ln j} + 2r\varepsilon \right) \leq \frac{\pi\varepsilon}{r} \left(C\lambda \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{2^{\frac{s}{p}}} + r \right) \ll \varepsilon.
 \end{aligned} \tag{3.39}$$

Zatem

$$\left| \sum_{j=m}^M \sum_{k=n}^N c_{j,k} \sin(jx) \sin(ky) \right| \ll \varepsilon.$$

(b_2^*) : $n + \nu^{\frac{1}{p}} \leq N$. Wtedy

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=m}^M \sum_{k=n}^N c_{j,k} \sin(jx) \sin(ky) &= \sum_{k=n}^{n+\nu^{\frac{1}{p}}-1} \sin(ky) \sum_{j=m}^M c_{j,k} \sin(jx) + \sum_{k=n+\nu^{\frac{1}{p}}}^N \sin(ky) \sum_{j=m}^M c_{j,k} \sin(jx) \\
 &= \sum_{k=n}^{n+\nu^{\frac{1}{p}}-1} \left(\left(k \cos(kq_k) \left(y - \frac{2l_2\pi}{r} \right) \right) + \sin\left(k \frac{2l_2\pi}{r}\right) \right) \sum_{j=m}^M c_{j,k} \sin(jx) \\
 &\quad + \sum_{k=n+\nu^{\frac{1}{p}}}^N \sin(ky) \sum_{j=m}^M c_{j,k} \sin(jx) \\
 &= \left(y - \frac{2l_2\pi}{r} \right) \sum_{k=n}^{n+\nu^{\frac{1}{p}}-1} k \cos(kq_k) \sum_{j=m}^M c_{j,k} \sin(jx) + \sum_{k=n}^{n+\nu^{\frac{1}{p}}-1} \sum_{j=m}^M c_{j,k} \sin\left(k \frac{2l_2\pi}{r}\right) \sin(jx) \\
 &\quad + \sum_{k=n+\nu^{\frac{1}{p}}}^N \sin(ky) \sum_{j=m}^M c_{j,k} \sin(jx) = S_9^* + S_{10}^* + S_{11}^*.
 \end{aligned}$$

Analogicznie jak w (3.38) oraz (3.39) otrzymujemy, że $|S_9^*| \leq 3\pi\varepsilon$, $|S_{10}^*| \ll \varepsilon$. Dalej, podobnie jak przy szacowaniu wielkości $|S_{11}^*|$, wykorzystując (3.14) zamiast (3.12), Lemat 5, Lemat 11, (3.27), definicję klasy $DGM(p, 2\alpha, 2\beta, 2\gamma, r)$ oraz nierówność Höldera z $p > 1$ dostajemy

$$\begin{aligned}
 |S_{11}^*| &\leq \sum_{k=n+\nu^{\frac{1}{p}}}^N \left| \sum_{j=m}^M c_{j,k} \sin(jx) \right| \\
 &\leq \sum_{k=n+\nu^{\frac{1}{p}}}^N \frac{1}{2\left(2(l_1+1) - \frac{rx}{\pi}\right)} \left(\sum_{j=m}^M |\Delta_{r0}c_{j,k}| + \sum_{j=M+1}^{M+r} |c_{j,k}| + \sum_{j=m}^{m+r-1} |c_{j,k}| \right) \\
 &< \frac{C\pi\varepsilon 2\lambda}{2r} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{2^{\frac{s}{p}}} + 4\pi\varepsilon \ln p \ll \varepsilon.
 \end{aligned}$$

Zatem nierówność (3.26) jest prawdziwa.

Przypadek (c*): $\eta < m \leq M \leq \mu$ oraz $\max\{\eta, \nu\} < n \leq N$. Jest to symetryczny odpowiednik przypadku (b*), więc dowód jest analogiczny. Zatem otrzymujemy (3.26).

Przypadek (d*): $\max\{\eta, \mu\} < m \leq M$ oraz $\max\{\eta, \nu\} < n \leq N$. Analogicznie jak w przypadku (d), korzystając z (3.14) zamiast (3.12), Lematu 3 oraz (3.27) otrzymujemy

$$\left| \sum_{j=m}^M \sum_{k=n}^N c_{j,k} \sin(jx) \sin(ky) \right| \leq \frac{\pi^2}{r^2} (\mu+1)^{\frac{1}{p}} (\nu+1)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{j=m}^M \sum_{k=n}^N |\Delta_{rr}c_{j,k}| + \sum_{j=M+1}^{M+r} \sum_{k=n}^N |\Delta_{0r}c_{j,k}| \right)$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{j=m}^{m+r-1} \sum_{k=n}^N |\Delta_{0r} c_{j,k}| + \sum_{j=m}^M \sum_{k=N+1}^{N+r} |\Delta_{r0} c_{j,k}| + \sum_{j=m}^M \sum_{k=n}^{n+r-1} |\Delta_{r0} c_{j,k}| + \sum_{j=M+1}^{M+r} \sum_{k=N+1}^{N+r} |c_{j,k}| \\
 & + \sum_{j=m}^{m+r-1} \sum_{k=N+1}^{N+r} |c_{j,k}| + \sum_{j=M}^{M+r} \sum_{k=n}^{n+r-1} |c_{j,k}| + \sum_{j=m}^{m+r-1} \sum_{k=n}^{n+r-1} |c_{j,k}| \Big) \\
 & \leq \frac{\pi^2}{r^2} \left(m^{\frac{1}{p}} n^{\frac{1}{p}} \sum_{j=m}^{\infty} \sum_{k=n}^{\infty} |\Delta_{rr} c_{j,k}| + 2rm^{\frac{1}{p}} \sup_{k \geq n} k \sum_{j=m}^{\infty} |\Delta_{r0} c_{j,k}| \right. \\
 & \left. + 2rn^{\frac{1}{p}} \sup_{j \geq m} j \sum_{k=n}^{\infty} |\Delta_{0r} c_{j,k}| + 4r^2 \sup_{j \geq m} \sup_{k \geq n} jk \ln j \ln k |c_{j,k}| \right) \\
 & \leq \frac{\pi^2}{r^2} (\varepsilon + 2r\varepsilon + 2r\varepsilon + 4r^2\varepsilon) \ll \varepsilon.
 \end{aligned}$$

Przypadek (e*): $\eta < m \leq \mu < M$ i $\eta < n \leq N \leq \nu$. Wtedy, analogicznie jak w Przypadku (e) korzystając z Przypadku (a*) i (b*) uzyskujemy (3.26).

Przypadek (f*): $\eta < m \leq M \leq \mu$ i $\eta < n \leq \nu < N$. Wtedy, podobnie jak w Przypadku (f) korzystając z Przypadku (a*) i (c*) otrzymujemy (3.26).

Przypadek (g*): $\eta < m \leq \mu < M$ i $\max\{\eta, \nu\} < n \leq N$. Wtedy, analogicznie jak w Przypadku (g) korzystając z Przypadku (c*) i (d*) dostajemy (3.26).

Przypadek (h*): $\max\{\eta, \mu\} < m \leq M$ i $\eta < n \leq \nu < N$. Wtedy, tak samo jak w Przypadku (h) korzystając z Przypadku (b*) i (d*) otrzymujemy (3.26).

Przypadek (i*): $\eta < m \leq \mu < M$ i $\eta < n \leq \nu < N$. Wtedy, podobnie jak w Przypadku (i) korzystając z Przypadków (a*) - (d*) uzyskujemy (3.26).

Niech teraz $x \in (\frac{2l_1\pi}{r}, \frac{2(l_1+1)\pi}{r}]$, $y \in (\frac{2(l_2+1)\pi}{r}, \frac{2(l_2+1)\pi}{r})$, gdzie $l_1 \in \{0, 1, \dots, [\frac{r}{2}]\}$ i $l_2 \in \{0, 1, \dots, [\frac{r}{2}] - 1\}$, gdy $r \geq 3$ jest liczbą nieparzystą, oraz $l_1, l_2 \in \{0, 1, \dots, [\frac{r}{2}] - 1\}$, gdy r jest liczbą parzystą. Niech $\mu = \left[\frac{1}{x - \frac{2l_1\pi}{r}} \right]^p$ oraz $\nu = \left[\frac{1}{\frac{2(l_2+1)\pi}{r} - y} \right]^p$. Do rozważenia mamy również dziewięć przypadków: (a**) - (i**). Są to symetryczne odpowiedniki przypadków (a*) - (i*), więc oszacowania są identyczne. Zatem nierówność (3.26) jest prawdziwa.

Założmy, że $x \in (\frac{2(l_1+1)\pi}{r}, \frac{2(l_1+1)\pi}{r})$, $y \in (\frac{2(l_2+1)\pi}{r}, \frac{2(l_2+1)\pi}{r})$, gdzie $l_1, l_2 \in \{0, 1, \dots, [\frac{r}{2}] - 1\}$, gdy $r \geq 2$. Niech $\mu = \left[\frac{1}{\frac{2(l_1+1)\pi}{r} - x} \right]^p$ oraz $\nu = \left[\frac{1}{\frac{2(l_2+1)\pi}{r} - y} \right]^p$. Analogicznie, jak w poprzednich przypadkach, wykorzystując elementarne przekształcenia otrzymujemy

$$\begin{aligned}
 \sin(jx) \sin(ky) &= \left(\sin(jx) - \sin\left(j \frac{2(l_1+1)\pi}{r}\right) \right) \left(\sin(ky) - \sin\left(k \frac{2(l_2+1)\pi}{r}\right) \right) \\
 &+ \left(\sin(jx) - \sin\left(j \frac{2(l_1+1)\pi}{r}\right) \right) \sin\left(k \frac{2(l_2+1)\pi}{r}\right) \\
 &+ \sin\left(j \frac{2(l_1+1)\pi}{r}\right) \left(\sin(ky) - \sin\left(k \frac{2(l_2+1)\pi}{r}\right) \right) \\
 &+ \sin\left(j \frac{2(l_1+1)\pi}{r}\right) \sin\left(k \frac{2(l_2+1)\pi}{r}\right). \tag{3.40}
 \end{aligned}$$

Stosując twierdzenie Lagrange'a o wartości średniej do funkcji $f(x) = \sin(jx)$ oraz $f(y) = \sin(ky)$ odpowiednio na przedziałach $[x, \frac{2(l_1+1)\pi}{r}]$ oraz $[y, \frac{2(l_2+1)\pi}{r}]$, uzyskujemy, że

dla dowolnego $j, k \in \mathbb{N}$ istnieją liczby $z_j \in \left(x, \frac{2(l_1+1)\pi}{r}\right)$, oraz $q_k \in \left(y, \frac{2(l_2+1)\pi}{r}\right)$ takie, że

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{2(l_1+1)\pi}{r}\right) - \sin(jx) &= j \cos(jz_j) \left(\frac{2(l_1+1)\pi}{r} - x\right), \\ \sin\left(\frac{2(l_2+1)\pi}{r}\right) - \sin(ky) &= k \cos(kq_k) \left(\frac{2(l_2+1)\pi}{r} - y\right). \end{aligned} \quad (3.41)$$

Należy rozpatrzyć dziewięć przypadków:

Przypadek (a^{***}): $\eta < m \leq M \leq \mu$ oraz $\eta < n \leq N \leq \nu$. W przypadku (a^{***}) mamy do rozpatrzenia cztery przypadki:

(a₁^{***}): $m + \mu^{\frac{1}{p}} > M$ oraz $n + \nu^{\frac{1}{p}} > N$. Wykorzystując (3.27), (3.40) i (3.41) uzyskujemy

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{j=m}^M \sum_{k=n}^N c_{j,k} \sin(jx) \sin(ky) \right| \\ & < \left(\frac{2(l_1+1)\pi}{r} - x \right) \left(\frac{2(l_2+1)\pi}{r} - y \right) \sum_{j=m}^M \sum_{k=n}^N |j \cos(jz_j) k \cos(kq_k) c_{j,k}| \\ & + \left(\frac{2(l_1+1)\pi}{r} - x \right) \sum_{j=m}^M \sum_{k=n}^N \left| c_{j,k} j \cos(jz_j) \sin\left(k \frac{2(l_2+1)\pi}{r}\right) \right| \\ & + \left(\frac{2(l_2+1)\pi}{r} - y \right) \sum_{j=m}^M \sum_{k=n}^N \left| c_{j,k} k \cos(kq_k) \sin\left(j \frac{2(l_1+1)\pi}{r}\right) \right| + \varepsilon \\ & \leq \frac{1}{\mu^{\frac{1}{p}} \nu^{\frac{1}{p}}} \sum_{j=m}^{m+\mu^{\frac{1}{p}}-1} \sum_{k=n}^{n+\nu^{\frac{1}{p}}-1} j k \ln j \ln k |c_{j,k}| \\ & + \frac{1}{\mu^{\frac{1}{p}}} \sum_{j=m}^{m+\mu^{\frac{1}{p}}-1} \sup_{j \geq m} j \ln j \sum_{k=n}^{\infty} |c_{j,k}| + \frac{1}{\nu^{\frac{1}{p}}} \sum_{k=n}^{n+\nu^{\frac{1}{p}}-1} \sup_{k \geq n} k \ln k \sum_{j=m}^{\infty} |c_{j,k}| + \varepsilon < 4\varepsilon. \end{aligned}$$

(a₂^{***}): $m + \mu^{\frac{1}{p}} > M$ oraz $n + \nu^{\frac{1}{p}} \leq N$. Wtedy

$$\begin{aligned} \sum_{j=m}^M \sum_{k=n}^N c_{j,k} \sin(jx) \sin(ky) &= \sum_{j=m}^M \sum_{k=n}^{n+\nu^{\frac{1}{p}}-1} c_{j,k} \sin(jx) \sin(ky) + \sum_{j=m}^M \sum_{k=n+\nu^{\frac{1}{p}}}^N c_{j,k} \sin(jx) \sin(ky) \\ &= S_1^{***} + S_2^{***}. \end{aligned}$$

Analogicznie jak w przypadku (a₁^{***}) otrzymujemy, że

$$|S_1^{***}| = \left| \sum_{j=m}^M \sum_{k=n}^{n+\nu^{\frac{1}{p}}-1} c_{j,k} \sin(jx) \sin(ky) \right| < 4\varepsilon.$$

Korzystając z Lematu 5, (3.27) oraz (3.41) dostajemy analogicznie jak przy szacowaniu wielkości $|S_2|$

$$|S_2^{***}| = \left| \sum_{j=m}^M \sum_{k=n+\nu^{\frac{1}{p}}}^N c_{j,k} \sin(jx) \sin(ky) \right|$$

$$\begin{aligned}
 &< \frac{4\varepsilon}{\mu^{\frac{1}{p}}} \sum_{j=m}^{m+\mu^{\frac{1}{p}}-1} \int_{n+\nu^{\frac{1}{p}}}^{n+\nu} \frac{1}{k \ln k} dk + 4\varepsilon \int_{n+\nu^{\frac{1}{p}}}^{n+\nu} \frac{1}{k \ln k} dk \leq \frac{4\varepsilon}{\mu^{\frac{1}{p}}} \sum_{j=m}^{m+\mu^{\frac{1}{p}}-1} \ln p + 4\varepsilon \ln p \\
 &\leq 8\varepsilon \ln p.
 \end{aligned}$$

Stąd

$$\left| \sum_{j=m}^M \sum_{k=n}^N c_{j,k} \sin(jx) \sin(ky) \right| < \varepsilon (4 + 8 \ln p). \quad (3.42)$$

(a_3^{***}): $m + \mu^{\frac{1}{p}} \leq M$ oraz $n + \nu^{\frac{1}{p}} > N$. Analogicznie jak w (a_2^{***}) otrzymujemy, że nierówność (3.42) jest prawdziwa.

(a_4^{***}): $m + \mu^{\frac{1}{p}} \leq M$ oraz $n + \nu^{\frac{1}{p}} \leq N$. Wtedy

$$\begin{aligned}
 &\sum_{j=m}^M \sum_{k=n}^N c_{j,k} \sin(jx) \sin(ky) \\
 &= \sum_{j=m}^{m+\mu^{\frac{1}{p}}-1} \sum_{k=n}^{n+\nu^{\frac{1}{p}}-1} c_{j,k} \sin(jx) \sin(ky) + \sum_{j=m+\mu^{\frac{1}{p}}}^M \sum_{k=n}^{n+\nu^{\frac{1}{p}}-1} c_{j,k} \sin(jx) \sin(ky) \\
 &+ \sum_{j=m}^{m+\mu^{\frac{1}{p}}-1} \sum_{k=n+\nu^{\frac{1}{p}}}^N c_{j,k} \sin(jx) \sin(ky) + \sum_{j=m+\mu^{\frac{1}{p}}}^M \sum_{k=n+\nu^{\frac{1}{p}}}^N c_{j,k} \sin(jx) \sin(ky) \\
 &= S_3^{***} + S_4^{***} + S_5^{***} + S_6^{***}.
 \end{aligned}$$

Analogicznie jak w (a_1^{***}) dostajemy, że

$$|S_3^{***}| = \left| \sum_{j=m}^{m+\mu^{\frac{1}{p}}-1} \sum_{k=n}^{n+\nu^{\frac{1}{p}}-1} c_{j,k} \sin(jx) \sin(ky) \right| < 4\varepsilon.$$

Dodatkowo, wykorzystując oszacowania z (a_2^{***}), otrzymujemy

$$\begin{aligned}
 |S_4^{***}| &= \left| \sum_{j=m+\mu^{\frac{1}{p}}}^M \sum_{k=n}^{n+\nu^{\frac{1}{p}}-1} c_{j,k} \sin(jx) \sin(ky) \right| < 8\varepsilon \sum_{j=m+\mu^{\frac{1}{p}}}^{m+\mu-1} \int_j^{j+1} \frac{1}{x \ln x} dx \leq 8\varepsilon \int_{j+\mu^{\frac{1}{p}}}^{j+\mu} \frac{1}{x \ln x} dx \\
 &\leq 8\varepsilon \ln p
 \end{aligned}$$

oraz

$$|S_5^{***}| = \left| \sum_{j=m}^{m+\mu^{\frac{1}{p}}-1} \sum_{k=n+\nu^{\frac{1}{p}}}^N c_{j,k} \sin(jx) \sin(ky) \right| < 8\varepsilon \ln p.$$

Dalej, korzystając z Lematu 5, otrzymujemy

$$|S_6^{***}| < 16\varepsilon \ln^2 p.$$

Przypadek (b^{***}): $\max\{\mu, \eta\} < m \leq M$ oraz $\eta < n \leq N \leq \nu$. W przypadku (b^{***}) mamy dwa przypadki do rozważenia:

(b_1^{***}) : $n + \nu^{\frac{1}{p}} > N$. Korzystając z (3.41) otrzymujemy

$$\begin{aligned} \sum_{j=m}^M \sum_{k=n}^N c_{j,k} \sin(jx) \sin(ky) &= \left(\frac{2(l_2 + 1)\pi}{r} - y \right) \sum_{k=n}^N (-k \cos(kq_k)) \sum_{j=m}^M c_{j,k} \sin(jx) \\ &\quad + \sum_{k=n}^N \sum_{j=m}^M c_{j,k} \sin\left(k \frac{2(l_2 + 1)\pi}{r}\right) \sin(jx) = S_7^{***} + S_8^{***}. \end{aligned}$$

Korzystając z (3.14) oraz (3.27) dostajemy

$$\begin{aligned} |S_7^{***}| &\leq \left(\frac{2(l_2 + 1)\pi}{r} - y \right) \sum_{k=n}^{n+\nu^{\frac{1}{p}}-1} k \left| \sum_{j=m}^M c_{j,k} \sin(jx) \right| \\ &\leq \frac{1}{\nu^{\frac{1}{p}}} \sum_{k=n}^{n+\nu^{\frac{1}{p}}-1} \frac{k}{2\left(2(l_1 + 1) - \frac{rx}{\pi}\right)} \left(\sum_{j=m}^M |\Delta_{r0} c_{j,k}| + \sum_{j=M+1}^{M+r} |c_{j,k}| + \sum_{j=m}^{m+r-1} |c_{j,k}| \right) \\ &< \frac{\pi}{2\nu^{\frac{1}{p}} r} \sum_{k=n}^{n+\nu^{\frac{1}{p}}-1} (\varepsilon + r\varepsilon + r\varepsilon) \leq 3\pi\varepsilon. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Dalej, wykorzystując (3.14), (3.27) oraz definicji klasy $DGM(p, {}_2\alpha, {}_2\beta, {}_2\gamma, r)$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} |S_8^{***}| &\leq \sum_{k=n}^{n+\nu^{\frac{1}{p}}-1} \left| \sum_{j=m}^M c_{j,k} \sin(jx) \right| \\ &\leq \sum_{k=n}^{n+\nu^{\frac{1}{p}}-1} \frac{1}{2\left(2(l_1 + 1) - \frac{rx}{\pi}\right)} \left(\sum_{j=m}^M |\Delta_{r0} c_{j,k}| + \sum_{j=M+1}^{M+r} |c_{j,k}| + \sum_{j=m}^{m+r-1} |c_{j,k}| \right) \\ &< \frac{\pi\varepsilon}{2r} \left(C \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{2^{\frac{s}{p}}} \sum_{j=b_1(2^s m)}^{2\lambda b_1(2^s m)} \frac{1}{j \ln j} + 2r\varepsilon \right) \leq \frac{\pi\varepsilon}{r} \left(C\lambda \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{2^{\frac{s}{p}}} + r \right) \ll \varepsilon. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Zatem nierówność (3.26) jest spełniona.

(b_2^{***}) : $n + \nu^{\frac{1}{p}} \leq N$. Wtedy

$$\begin{aligned} \sum_{j=m}^M \sum_{k=n}^N c_{j,k} \sin(jx) \sin(ky) &= \left(\frac{2(l_2 + 1)\pi}{r} - y \right) \sum_{k=n}^{n+\nu^{\frac{1}{p}}-1} -k \cos(kq_k) \sum_{j=m}^M c_{j,k} \sin(jx) \\ &\quad + \sum_{k=n}^{n+\nu^{\frac{1}{p}}-1} \sum_{j=m}^M c_{j,k} \sin\left(k \frac{2(l_2 + 1)\pi}{r}\right) \sin(jx) + \sum_{k=n+\nu^{\frac{1}{p}}}^N \sin(ky) \sum_{j=m}^M c_{j,k} \sin(jx) \\ &= S_9^{***} + S_{10}^{***} + S_{11}^{***}. \end{aligned}$$

Analogicznie jak w (3.43) oraz (3.44) dostajemy, że $|S_9^{***}| \leq 3\pi\varepsilon$, $|S_{10}^{***}| \ll \varepsilon$. Dalej, wykorzystując (3.14), Lemat 5, Lemat 11, (3.27), definicję klasy $DGM(p, {}_2\alpha, {}_2\beta, {}_2\gamma, r)$ oraz nierówność Höldera z $p > 1$ otrzymujemy

$$|S_{11}^{***}| \leq \sum_{k=n+\nu^{\frac{1}{p}}}^N \left| \sum_{j=m}^M c_{j,k} \sin(jx) \right|$$

$$\begin{aligned}
 &\leq \sum_{k=n+\nu^{\frac{1}{p}}}^N \frac{1}{2 \left(2(l_1+1) - \frac{rx}{\pi} \right)} \left(\sum_{j=m}^M |\Delta_{r0} c_{j,k}| + \sum_{j=M+1}^{M+r} |c_{j,k}| + \sum_{j=m}^{m+r-1} |c_{j,k}| \right) \\
 &< \frac{C\pi\varepsilon 2\lambda}{2r} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{2^{\frac{s}{p}}} + 4\pi\varepsilon \ln p \ll \varepsilon.
 \end{aligned}$$

Zatem nierówność (3.26) jest prawdziwa.

Przypadek (c***): $\eta < m \leq M \leq \mu$ oraz $\max\{\eta, \nu\} < n \leq N$. Jest to symetryczny odpowiednik przypadku (b***), więc dowód jest analogiczny. Zatem nierówność (3.26) jest spełniona.

Przypadek (d***): $\max\{\eta, \mu\} < m \leq M$ oraz $\max\{\eta, \nu\} < n \leq N$. Wykorzystując (3.14), Lemat 3 oraz (3.27) otrzymujemy

$$\begin{aligned}
 \left| \sum_{j=m}^M \sum_{k=n}^N c_{j,k} \sin(jx) \sin(ky) \right| &\leq \frac{\pi^2}{r^2} \left(m^{\frac{1}{p}} n^{\frac{1}{p}} \sum_{j=m}^{\infty} \sum_{k=n}^{\infty} |\Delta_{rr} c_{j,k}| + 2rm^{\frac{1}{p}} \sup_{k \geq n} k \sum_{j=m}^{\infty} |\Delta_{r0} c_{j,k}| \right. \\
 &\quad \left. + 2rn^{\frac{1}{p}} \sup_{j \geq m} j \sum_{k=n}^{\infty} |\Delta_{0r} c_{j,k}| + 4r^2 \sup_{j \geq m} \sup_{k \geq n} jk \ln j \ln k |c_{j,k}| \right) \\
 &\leq \frac{\pi^2}{r^2} (\varepsilon + 2r\varepsilon + 2r\varepsilon + 4r^2\varepsilon) \ll \varepsilon.
 \end{aligned}$$

Przypadek (e***): $\eta < m \leq \mu < M$ i $\eta < n \leq N \leq \nu$. Wtedy, analogicznie jak w Przypadku (e) korzystając z Przypadku (a***) i (b***) otrzymujemy (3.26).

Przypadek (f***): $\eta < m \leq M \leq \mu$ i $\eta < n \leq \nu < N$. Wtedy, podobnie jak w Przypadku (f) korzystając z Przypadku (a***) i (c***) uzyskujemy (3.26).

Przypadek (g***): $\eta < m \leq \mu < M$ i $\max\{\eta, \nu\} < n \leq N$. Wtedy, analogicznie jak w Przypadku (g) korzystając z Przypadku (c***) i (d***) dostajemy (3.26).

Przypadek (h***): $\max\{\eta, \mu\} < m \leq M$ i $\eta < n \leq \nu < N$. Wtedy, tak samo jak w Przypadku (h) korzystając z Przypadku (b***) i (d***) otrzymujemy (3.26).

Przypadek (i***): $\eta < m \leq \mu < M$ i $\eta < n \leq \nu < N$. Wtedy, podobnie jak w Przypadku (i) korzystając z Przypadków (a***) - (d***) uzyskujemy (3.26).

Niech teraz $y = \frac{2l_2\pi}{r}$ i $x \in (\frac{2l_1\pi}{r}, \frac{(2l_1+1)\pi}{r}]$, gdzie $l_1 \in \{0, 1, \dots, [\frac{r}{2}]\}$ i $l_2 \in \{1, \dots, [\frac{r}{2}]\}$, gdy $r \geq 3$ jest liczbą nieparzystą, oraz $l_1 \in \{0, 1, \dots, [\frac{r}{2}] - 1\}$ i $l_2 \in \{1, \dots, [\frac{r}{2}] - 1\}$, gdy $r \geq 4$ jest liczbą parzystą. Niech $\mu = \left[\frac{1}{x - \frac{2l_1\pi}{r}} \right]^p$. Mamy do rozważenia następujące przypadki:

Przypadek (a°): $\eta < m \leq M \leq \mu$. W przypadku (a°) mamy do rozważenia dwa przypadki:

(a_1°): $m + \mu^{\frac{1}{p}} > M$. Korzystając z (3.27) i (3.29) otrzymujemy

$$\begin{aligned}
 &\left| \sum_{j=m}^M \sum_{k=n}^N c_{j,k} \sin(jx) \sin(k \frac{2l_2\pi}{r}) \right| \\
 &= \left| \sum_{j=m}^M \sum_{k=n}^N c_{j,k} \left(\left(\sin(jx) - \sin(j \frac{2l_1\pi}{r}) \right) + \sin(j \frac{2l_1\pi}{r}) \right) \sin(k \frac{2l_2\pi}{r}) \right| \\
 &\leq \left(x - \frac{2l_1\pi}{r} \right) \sum_{j=m}^M \sum_{k=n}^N j |c_{j,k}| + \left| \sum_{j=m}^M \sum_{k=n}^N c_{j,k} \sin(j \frac{2l_1\pi}{r}) \sin(k \frac{2l_2\pi}{r}) \right|
 \end{aligned}$$

$$< \frac{1}{\mu^{\frac{1}{p}}} \sum_{j=m}^{m+\mu^{\frac{1}{p}-1}} \sup_{j \geq m} j \ln j \sum_{k=n}^{\infty} |c_{j,k}| + \varepsilon < 2\varepsilon.$$

(a_2°) : $m + \mu^{\frac{1}{p}} \leq M$. Wtedy

$$\begin{aligned} \sum_{j=m}^M \sum_{k=n}^N c_{j,k} \sin(jx) \sin(k \frac{2l_2\pi}{r}) &= \sum_{j=m}^{m+\mu^{\frac{1}{p}-1}} \sum_{k=n}^N c_{j,k} \sin(jx) \sin(k \frac{2l_2\pi}{r}) \\ &+ \sum_{j=m+\mu^{\frac{1}{p}}}^M \sum_{k=n}^N c_{j,k} \sin(jx) \sin(k \frac{2l_2\pi}{r}) = S_1^\circ + S_2^\circ. \end{aligned}$$

Analogicznie jak w przypadku (a_1°) , korzystając z (3.27) oraz (3.29) dostajemy, że

$$|S_1^\circ| \ll \frac{1}{\mu^{\frac{1}{p}}} \sum_{j=m}^{m+\mu^{\frac{1}{p}-1}} \sup_{j \geq m} j \ln j \sum_{k=n}^{\infty} |c_{j,k}| \leq \varepsilon.$$

Wykorzystując (3.27) i Lemat 5, otrzymujemy

$$\begin{aligned} |S_2^\circ| &\leq \left| \sum_{j=m+\mu^{\frac{1}{p}}}^{m+\mu} \sum_{k=n}^N c_{j,k} \sin(jx) \sin(k \frac{2l_2\pi}{r}) \right| \leq 4 \sum_{j=m+\mu^{\frac{1}{p}}}^{m+\mu-1} \frac{1}{(j+1) \ln(j+1)} \sup_{j \geq m} j \ln j \sum_{k=n}^{\infty} |c_{j,k}| \\ &\leq 4\varepsilon \sum_{j=m+\mu^{\frac{1}{p}}}^{m+\mu-1} \int_j^{j+1} \frac{1}{x \ln x} dx \leq 4\varepsilon \int_{m+\mu^{\frac{1}{p}}}^{m+\mu} \frac{1}{x \ln x} dx \leq 4\varepsilon \ln p. \end{aligned}$$

Przypadek (b°) : $\max\{\mu, \eta\} < m \leq M$. Wykorzystując (3.12), (3.27) oraz definicję klasy $DGM(p, 2\alpha, 2\beta, 2\gamma, r)$ mamy

$$\begin{aligned} \left| \sum_{j=m}^M \sum_{k=n}^N c_{j,k} \sin(jx) \sin(k \frac{2l_2\pi}{r}) \right| &\leq \sum_{k=n}^N \left| \sum_{j=m}^M c_{j,k} \sin(jx) \right| \\ &\leq \sum_{k=n}^N \frac{1}{2 \left(\frac{rx}{\pi} - 2l_1 \right)} \left(\sum_{j=m}^M |\Delta_{r0} c_{j,k}| + \sum_{j=M+1}^{M+r} |c_{j,k}| + \sum_{j=m}^{m+r-1} |c_{j,k}| \right) \\ &\leq \frac{\pi(\mu+1)^{\frac{1}{p}}}{2r} \sum_{k=n}^N \left(\sum_{j=m}^M |\Delta_{r0} c_{j,k}| + \sum_{j=M+1}^{M+r} |c_{j,k}| + \sum_{j=m}^{m+r-1} |c_{j,k}| \right) \\ &\leq \frac{\pi}{2r} m^{\frac{1}{p}} \sum_{k=n}^N \left(\sum_{j=m}^{\infty} |\Delta_{r0} c_{j,k}| + \sum_{j=M+1}^{M+r} |c_{j,k}| + \sum_{j=m}^{m+r-1} |c_{j,k}| \right) \\ &\leq \frac{\pi}{2r} m^{\frac{1}{p}} \sum_{k=n}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} (2^s m)^{1-\frac{1}{p}} \left(\sum_{j=2^s m}^{2^{s+1}m-1} |\Delta_{r0} c_{j,k}|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \pi \sup_{j \geq m} j \ln j \sum_{k=n}^{\infty} |c_{j,k}| \\ &\leq \frac{\pi}{2r} m^{\frac{1}{p}} \sum_{k=n}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{C}{2^{\frac{s}{p}}} \frac{1}{b_1(2^s m)} \max_{M \leq \lambda b_1(2^s m)} \sum_{j=M}^{2M} |c_{j,k}| + \pi\varepsilon \\ &\leq \frac{C\pi}{2r} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{2^{\frac{s}{p}}} \sum_{j=b_1(2^s m)}^{2\lambda b_1(2^s m)} \frac{1}{j \ln j} \left(\sup_{j \geq m} j \ln j \sum_{k=n}^{\infty} |c_{j,k}| \right) + \pi\varepsilon \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\leq \frac{C\pi\varepsilon}{2r} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{2^{\frac{s}{p}}} \sum_{j=b_1(2^s m)}^{2\lambda b_1(2^s m)} \frac{1}{j \ln j} + \pi\varepsilon \\
 &\leq \frac{C\pi\varepsilon\lambda}{r} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{2^{\frac{s}{p}}} + \pi\varepsilon \ll \varepsilon.
 \end{aligned}$$

Przypadek (c°): $\eta < m \leq \mu < M$. Rozbijając sumę na dwa składniki otrzymujemy

$$\begin{aligned}
 \left| \sum_{j=m}^M \sum_{k=n}^N c_{j,k} \sin(jx) \sin\left(k \frac{2l_2\pi}{r}\right) \right| &\leq \left| \sum_{j=m}^{\mu} \sum_{k=n}^N c_{j,k} \sin(jx) \sin\left(k \frac{2l_2\pi}{r}\right) \right| \\
 &+ \left| \sum_{j=\mu+1}^M \sum_{k=n}^N c_{j,k} \sin(jx) \sin\left(k \frac{2l_2\pi}{r}\right) \right|.
 \end{aligned}$$

Korzystając z Przypadku (a°) i (b°) otrzymujemy, że nierówność (3.26) jest spełniona.

Dalej, niech $y = \frac{2l_2\pi}{r}$ i $x \in (\frac{(2l_1+1)\pi}{r}, \frac{(2(l_1+1))\pi}{r})$, gdzie $l_1 \in \{0, 1, \dots, [\frac{r}{2}] - 1\}$ i $l_2 \in \{1, \dots, [\frac{r}{2}] - 1\}$, gdy $r \geq 4$ jest liczbą parzystą, oraz $l_1 \in \{0, 1, \dots, [\frac{r}{2}] - 1\}$ i $l_2 \in \{1, \dots, [\frac{r}{2}]\}$, gdy $r \geq 3$ jest liczbą nieparzystą. Niech $\mu = \left\lceil \frac{1}{\frac{2(l_1+1)\pi}{r} - x} \right\rceil^p$. W podobny sposób jak powyżej, wykorzystując odpowiednio (3.14) i (3.36) zamiast (3.12) i (3.29), otrzymujemy analogicznie jak w przypadkach (a°)-(c°), że nierówność (3.26) jest spełniona.

Ostatecznie, niech $x = \frac{2l_1\pi}{r}$ i $y \in (\frac{2l_2\pi}{r}, \frac{(2l_2+1)\pi}{r}]$, gdzie $l_1 \in \{1, \dots, [\frac{r}{2}]\}$ i $l_2 \in \{0, 1, \dots, [\frac{r}{2}]\}$, gdy $r \geq 3$ jest liczbą nieparzystą oraz $l_1 \in \{1, \dots, [\frac{r}{2}] - 1\}$ i $l_2 \in \{0, 1, \dots, [\frac{r}{2}] - 1\}$, gdy $r \geq 4$ jest liczbą parzystą lub $x = \frac{2l_1\pi}{r}$ i $(\frac{(2l_2+1)\pi}{r}, \frac{(2l_2+2)\pi}{r})$, gdzie $l_1 \in \{1, \dots, [\frac{r}{2}]\}$ i $l_2 \in \{0, 1, \dots, [\frac{r}{2}] - 1\}$, gdy $r \geq 3$ jest liczbą nieparzystą oraz $l_1 \in \{1, \dots, [\frac{r}{2}] - 1\}$ i $l_2 \in \{0, 1, \dots, [\frac{r}{2}] - 1\}$, gdy $r \geq 4$ jest liczbą parzystą. Wtedy analogicznie jak powyżej uzyskujemy, że nierówność (3.26) jest prawdziwa. To kończy dowód. $\square$

Uwaga 19. Jeżeli $r = 1$ lub $r = 2$, to warunek (3.21) jest spełniony.

Z następującej uwagi wynika, że warunek (3.8) nie gwarantuje jednostajnej zbieżności szeregu (3.18), gdy $\{c_{j,k}\}_{j,k=0}^{\infty} \in DGM(p, 2\alpha, 2\beta, 2\gamma, 3)$ dla $p > 1$.

Uwaga 20. [15] Istnieje punkt $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ oraz ciąg $\{c_{j,k}\}_{j,k=1}^{\infty}$ należący do klasy $DGM(p, 2\alpha, 2\beta, 2\gamma, 3)$ dla $p > 1$ i nie należący do klasy $DGM(1, 2\alpha, 2\beta, 2\gamma, 3)$ spełniający warunek (3.8), dla którego szereg (3.18) jest rozbieżny w (x_0, y_0) .

Dowód. Niech $p > 1$ oraz dla dowolnego $m, n \in \mathbb{N}$

$$c_{m,n} = a_m a_n, \text{ gdzie } a_n = \begin{cases} \frac{3}{n \ln(n+1)}, & \text{gdy } n \equiv 1 \pmod{3}, \\ \frac{1}{n \ln(n+1)}, & \text{gdy } n \equiv 2 \pmod{3}, \\ \frac{1}{n \ln(n+1)}, & \text{gdy } n \equiv 0 \pmod{3} \text{ i } n \not\equiv 0 \pmod{6}, \\ \frac{1}{(n-3) \ln(n-2)} + \frac{1}{n^{1+\frac{1}{p}} \ln(n+1)}, & \text{gdy } n \equiv 0 \pmod{6}. \end{cases}$$

Oczywiście ciąg $\{c_{j,k}\}_{j,k=1}^{\infty}$ spełnia warunek (3.8).

Na początek pokażemy, że $\{c_{j,k}\}_{j,k=1}^{\infty} \in DGM(p, 2\alpha, 2\beta, 2\gamma, 3)$. Niech

$$A_n = \{k \in \mathbb{N} : n \leq k \leq 2n - 1 \text{ oraz } k \equiv 1 \pmod{3}\},$$

$$\begin{aligned}
 B_n &= \{k \in \mathbb{N} : n \leq k \leq 2n-1 \text{ oraz } k \equiv 1 \pmod{3}\}, \\
 C_n &= \{k \in \mathbb{N} : n \leq k \leq 2n-1 \text{ oraz } k \equiv 0 \pmod{3} \text{ oraz } k \not\equiv 0 \pmod{6}\}, \\
 D_n &= \{k \in \mathbb{N} : n \leq k \leq 2n-1 \text{ oraz } k \equiv 0 \pmod{6}\}.
 \end{aligned}$$

Dla dowolnego $m \in \mathbb{N}$ uzyskujemy

$$\begin{aligned}
 \left(\sum_{k=n}^{2n-1} |c_{m,k} - c_{m,k+3}|^p \right)^{\frac{1}{p}} &= \left(\sum_{k \in A_n} |c_{m,k} - c_{m,k+3}|^p + \sum_{k \in B_n} |c_{m,k} - c_{m,k+3}|^p + \sum_{k \in C_n} |c_{m,k} - c_{m,k+3}|^p \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{k \in D_n} |c_{m,k} - c_{m,k+3}|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{k \in A_n} \left| \left(\frac{3}{k \ln(k+1)} - \frac{3}{(k+3) \ln(k+4)} \right) a_m \right|^p \right. \\
 &\quad + \sum_{k \in B_n} \left| \left(\frac{1}{k \ln(k+1)} - \frac{1}{(k+3) \ln(k+1)} \right) a_m \right|^p \\
 &\quad + \sum_{k \in C_n} \left| \left(\frac{1}{k \ln(k+1)} - \frac{1}{k \ln(k+1)} - \frac{1}{(k+3)^{1+\frac{1}{p}} \ln(k+4)} \right) a_m \right|^p \\
 &\quad \left. + \sum_{k \in D_n} \left| \left(\frac{1}{(k-3) \ln(k-2)} + \frac{1}{k^{1+\frac{1}{p}} \ln(k+1)} - \frac{1}{(k+3) \ln(k+4)} \right) a_m \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
 &= \left(\sum_{k \in A_n} 3^p \left| \left(\frac{1}{k \ln(k+1)} - \frac{1}{(k+3) \ln(k+4)} \right) \right|^p |a_m|^p \right. \\
 &\quad + \sum_{k \in B_n} \left| \left(\frac{1}{k \ln(k+1)} - \frac{1}{(k+3) \ln(k+1)} \right) \right|^p |a_m|^p + \sum_{k \in C_n} \left| \left(\frac{1}{(k+3)^{1+\frac{1}{p}} \ln(k+4)} \right) \right|^p |a_m|^p \\
 &\quad \left. + \sum_{k \in D_n} \left(\left| \frac{1}{(k-3) \ln(k-2)} - \frac{1}{(k+3) \ln(k+4)} \right| + \frac{1}{k^{1+\frac{1}{p}} \ln(k+1)} \right)^p |a_m|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
 &\leq \left(\sum_{k \in A_n} 3^p \left(\frac{6}{k^2 \ln(k+1)} \right)^p |a_m|^p + \sum_{k \in B_n} \left(\frac{6}{k^2 \ln(k+1)} \right)^p |a_m|^p \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{k \in C_n} \left(\frac{1}{k^{1+\frac{1}{p}} \ln(k+1)} \right)^p |a_m|^p + \sum_{k \in D_n} \left(\frac{48}{k^2 \ln(k+1)} + \frac{1}{k^{1+\frac{1}{p}} \ln(k+1)} \right)^p |a_m|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
 &\leq 49 |a_m| \left(\sum_{k=n}^{2n-1} \left(\frac{1}{k^{1+\frac{1}{p}} \ln(k+1)} \right)^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq 49 |a_m| \frac{1}{n^{1+\frac{1}{p}} \ln(n+1)} n^{\frac{1}{p}} = 49 \frac{|a_m|}{n \ln(n+1)} \\
 &\leq 147 \frac{1}{n} \sum_{k=n}^{2n} |a_k a_m| \leq \frac{147}{n} \max_{b_2(n) \leq N \leq \lambda b_2(n)} \sum_{k=N}^{2N} |c_{m,k}|.
 \end{aligned}$$

W analogiczny sposób, dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$, otrzymujemy, że

$$\left(\sum_{j=m}^{2m-1} |c_{j,n} - c_{j+3,n}|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{147}{n} \max_{b_1(m) \leq M \leq \lambda b_1(m)} \sum_{j=M}^{2M} |c_{j,n}|.$$

Ponadto

$$\begin{aligned}
 & \left(\sum_{j=m}^{2m-1} \sum_{k=n}^{2n-1} |\Delta_{33} c_{j,k}|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \\
 & \left(\sum_{j \in A_m} \sum_{k \in A_n} |\Delta_{33} c_{j,k}|^p + \sum_{j \in B_m} \sum_{k \in A_n} |\Delta_{33} c_{j,k}|^p + \sum_{j \in C_m} \sum_{k \in A_n} |\Delta_{33} c_{j,k}|^p + \sum_{j \in D_m} \sum_{k \in A_n} |\Delta_{33} c_{j,k}|^p \right. \\
 & + \sum_{j \in A_m} \sum_{k \in B_n} |\Delta_{33} c_{j,k}|^p + \sum_{j \in B_m} \sum_{k \in B_n} |\Delta_{33} c_{j,k}|^p + \sum_{j \in C_m} \sum_{k \in B_n} |\Delta_{33} c_{j,k}|^p + \sum_{j \in D_m} \sum_{k \in B_n} |\Delta_{33} c_{j,k}|^p \\
 & + \sum_{j \in A_m} \sum_{k \in C_n} |\Delta_{33} c_{j,k}|^p + \sum_{j \in B_m} \sum_{k \in C_n} |\Delta_{33} c_{j,k}|^p + \sum_{j \in C_m} \sum_{k \in C_n} |\Delta_{33} c_{j,k}|^p + \sum_{j \in D_m} \sum_{k \in C_n} |\Delta_{33} c_{j,k}|^p \\
 & \left. + \sum_{j \in A_m} \sum_{k \in D_n} |\Delta_{33} c_{j,k}|^p + \sum_{j \in B_m} \sum_{k \in D_n} |\Delta_{33} c_{j,k}|^p + \sum_{j \in C_m} \sum_{k \in D_n} |\Delta_{33} c_{j,k}|^p + \sum_{j \in D_m} \sum_{k \in D_n} |\Delta_{33} c_{j,k}|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
 & = S_1^\circ + S_2^\circ + S_3^\circ + S_4^\circ + S_5^\circ + S_6^\circ + S_7^\circ + S_8^\circ + S_9^\circ + S_{10}^\circ + S_{11}^\circ + S_{12}^\circ + S_{13}^\circ + S_{14}^\circ + S_{15}^\circ + S_{16}^\circ.
 \end{aligned}$$

Wykonując elementarne przekształcenia otrzymujemy

$$\begin{aligned}
 S_{16}^\circ &= \left(\sum_{j \in D_m} \sum_{k \in D_n} |\Delta_{33} c_{j,k}|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{j \in D_m} \sum_{k \in D_n} |c_{j,k} - c_{j+3,k} - c_{j,k+3} + c_{j+3,k+3}|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
 &= \left(\sum_{j \in D_m} \sum_{k \in D_n} \left| \left(\frac{1}{(j-3)\ln(j-2)} + \frac{1}{j^{1+\frac{1}{p}}\ln(j+1)} - \frac{1}{(j+3)\ln(j+4)} \right) \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. \left(\frac{1}{(k-3)\ln(k-2)} + \frac{1}{k^{1+\frac{1}{p}}\ln(k+1)} - \frac{1}{(k+3)\ln(k+4)} \right) \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
 &\leq \left(\sum_{j \in D_m} \sum_{k \in D_n} \left(\frac{48}{j^2 \ln(j+1)} + \frac{1}{j^{1+\frac{1}{p}} \ln(j+1)} \right)^p \left(\frac{48}{k^2 \ln(k+1)} + \frac{1}{k^{1+\frac{1}{p}} \ln(k+1)} \right)^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
 &\leq 2041 \left(\sum_{j=m}^{2m-1} \sum_{k=n}^{2n-1} \left(\frac{1}{j^{1+\frac{1}{p}} \ln(j+1)} \right)^p \left(\frac{1}{k^{1+\frac{1}{p}} \ln(k+1)} \right)^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
 &\leq 2041 \frac{1}{m^{1+\frac{1}{p}} \ln(m+1)} m^{\frac{1}{p}} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{p}} \ln(n+1)} n^{\frac{1}{p}} = \frac{2041}{m \ln(m+1) n \ln(n+1)}.
 \end{aligned}$$

W analogiczny sposób dla $q = 1, 2, \dots, 15$ uzyskujemy, że

$$S_q^\circ \leq \frac{2041}{m \ln(m+1) n \ln(n+1)}.$$

Zatem

$$\left(\sum_{j=m}^{2m-1} \sum_{k=n}^{2n-1} |\Delta_{33} c_{j,k}|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{32 \ 656}{mn} \sum_{j=m}^{2m-1} \sum_{k=n}^{2n-1} |a_j a_k| \leq \frac{32 \ 656}{mn} \sup_{M+N \geq b_3(m+n)} \sum_{j=M}^{2M} \sum_{k=N}^{2N} |c_{j,k}|,$$

więc $\{c_{j,k}\}_{j,k=1}^\infty \in DGM(p, 2\alpha, 2\beta, 2\gamma, 3)$.

Pokażemy teraz, że $\{c_{j,k}\}_{j,k=1}^{\infty} \notin DGM(1, 2\alpha, 2\beta, 2\gamma, 3)$. Dla $m \in \mathbb{N}$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} \sum_{k=n}^{2n-1} |c_{m,k} - c_{m,k+3}| &\geq \sum_{k \in C_n} |c_{m,k} - c_{m,k+3}| \\ &= \sum_{k \in C_n} \left| \frac{a_m}{k \ln(k+1)} - \left(\frac{1}{k \ln(k+1)} - \frac{1}{(k+3)^{1+\frac{1}{p}} \ln(k+4)} \right) a_m \right| \\ &= \sum_{k \in C_n} |a_m| \frac{1}{(k+3)^{1+\frac{1}{p}} \ln(k+4)} \geq \frac{|a_m|}{(2n+2)^{1+\frac{1}{p}} \ln(2n+3)} \frac{n}{12} \geq \frac{|a_m|}{48(2n+2)^{\frac{1}{p}} \ln(2n+3)}. \end{aligned}$$

Z drugiej strony mamy

$$\frac{1}{n} \left(\max_{b_2(n) \leq M \leq \lambda b_2(n)} \sum_{k=N}^{2N} |c_{m,k}| \right) \leq C \frac{|a_m|}{n}.$$

Zatem nierówność

$$\sum_{k=n}^{2n-1} |c_{mk} - c_{m,k+3}| \leq \frac{1}{n} \left(\max_{b_2(n) \leq M \leq \lambda b_2(n)} \sum_{k=N}^{2N} |c_{m,k}| \right)$$

nie może być spełniona jeśli $n \rightarrow \infty$.

Pokażemy teraz, że szereg (3.18) jest rozbieżny w punkcie $(x_0, y_0) = (\frac{2}{3}\pi, \frac{2}{3}\pi)$. Wykorzystując (2.26) z Uwagi 11 dostajemy, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ szereg pojedynczy (2.7) jest rozbieżny w x_0 , więc szereg podwójny (3.18) jest rozbieżny w punkcie (x_0, y_0) . To kończy dowód. $\square$

Twierdzenie 18 podaje warunek dostateczny zbieżności jednostajnej podwójnego szeregu sinusów, gdy współczynniki tego szeregu tworzą ciągi należące do klasy $DGM(p, 2\alpha, 2\beta, 2\gamma, r)$, gdy $p > 1$ oraz $r \in \mathbb{N}$ i stanowi uogólnienie wcześniejszych wyników dotyczących tej problematyki. Należy zaznaczyć, że twierdzenie to zostało wykazane przy założeniu, że spełniony jest warunek (3.24) zamiast (3.8) oraz przy dodatkowych założeniach (3.21) - (3.23). Celowość wzmocnienia warunku (3.8) i konieczność dodatkowych założeń (3.21) - (3.23) uzasadnia Uwaga 20.

Analizując dowód Twierdzenia 18 otrzymujemy, że w przypadku $p = 1$ prawdziwe jest następujące twierdzenie:

Twierdzenie 21. Niech ciąg $\{c_{j,k}\}_{j,k=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ należy do klasy $DGM(1, 2\alpha, 2\beta, 2\gamma, r)$, gdzie $r \in \mathbb{N}$. Załóżmy, że dla $r \geq 3$ spełnione są warunki (3.21),

$$\sup_{j \geq m} j \sum_{k=n}^{\infty} |c_{j,k}| \rightarrow 0 \quad (3.45)$$

i

$$\sup_{k \geq n} k \sum_{j=m}^{\infty} |c_{j,k}| \rightarrow 0, \quad (3.46)$$

gdy $m + n \rightarrow \infty$. Jeżeli zachodzi warunek (3.8), to szereg (3.18) jest zbieżny jednostajnie regularnie względem (x, y) .

Jeżeli dodatkowo założymy, że $r = 2$, to wówczas będziemy mogli w założeniach powyższego twierdzenia rozszerzyć klasę ciągów do klasy $DGM(1, 3\alpha, 3\beta, 3\gamma, 2)$ i w ten sposób otrzymamy wynik K. Duzinkiewicza oraz B. Szala z pracy [3] oraz wszystkie wcześniejsze wyniki wspomniane w rozprawie podające warunek dostateczny zbieżności podwójnego szeregu sinusów.

3.3 Zbieżność jednostajna podwójnych szeregów mieszanych

Niech $\{c_{j,k}\}_{j,k=1}^{\infty}$ będzie podwójnym ciągiem liczb zespolonych. Rozważmy podwójny szereg mieszany postaci

$$\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} c_{j,k} \sin(jx) \cos(ky). \quad (3.47)$$

Pierwszy wynik dotyczący problematyki jednostajnej zbieżności podwójnych szeregów mieszanych został przedstawiony przez Kórusa w pracy [12], który można zapisać w postaci następującego twierdzenia

Twierdzenie 22. [12] Załóżmy, że podwójny ciąg $\{c_{j,k}\}_{j,k=1}^{\infty}$ należy do klasy $DGM(1, {}_2\alpha, {}_2\beta, {}_2\gamma, 1)$.

(i) Jeżeli $\{c_{j,k}\}_{j,k=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ spełnia warunek (3.8) oraz istnieje liczba naturalna m_1 taka, że dla każdego $m < m_1$

$$\sum_{k=n}^{\infty} c_{m,k} \rightarrow 0 \quad \text{gdy} \quad n \rightarrow \infty \quad (3.48)$$

i

$$\sup_{m \geq m_1} m \sum_{k=n}^{\infty} |c_{m,k}| \rightarrow 0 \quad \text{gdy} \quad n \rightarrow \infty, \quad (3.49)$$

to szereg (3.47) jest zbieżny regularnie jednostajnie względem (x, y) .

(ii) Jeżeli $\{c_{j,k}\}_{j,k=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}_+^0$ i szereg (3.47) jest zbieżny regularnie jednostajnie względem (x, y) , to zachodzi warunek (3.8) oraz warunki (3.48) i (3.49) dla każdego $m_1 \in \mathbb{N}$.

Wynik ten został uogólniony przez K. Duzinkiewicza dla klasy ciągów $DGM(1, {}_2\alpha, {}_2\beta, {}_2\gamma, 2)$ w pracy [4] i można go sformułować w postaci następującego twierdzenia.

Twierdzenie 23. [4] Załóżmy, że podwójny ciąg $\{c_{j,k}\}_{j,k=1}^{\infty}$ należy do klasy $DGM(1, {}_2\alpha, {}_2\beta, {}_2\gamma, 2)$.

(i) Jeżeli $\{c_{j,k}\}_{j,k=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ spełnia warunek (3.8) i istnieje liczba naturalna m_1 taka, że zachodzą warunki (3.48) i (3.49) oraz dla dowolnego $m < m_1$

$$\sum_{k=n}^{\infty} (-1)^k c_{m,k} \rightarrow 0 \quad \text{gdy} \quad n \rightarrow \infty, \quad (3.50)$$

to szereg (3.47) jest zbieżny regularnie jednostajnie względem (x, y) .

(ii) Jeżeli $\{c_{j,k}\}_{j,k=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}_+^0$ i szereg 3.47 jest zbieżny regularnie jednostajnie względem (x, y) , to zachodzi warunek (3.8) oraz warunki (3.48), (3.49) i (3.50) dla każdego $m_1 \in \mathbb{N}$.

Zostaną teraz zaprezentowane główne wyniki tego podrozdziału stanowiące uogólnienie powyższych twierdzeń i podające warunek konieczny oraz dostateczny jednostajnej regularnej zbieżności szeregu (3.47) dla klasy $DGM(p, {}_2\alpha, {}_2\beta, {}_2\gamma, r)$. Rezultaty te będą stanowiły podstawę przygotowania kolejnej pracy naukowej.

Twierdzenie 24. *Niech ciąg $\{c_{j,k}\}_{j,k=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ należy do klasy $DGM(p, {}_2\alpha, {}_2\beta, {}_2\gamma, r)$, gdzie $p > 1$, $r \in \mathbb{N}$. Załóżmy, że szereg*

$$\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} c_{j,k} \sin\left(\frac{2l_1\pi}{r}j\right) \cos\left(\frac{2l_2\pi}{r}k\right) \quad (3.51)$$

jest zbieżny regularnie dla dowolnych $l_1, l_2 \in \{0, 1, \dots, [\frac{r}{2}]\}$ oraz spełnione są warunki (3.22) i (3.23). Jeśli zachodzi warunek (3.24), to szereg (3.47) jest zbieżny jednostajnie regularnie względem (x, y) .

Dowód. Niech $r \in \mathbb{N}$, oraz $p > 1$. Analogicznie jak w Twierdzeniu 10 oraz 12 korzystając z (3.51) uzyskujemy, że pojedyncze szeregi:

$$\sum_{j=1}^{\infty} c_{j,n} \sin jx, \quad n = 1, 2, \dots, \quad \sum_{k=1}^{\infty} c_{m,k} \cos ky, \quad m = 1, 2, \dots \quad (3.52)$$

są jednostajnie zbieżne, ponieważ dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ dostajemy, że, $\{c_{j,n}\}_{j=1}^{\infty} \in GM(p, {}_2\alpha, r) \subsetneq GM(p, {}_3\alpha, r) \equiv GM(p, {}_5\delta, r)$, $j \ln j c_{j,n} \rightarrow 0$, gdy $j \rightarrow \infty$ i $\sum_{j=1}^{\infty} c_{j,n} \sin\left(\frac{2l_1\pi}{r}j\right) < \infty$ dla każdego $l_1 \in \{0, 1, \dots, [\frac{r}{2}]\}$ oraz dla dowolnego $m \in \mathbb{N}$, $\{c_{m,k}\}_{k=1}^{\infty} \in GM(p, {}_2\beta, r) \subseteq GM(p, {}_3\beta, r) \equiv GM(p, {}_5\delta, r)$, $k \ln k c_{m,k} \rightarrow 0$, gdy $k \rightarrow \infty$ i $\sum_{k=1}^{\infty} c_{m,k} \cos\left(\frac{2l_2\pi}{r}k\right) < \infty$ dla każdego $l_2 \in \{0, 1, \dots, [\frac{r}{2}]\}$.

Niech dany będzie $\epsilon > 0$. Pokażemy, że dla dowolnych $M \geq m > \eta(\epsilon)$, $N \geq n > \eta(\epsilon)$ oraz dla dowolnego $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ zachodzi nierówność

$$\left| \sum_{j=m}^M \sum_{k=n}^N c_{j,k} \sin(jx) \cos(ky) \right| \ll \epsilon, \quad (3.53)$$

gdzie $\eta = \eta(\epsilon) > \lambda$ jest liczbą naturalną taką, że dla dowolnego $m, n > \eta$ zachodzi

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{j=m}^M \sum_{k=n}^N c_{j,k} \sin\left(j \frac{2l_1\pi}{r}\right) \cos\left(k \frac{2l_2\pi}{r}\right) \right| < \epsilon, \text{ gdzie } l_1, l_2 \in \left\{0, 1, \dots, \left[\frac{r}{2}\right]\right\}, \\ & m^{\frac{1}{p}} \sup_{k \geq n} k \sum_{j=n}^{\infty} |\Delta_{r0} c_{j,k}| < \epsilon, \quad n^{\frac{1}{p}} \sup_{j \geq m} j \sum_{k=n}^{\infty} |\Delta_{r0} c_{j,k}| < \epsilon, \\ & m^{\frac{1}{p}} n^{\frac{1}{p}} \sum_{j=m}^{\infty} \sum_{k=n}^{\infty} |\Delta_{rr} a_n| < \epsilon \quad mn \ln m \ln n |c_{m,n}| < \epsilon, \\ & \sup_{j \geq m} j \ln j \sum_{k=n}^{\infty} |c_{j,k}| < \epsilon, \quad \sup_{k \geq n} k \ln k \sum_{j=m}^{\infty} |c_{j,k}| < \epsilon. \end{aligned} \quad (3.54)$$

Powyższe nierówności wynikają bezpośrednio z Lematu 9, Lematu 10, (3.22) (3.23), (3.24) oraz (3.51).

Wykorzystując warunek (3.51) otrzymujemy, że nierówność (3.53) jest spełniona jeśli $x = \frac{2l_1\pi}{r}$ i $y = \frac{2l_2\pi}{r}$ dla dowolnych $l_1, l_2 \in \{0, 1, \dots, [\frac{r}{2}]\}$.

Założmy teraz, że $x \in (\frac{2l_1\pi}{r}, \frac{(2l_1+1)\pi}{r}]$ oraz $y \in (\frac{2l_2\pi}{r}, \frac{(2l_2+1)\pi}{r}]$, gdzie $l_1, l_2 \in \{0, 1, \dots, [\frac{r}{2}] - 1\}$, gdy r jest liczbą parzystą, oraz $l_1, l_2 \in \{0, 1, \dots, [\frac{r}{2}]\}$, gdy r jest liczbą nieparzystą. Niech $\mu = [\frac{1}{x - \frac{2l_1\pi}{r}}]^p$ oraz niech $\nu = [\frac{1}{y - \frac{2l_2\pi}{r}}]^p$. Wykorzystując elementarne przekształcenia otrzymujemy

$$\begin{aligned} \sin(jx) \cos(ky) &= \left(\sin(jx) - \sin(j \frac{2l_1\pi}{r}) \right) \left(\cos(ky) - \cos(k \frac{2l_2\pi}{r}) \right) \\ &\quad + \left(\sin(jx) - \sin(j \frac{2l_1\pi}{r}) \right) \cos(k \frac{2l_2\pi}{r}) \\ &\quad + \sin(j \frac{2l_1\pi}{r}) \left(\cos(ky) - \cos(k \frac{2l_2\pi}{r}) \right) + \sin(j \frac{2l_1\pi}{r}) \cos(k \frac{2l_2\pi}{r}). \end{aligned} \quad (3.55)$$

Stosując twierdzenie Lagrange'a o wartości średniej do funkcji $f(x) = \sin(jx)$ oraz $f(y) = \cos(ky)$ odpowiednio na przedziale $[\frac{2l_1\pi}{r}, x]$ oraz $[\frac{2l_2\pi}{r}, y]$, uzyskujemy, że dla dowolnego $j, k \in \mathbb{N}$ istnieją liczby $z_j \in (\frac{2l_1\pi}{r}, x)$ oraz $q_k \in (\frac{2l_2\pi}{r}, y)$ takie, że

$$\begin{aligned} \sin(jx) - \sin(j \frac{2l_1\pi}{r}) &= j \cos(jz_j) (x - \frac{2l_1\pi}{r}), \\ \cos(ky) - \cos(k \frac{2l_2\pi}{r}) &= -k \sin(kq_k) (y - \frac{2l_2\pi}{r}). \end{aligned} \quad (3.56)$$

Należy rozważyć dziewięć następujących przypadków:

Przypadek (a): $\eta < m \leq M \leq \mu$ oraz $\eta < n \leq N \leq \nu$. W przypadku (a) mamy do rozpatrzenia cztery przypadki:

(a₁): $m + \mu^{\frac{1}{p}} > M$ oraz $n + \nu^{\frac{1}{p}} > N$. Wykorzystując (3.54), (3.55) i (3.56) uzyskujemy

$$\begin{aligned} \left| \sum_{j=m}^M \sum_{k=n}^N c_{j,k} \sin(jx) \cos(ky) \right| &\leq \left| \sum_{j=m}^M \sum_{k=n}^N c_{j,k} \left(\sin(jx) - \sin(j \frac{2l_1\pi}{r}) \right) \left(\cos(ky) - \cos(k \frac{2l_2\pi}{r}) \right) \right| \\ &\quad + \left| \sum_{j=m}^M \sum_{k=n}^N c_{j,k} \left(\sin(jx) - \sin(j \frac{2l_1\pi}{r}) \right) \cos(k \frac{2l_2\pi}{r}) \right| \\ &\quad + \left| \sum_{j=m}^M \sum_{k=n}^N c_{j,k} \sin(j \frac{2l_1\pi}{r}) \left(\cos(ky) - \cos(k \frac{2l_2\pi}{r}) \right) \right| \\ &\quad + \left| \sum_{j=m}^M \sum_{k=n}^N c_{j,k} \sin(j \frac{2l_1\pi}{r}) \cos(k \frac{2l_2\pi}{r}) \right| \\ &< \left(x - \frac{2l_1\pi}{r} \right) \left(y - \frac{2l_2\pi}{r} \right) \sum_{j=m}^M \sum_{k=n}^N |c_{j,k} j \cos(jz_j) k \sin(kq_k)| \\ &\quad + \left(x - \frac{2l_1\pi}{r} \right) \sum_{j=m}^M \sum_{k=n}^N |c_{j,k} j \cos(jz_j) \cos(k \frac{2l_2\pi}{r})| \\ &\quad + \left(y - \frac{2l_2\pi}{r} \right) \sum_{j=m}^M \sum_{k=n}^N |c_{j,k} k \sin(kq_k) \sin(j \frac{2l_1\pi}{r})| + \varepsilon \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\leq \frac{1}{\mu^{\frac{1}{p}} \nu^{\frac{1}{p}}} \sum_{j=m}^{m+\mu^{\frac{1}{p}}-1} \sum_{k=n}^{n+\nu^{\frac{1}{p}}-1} j k \ln j \ln k |c_{j,k}| \\
 &+ \frac{1}{\mu^{\frac{1}{p}}} \sum_{j=m}^{m+\mu^{\frac{1}{p}}-1} \sup_{j \geq m} j \ln j \sum_{k=n}^{\infty} |c_{j,k}| + \frac{1}{\nu^{\frac{1}{p}}} \sum_{k=n}^{n+\nu^{\frac{1}{p}}-1} \sup_{k \geq n} k \ln k \sum_{j=m}^{\infty} |c_{j,k}| + \varepsilon < 4\varepsilon.
 \end{aligned}$$

(a_2): $m + \mu^{\frac{1}{p}} > M$ oraz $n + \nu^{\frac{1}{p}} \leq N$. Wtedy

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=m}^M \sum_{k=n}^N c_{j,k} \sin(jx) \cos(ky) &= \sum_{j=m}^M \sum_{k=n}^{n+\nu^{\frac{1}{p}}-1} c_{j,k} \sin(jx) \cos(ky) + \sum_{j=m}^M \sum_{k=n+\nu^{\frac{1}{p}}}^N c_{j,k} \sin(jx) \cos(ky) \\
 &= S_1 + S_2.
 \end{aligned}$$

Analogicznie jak w przypadku (a_1) mamy

$$\begin{aligned}
 |S_1| &= \left| \sum_{j=m}^M \sum_{k=n}^{n+\nu^{\frac{1}{p}}-1} c_{j,k} \sin(jx) \cos(ky) \right| \leq \frac{1}{\mu^{\frac{1}{p}} \nu^{\frac{1}{p}}} \sum_{j=m}^{m+\mu^{\frac{1}{p}}-1} \sum_{k=n}^{n+\nu^{\frac{1}{p}}-1} j \ln j k \ln k |c_{j,k}| \\
 &+ \frac{1}{\mu^{\frac{1}{p}}} \sum_{j=m}^{m+\mu^{\frac{1}{p}}-1} \sup_{j \geq m} j \ln j \sum_{k=n}^{\infty} |c_{j,k}| + \frac{1}{\nu^{\frac{1}{p}}} \sum_{k=n}^{n+\nu^{\frac{1}{p}}-1} \sup_{k \geq n} k \ln k \sum_{j=m}^{\infty} |c_{j,k}| + \varepsilon < 4\varepsilon.
 \end{aligned}$$

Wykorzystując Lemat 5, (3.54) oraz (3.56) otrzymujemy

$$\begin{aligned}
 |S_2| &= \left| \sum_{j=m}^M \sum_{k=n+\nu^{\frac{1}{p}}}^N c_{j,k} \sin(jx) \cos(ky) \right| \\
 &= \left| \sum_{j=m}^M \sum_{k=n+\nu^{\frac{1}{p}}}^N c_{j,k} \left(j \cos(jz_j) \left(x - \frac{2l_1\pi}{r} \right) + \sin\left(j \frac{2l_1\pi}{r}\right) \right) \cos(ky) \right| \\
 &\leq \left(x - \frac{2l_1\pi}{r} \right) \sum_{j=m}^M \sum_{k=n+\nu^{\frac{1}{p}}}^N |c_{j,k} j \cos(jz_j)| + \sum_{j=m}^M \sum_{k=n+\nu^{\frac{1}{p}}}^N \left| c_{j,k} \sin\left(j \frac{2l_1\pi}{r}\right) \cos(ky) \right| \\
 &< \frac{4\varepsilon}{\mu^{\frac{1}{p}}} \sum_{j=m}^{m+\mu^{\frac{1}{p}}-1} \sum_{k=n+\nu^{\frac{1}{p}}}^{n+\nu-1} \frac{1}{(k+1) \ln(k+1)} + 4 \sup_{k \geq n} k \ln k \sum_{j=m}^{\infty} |c_{j,k}| \sum_{k=n+\nu^{\frac{1}{p}}}^{n+\nu-1} \frac{1}{(k+1) \ln(k+1)} \\
 &\leq \frac{4\varepsilon}{\mu^{\frac{1}{p}}} \sum_{j=m}^{m+\mu^{\frac{1}{p}}-1} \sum_{k=n+\nu^{\frac{1}{p}}}^{n+\nu-1} \int_k^{k+1} \frac{1}{x \ln x} dx + 4 \sup_{k \geq n} k \ln k \sum_{j=m}^{\infty} |c_{j,k}| \sum_{k=n+\nu^{\frac{1}{p}}}^{n+\nu-1} \int_k^{k+1} \frac{1}{x \ln x} dx \\
 &\leq \frac{4\varepsilon}{\mu^{\frac{1}{p}}} \sum_{j=m}^{m+\mu^{\frac{1}{p}}-1} \int_{n+\nu^{\frac{1}{p}}}^{n+\nu} \frac{1}{k \ln k} dk + 4\varepsilon \int_{n+\nu^{\frac{1}{p}}}^{n+\nu} \frac{1}{k \ln k} dk \leq \frac{4\varepsilon}{\mu^{\frac{1}{p}}} \sum_{j=m}^{m+\mu^{\frac{1}{p}}-1} \ln p + 4\varepsilon \ln p \\
 &\leq 8\varepsilon \ln p.
 \end{aligned} \tag{3.57}$$

Zatem

$$\left| \sum_{j=m}^M \sum_{k=n}^N c_{j,k} \sin(jx) \cos(ky) \right| < \varepsilon (4 + 8 \ln p). \tag{3.58}$$

(a_3): $m + \mu^{\frac{1}{p}} \leq M$ oraz $n + \nu^{\frac{1}{p}} > N$. Analogicznie jak w (a_2) otrzymujemy, że (3.58) jest prawdziwa.

(a_4): $m + \mu^{\frac{1}{p}} \leq M$ oraz $n + \nu^{\frac{1}{p}} \leq N$. Wtedy

$$\begin{aligned}
 & \sum_{j=m}^M \sum_{k=n}^N c_{j,k} \sin(jx) \cos(ky) \\
 &= \sum_{j=m}^{m+\mu^{\frac{1}{p}}-1} \sum_{k=n}^{n+\nu^{\frac{1}{p}}-1} c_{j,k} \sin(jx) \cos(ky) + \sum_{j=m+\mu^{\frac{1}{p}}}^M \sum_{k=n}^{n+\nu^{\frac{1}{p}}-1} c_{j,k} \sin(jx) \cos(ky) \\
 &+ \sum_{j=m}^{m+\mu^{\frac{1}{p}}-1} \sum_{k=n+\nu^{\frac{1}{p}}}^N c_{j,k} \sin(jx) \cos(ky) + \sum_{j=m+\mu^{\frac{1}{p}}}^M \sum_{k=n+\nu^{\frac{1}{p}}}^N c_{j,k} \sin(jx) \cos(ky) \\
 &= S_3 + S_4 + S_5 + S_6.
 \end{aligned}$$

Analogicznie jak w przypadku (a_1) mamy

$$|S_3| = \left| \sum_{j=m}^{m+\mu^{\frac{1}{p}}-1} \sum_{k=n}^{n+\nu^{\frac{1}{p}}-1} c_{j,k} \sin(jx) \cos(ky) \right| < 4\varepsilon.$$

Wykorzystując Lemat 5, (3.54) oraz (3.56) otrzymujemy

$$\begin{aligned}
 |S_4| &= \left| \sum_{j=m+\mu^{\frac{1}{p}}}^M \sum_{k=n}^{n+\nu^{\frac{1}{p}}-1} c_{j,k} \sin(jx) \cos(ky) \right| \\
 &\leq \left(y - \frac{2l_2\pi}{r} \right) \sum_{j=m+\mu^{\frac{1}{p}}}^M \sum_{k=n}^{n+\nu^{\frac{1}{p}}-1} |c_{j,k} \sin(jx) k \sin(ky)| + \sum_{j=m+\mu^{\frac{1}{p}}}^M \sum_{k=n}^{n+\nu^{\frac{1}{p}}-1} \left| c_{j,k} \sin(jx) \cos(ky) \right| \\
 &< \frac{4\varepsilon}{\nu^{\frac{1}{p}}} \sum_{j=m+\mu^{\frac{1}{p}}}^{m+\mu-1} \sum_{k=n}^{n+\nu^{\frac{1}{p}}-1} \frac{1}{(j+1) \ln(j+1)} + 4 \sup_{j \geq m} j \ln j \sum_{k=n}^{\infty} |c_{j,k}| \sum_{j=m+\mu^{\frac{1}{p}}}^{m+\mu-1} \frac{1}{(j+1) \ln(j+1)} \\
 &\leq 8\varepsilon \sum_{j=m+\mu^{\frac{1}{p}}}^{m+\mu-1} \int_j^{j+1} \frac{1}{x \ln x} dx \leq 8\varepsilon \int_{j+\mu^{\frac{1}{p}}}^{j+\mu} \frac{1}{x \ln x} dx \leq 8\varepsilon \ln p
 \end{aligned}$$

oraz analogicznie jak przy szacowaniu wielkości $|S_2|$ mamy

$$|S_5| = \left| \sum_{j=m}^{m+\mu^{\frac{1}{p}}-1} \sum_{k=n+\nu^{\frac{1}{p}}}^N c_{j,k} \sin(jx) \cos(ky) \right| < 8\varepsilon \ln p.$$

Dalej, korzystając z Lematu 5, otrzymujemy

$$|S_6| = \left| \sum_{j=m+\mu^{\frac{1}{p}}}^M \sum_{k=n+\nu^{\frac{1}{p}}}^N c_{j,k} \sin(jx) \cos(ky) \right| \leq \sum_{j=m+\mu^{\frac{1}{p}}}^M \sum_{k=n+\nu^{\frac{1}{p}}}^N |c_{j,k}|$$

$$\begin{aligned}
 &< 16\varepsilon \sum_{j=m+\mu^{\frac{1}{p}}}^{m+\mu-1} \sum_{k=n+\nu^{\frac{1}{p}}}^{n+\nu-1} \frac{1}{(j+1)\ln(j+1)} \frac{1}{(k+1)\ln(k+1)} \\
 &\leq 16\varepsilon \sum_{j=m+\mu^{\frac{1}{p}}}^{m+\mu-1} \int_j^{j+1} \frac{1}{x \ln x} dx \sum_{k=n+\nu^{\frac{1}{p}}}^{n+\nu-1} \int_k^{k+1} \frac{1}{y \ln y} dy \\
 &\leq 16\varepsilon \int_{n+\nu^{\frac{1}{p}}}^{n+\nu} \int_{m+\mu^{\frac{1}{p}}}^{m+\mu} \frac{1}{x \ln x} \frac{1}{y \ln y} dx dy \leq 16\varepsilon \ln^2 p. \tag{3.59}
 \end{aligned}$$

Przypadek (b): $\max\{\mu, \eta\} < m \leq M$ oraz $\eta < n \leq N \leq \nu$. W przypadku (b) mamy dwa przypadki do rozważenia:

(b₁): $n + \nu^{\frac{1}{p}} > N$. Wykorzystując (3.56) dostajemy

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=m}^M \sum_{k=n}^N c_{j,k} \sin(jx) \cos(ky) &= \sum_{k=n}^N \left(-k \sin(kq_k) \left(y - \frac{2l_2\pi}{r} \right) + \cos\left(k \frac{2l_2\pi}{r}\right) \right) \sum_{j=m}^M c_{j,k} \sin(jx) \\
 &= \left(y - \frac{2l_2\pi}{r} \right) \sum_{k=n}^N (-k \sin(kq_k)) \sum_{j=m}^M c_{j,k} \sin(jx) + \sum_{k=n}^N \sum_{j=m}^M c_{j,k} \cos\left(k \frac{2l_2\pi}{r}\right) \sin(jx) \\
 &= S_7 + S_8.
 \end{aligned}$$

Korzystając z Lematu 11 oraz (3.54), analogicznie jak w (3.31) otrzymujemy

$$|S_7| \leq \left(y - \frac{2l_2\pi}{r} \right) \sum_{k=n}^{n+\nu^{\frac{1}{p}}-1} k \left| \sum_{j=m}^M c_{j,k} \sin(jx) \right| < \frac{\pi}{2\nu^{\frac{1}{p}}r} \sum_{k=n}^{n+\nu^{\frac{1}{p}}-1} (\varepsilon + r\varepsilon + r\varepsilon) \leq 3\pi\varepsilon. \tag{3.60}$$

Dalej, korzystając z Lematu 11, (3.54) oraz definicji klasy $DGM(p, 2\alpha, 2\beta, 2\gamma, r)$, analogicznie jak w (3.32) dostajemy, że

$$|S_8| \leq \sum_{k=n}^{n+\nu^{\frac{1}{p}}-1} \left| \sum_{j=m}^M c_{j,k} \sin(jx) \right| \leq \frac{\pi\varepsilon}{r} \left(C\lambda \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{2^{\frac{s}{p}}} + r \right) \ll \varepsilon. \tag{3.61}$$

Stąd nierówność (3.53) jest spełniona.

(b₂): $n + \nu^{\frac{1}{p}} \leq N$. Wtedy korzystając z (3.56) mamy

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=m}^M \sum_{k=n}^N c_{j,k} \sin(jx) \cos(ky) &= \sum_{k=n}^{n+\nu^{\frac{1}{p}}-1} \cos(ky) \sum_{j=m}^M c_{j,k} \sin(jx) + \sum_{k=n+\nu^{\frac{1}{p}}}^N \cos(ky) \sum_{j=m}^M c_{j,k} \sin(jx) \\
 &= \sum_{k=n}^{n+\nu^{\frac{1}{p}}-1} \left(\left(-k \sin(kq_k) \left(y - \frac{2l_2\pi}{r} \right) \right) + \cos\left(k \frac{2l_2\pi}{r}\right) \right) \sum_{j=m}^M c_{j,k} \sin(jx) \\
 &\quad + \sum_{k=n+\nu^{\frac{1}{p}}}^N \cos(ky) \sum_{j=m}^M c_{j,k} \sin(jx) \\
 &= \left(y - \frac{2l_2\pi}{r} \right) \sum_{k=n}^{n+\nu^{\frac{1}{p}}-1} (-k \sin(kq_k)) \sum_{j=m}^M c_{j,k} \sin(jx) + \sum_{k=n}^{n+\nu^{\frac{1}{p}}-1} \sum_{j=m}^M c_{j,k} \cos\left(k \frac{2l_2\pi}{r}\right) \sin(jx)
 \end{aligned}$$

$$+ \sum_{k=n+\nu^{\frac{1}{p}}}^N \cos(ky) \sum_{j=m}^M c_{j,k} \sin(jx) = S_9 + S_{10} + S_{11}.$$

Analogicznie jak w (3.60) oraz (3.61) otrzymujemy, że $|S_9| \leq 3\pi\varepsilon$, $|S_{10}| \ll \varepsilon$. Wykonując podobne oszacowania jak w (3.33) dostajemy $|S_{11}| \ll \varepsilon$. Stąd nierówność (3.53) jest prawdziwa. Przypadek (c): $\eta < m \leq M \leq \mu$ oraz $\max\{\eta, \nu\} < n \leq N$. Mamy ponownie do rozważenia dwa przypadki:

(c_1): $m + \mu^{\frac{1}{p}} > N$. Wykorzystując (3.56) mamy

$$\begin{aligned} \sum_{j=m}^M \sum_{k=n}^N c_{j,k} \sin(jx) \cos(ky) &= \sum_{j=m}^M \left(j \cos(jz_j) \left(x - \frac{2l_1\pi}{r} \right) + \sin(j \frac{2l_1\pi}{r}) \right) \sum_{k=n}^N c_{j,k} \cos(ky) \\ &= \left(x - \frac{2l_1\pi}{r} \right) \sum_{j=m}^M j \cos(jz_j) \sum_{k=n}^N c_{j,k} \cos(ky) + \sum_{k=n}^N \sum_{j=m}^M c_{j,k} \sin(j \frac{2l_1\pi}{r}) \cos(ky) \\ &= S_9 + S_{10}. \end{aligned}$$

Analogicznie jak w (3.60) wykorzystując (2.2) zamiast (2.1) otrzymujemy

$$|S_9| \leq \left(x - \frac{2l_1\pi}{r} \right) \sum_{j=m}^{m+\mu^{\frac{1}{p}}-1} j \left| \sum_{k=n}^N c_{j,k} \cos(ky) \right| < \frac{\pi}{2\nu^{\frac{1}{p}}r} \sum_{j=m}^{m+\mu^{\frac{1}{p}}-1} (\varepsilon + r\varepsilon + r\varepsilon) \leq 3\pi\varepsilon. \quad (3.62)$$

Analogicznie jak w (3.61) wykorzystując (2.2) zamiast (2.1) dostajemy

$$|S_{10}| \leq \sum_{j=m}^{m+\mu^{\frac{1}{p}}-1} \left| \sum_{k=n}^N c_{j,k} \cos(ky) \right| < \frac{\pi\varepsilon}{r} \left(C\lambda \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{2^{\frac{r}{p}}} + r \right) \ll \varepsilon. \quad (3.63)$$

Zatem nierówność (3.53) jest spełniona.

Przypadek (d): $\max\{\eta, \mu\} < m \leq M$ oraz $\max\{\eta, \nu\} < n \leq N$. Wykorzystując Lemat 3 otrzymujemy

$$\begin{aligned} \left| \sum_{j=m}^M \sum_{k=n}^N c_{j,k} \sin(jx) \cos(ky) \right| &= \left| \sum_{j=m}^M \sin(jx) \sum_{k=n}^N c_{j,k} \cos(ky) \right| \\ &= \left| \sum_{j=m}^M \sin(jx) \left(\sum_{k=n}^N \Delta_{0r} c_{j,k} D_{k,r}(y) - \sum_{k=N+1}^{N+r} |c_{j,k}| |D_{k,-r}(y)| \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sum_{k=n}^{n+r-1} c_{j,k} D_{k,-r}(y) \right) \right| \\ &\leq \left| \sum_{j=m}^M \sum_{k=n}^N \Delta_{rr} c_{j,k} \tilde{D}_{j,r}(x) D_{k,r}(y) \right| + \left| \sum_{j=M+1}^{M+r} \sum_{k=n}^N \Delta_{0r} c_{j,k} \tilde{D}_{j,-r}(x) D_{k,r}(y) \right| \\ &\quad + \left| \sum_{j=m}^{m+r-1} \sum_{k=n}^N \Delta_{0r} c_{j,k} \tilde{D}_{j,-r}(x) D_{k,r}(y) \right| + \left| \sum_{j=m}^M \sum_{k=N+1}^{N+r} \Delta_{r0} c_{j,k} \tilde{D}_{j,r}(x) D_{k,-r}(y) \right| \\ &\quad + \left| \sum_{j=m}^M \sum_{k=n}^{n+r-1} \Delta_{r0} c_{j,k} \tilde{D}_{j,r}(x) D_{k,-r}(y) \right| + \left| \sum_{j=M+1}^{M+r} \sum_{k=N+1}^{N+r} c_{j,k} \tilde{D}_{j,-r}(x) D_{k,-r}(y) \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \left| \sum_{j=m}^{m+r-1} \sum_{k=N+1}^{N+r} c_{j,k} \tilde{D}_{j,-r}(x) D_{k,-r}(y) \right| + \left| \sum_{j=M}^{M+r} \sum_{k=n}^{n+r-1} c_{j,k} \tilde{D}_{j,-r}(x) D_{k,-r}(y) \right| \\
 & + \left| \sum_{j=m}^{m+r-1} \sum_{k=n}^{n+r-1} c_{j,k} \tilde{D}_{j,-r}(x) D_{k,-r}(y) \right|. \tag{3.64}
 \end{aligned}$$

Korzystając z (3.17) oraz (3.54), analogicznie jak w (3.34) uzyskujemy

$$\left| \sum_{j=m}^M \sum_{k=n}^N c_{j,k} \sin(jx) \sin(ky) \right| \leq \frac{\pi^2}{r^2} (\varepsilon + 2r\varepsilon + 2r\varepsilon + 4r^2\varepsilon) \leq 4\pi^2\varepsilon. \tag{3.65}$$

Przypadek (e): $\eta < m \leq \mu < M$ i $\eta < n \leq N \leq \nu$. Wtedy

$$\left| \sum_{j=m}^M \sum_{k=n}^N c_{j,k} \sin(jx) \cos(ky) \right| \leq \left| \sum_{j=m}^{\mu} \sum_{k=n}^N c_{j,k} \sin(jx) \cos(ky) \right| + \left| \sum_{j=\mu+1}^M \sum_{k=n}^N c_{j,k} \sin(jx) \cos(ky) \right|$$

oraz korzystając z Przypadku (a) i (b) otrzymujemy (3.53).

Przypadek (f): $\eta < m \leq M \leq \mu$ i $\eta < n \leq \nu < N$. Mamy

$$\left| \sum_{j=m}^M \sum_{k=n}^N c_{j,k} \sin(jx) \cos(ky) \right| \leq \left| \sum_{j=m}^M \sum_{k=n}^{\nu} c_{j,k} \sin(jx) \cos(ky) \right| + \left| \sum_{j=m}^M \sum_{k=\nu+1}^N c_{j,k} \sin(jx) \cos(ky) \right|$$

i korzystając z Przypadku (a) i (c) dostajemy (3.53).

Przypadek (g): $\max\{\eta, \mu\} < m \leq M$ i $\eta < n \leq \nu < N$. Wtedy

$$\left| \sum_{j=m}^M \sum_{k=n}^N c_{j,k} \sin(jx) \cos(ky) \right| \leq \left| \sum_{j=m}^{\mu} \sum_{k=n}^N c_{j,k} \sin(jx) \cos(ky) \right| + \left| \sum_{j=\mu+1}^M \sum_{k=n}^N c_{j,k} \sin(jx) \cos(ky) \right|$$

oraz korzystając z Przypadku (c) i (d) uzyskujemy (3.53).

Przypadek (h): $\eta < m \leq \mu < M$ i $\max\{\eta, \nu\} < n \leq N$. Teraz

$$\left| \sum_{j=m}^M \sum_{k=n}^N c_{j,k} \sin(jx) \cos(ky) \right| \leq \left| \sum_{j=m}^M \sum_{k=n}^{\nu} c_{j,k} \sin(jx) \cos(ky) \right| + \left| \sum_{j=m}^M \sum_{k=\nu+1}^N c_{j,k} \sin(jx) \cos(ky) \right|$$

i korzystając z Przypadku (b) i (d) otrzymujemy (3.53).

Przypadek (i): $\eta < m \leq \mu < M$ i $\eta < n \leq \nu < N$. Wtedy

$$\begin{aligned}
 \left| \sum_{j=m}^M \sum_{k=n}^N c_{j,k} \sin(jx) \cos(ky) \right| & \leq \left| \sum_{j=m}^{\mu} \sum_{k=n}^{\nu} c_{j,k} \sin(jx) \cos(ky) \right| + \left| \sum_{j=\mu+1}^M \sum_{k=n}^{\nu} c_{j,k} \sin(jx) \cos(ky) \right| \\
 & + \left| \sum_{j=m}^{\mu} \sum_{k=\nu+1}^N c_{j,k} \sin(jx) \cos(ky) \right| + \left| \sum_{j=\mu+1}^M \sum_{k=\nu+1}^N c_{j,k} \sin(jx) \cos(ky) \right|.
 \end{aligned}$$

Korzystając z Przypadków (a) - (d) otrzymujemy (3.53).

Przyjmijmy teraz, że $x \in \left(\frac{(2l_1+1)\pi}{r}, \frac{2(l_1+1)\pi}{r}\right)$ oraz $y \in \left(\frac{2l_2\pi}{r}, \frac{(2l_2+1)\pi}{r}\right]$, gdzie $l_1 \in \{0, 1, \dots, [\frac{r}{2}] - 1\}$, $l_2 \in \{0, 1, \dots, [\frac{r}{2}]\}$, gdy $r \geq 3$ jest liczbą nieparzystą, oraz $l_1, l_2 \in \{0, 1, \dots, [\frac{r}{2}] - 1\}$, gdy r jest

liczbą parzystą. Niech $\mu = \left\lceil \frac{1}{\frac{2(l_1+1)\pi}{r} - x} \right\rceil^p$ oraz $\nu = \left\lceil \frac{1}{y - \frac{2l_2\pi}{r}} \right\rceil^p$. Wykorzystując elementarne przekształcenia otrzymujemy

$$\begin{aligned} \sin(jx) \cos(ky) &= \left(\sin(jx) - \sin\left(j \frac{2(l_1+1)\pi}{r}\right) \right) \left(\cos(ky) - \cos\left(k \frac{2l_2\pi}{r}\right) \right) \\ &\quad + \left(\sin(jx) - \sin\left(j \frac{2(l_1+1)\pi}{r}\right) \right) \cos\left(k \frac{2l_2\pi}{r}\right) \\ &\quad + \sin\left(j \frac{2(l_1+1)\pi}{r}\right) \left(\cos(ky) - \cos\left(k \frac{2l_2\pi}{r}\right) \right) \\ &\quad + \sin\left(j \frac{2(l_1+1)\pi}{r}\right) \cos\left(k \frac{2l_2\pi}{r}\right). \end{aligned} \quad (3.66)$$

Stosując twierdzenie Lagrange'a o wartości średniej do funkcji $f(x) = \sin(jx)$ oraz $f(y) = \cos(ky)$ odpowiednio na przedziałach $\left[x, \frac{2(l_1+1)\pi}{r}\right]$ oraz $\left[\frac{2l_2\pi}{r}, y\right]$, uzyskujemy, że dla dowolnego $j, k \in \mathbb{N}$ istnieją liczby $z_j \in \left(x, \frac{2(l_1+1)\pi}{r}\right)$ oraz $q_k \in \left(\frac{2l_2\pi}{r}, y\right)$ takie, że

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{2(l_1+1)\pi}{r}\right) - \sin(jx) &= j \cos(jz_j) \left(\frac{2(l_1+1)\pi}{r} - x\right), \\ \cos(ky) - \cos\left(\frac{2l_2\pi}{r}\right) &= -k \sin(kq_k) \left(y - \frac{2l_2\pi}{r}\right). \end{aligned} \quad (3.67)$$

Musimy rozważyć dziewięć następujących przypadków:

Przypadek (a*): $\eta < m \leq M \leq \mu$ oraz $\eta < n \leq N \leq \nu$. W przypadku (a*) mamy do rozpatrzenia cztery przypadki:

(a₁*): $m + \mu^{\frac{1}{p}} > M$ oraz $n + \nu^{\frac{1}{p}} > N$. Wykorzystując (3.54), (3.66) i (3.67) uzyskujemy

$$\begin{aligned} \left| \sum_{j=m}^M \sum_{k=n}^N c_{j,k} \sin(jx) \cos(ky) \right| &\leq \left| \sum_{j=m}^M \sum_{k=n}^N c_{j,k} \left(\sin(jx) - \sin\left(j \frac{2(l_1+1)\pi}{r}\right) \right) \left(\cos(ky) - \cos\left(k \frac{2l_2\pi}{r}\right) \right) \right| \\ &\quad + \left| \sum_{j=m}^M \sum_{k=n}^N c_{j,k} \left(\sin(jx) - \sin\left(j \frac{2(l_1+1)\pi}{r}\right) \right) \cos\left(k \frac{2l_2\pi}{r}\right) \right| \\ &\quad + \left| \sum_{j=m}^M \sum_{k=n}^N c_{j,k} \sin\left(j \frac{2(l_1+1)\pi}{r}\right) \left(\cos(ky) - \cos\left(k \frac{2l_2\pi}{r}\right) \right) \right| \\ &\quad + \left| \sum_{j=m}^M \sum_{k=n}^N c_{j,k} \sin\left(j \frac{2(l_1+1)\pi}{r}\right) \cos\left(k \frac{2l_2\pi}{r}\right) \right| \\ &< \left(\frac{2(l_1+1)\pi}{r} - x \right) \left(y - \frac{2l_2\pi}{r} \right) \sum_{j=m}^M \sum_{k=n}^N |c_{j,k} j \cos(jz_j) k \sin(kq_k)| \\ &\quad + \left(\frac{2(l_1+1)\pi}{r} - x \right) \sum_{j=m}^M \sum_{k=n}^N \left| c_{j,k} j \cos(jz_j) \cos\left(k \frac{2l_2\pi}{r}\right) \right| \\ &\quad + \left(y - \frac{2l_2\pi}{r} \right) \sum_{j=m}^M \sum_{k=n}^N \left| c_{j,k} k \sin(kq_k) \sin\left(j \frac{2l_1\pi}{r}\right) \right| + \varepsilon \\ &\leq \frac{1}{\mu^{\frac{1}{p}} \nu^{\frac{1}{p}}} \sum_{j=m}^{m+\mu^{\frac{1}{p}}-1} \sum_{k=n}^{n+\nu^{\frac{1}{p}}-1} j k \ln j \ln k |c_{j,k}| \end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{\mu^{\frac{1}{p}}} \sum_{j=m}^{m+\mu^{\frac{1}{p}}-1} \sup_{j \geq m} j \ln j \sum_{k=n}^{\infty} |c_{j,k}| + \frac{1}{\nu^{\frac{1}{p}}} \sum_{k=n}^{n+\nu^{\frac{1}{p}}-1} \sup_{k \geq n} k \ln k \sum_{j=m}^{\infty} |c_{j,k}| + \varepsilon < 4\varepsilon.$$

(a_2^*) : $m + \mu^{\frac{1}{p}} > M$ oraz $n + \nu^{\frac{1}{p}} \leq N$. Wtedy

$$\begin{aligned} \sum_{j=m}^M \sum_{k=n}^N c_{j,k} \sin(jx) \cos(ky) &= \sum_{j=m}^M \sum_{k=n}^{n+\nu^{\frac{1}{p}}-1} c_{j,k} \sin(jx) \cos(ky) + \sum_{j=m}^M \sum_{k=n+\nu^{\frac{1}{p}}}^N c_{j,k} \sin(jx) \cos(ky) \\ &= S_1^* + S_2^*. \end{aligned}$$

Analogicznie jak w przypadku (a_1^*) uzyskujemy

$$\begin{aligned} |S_1^*| &= \left| \sum_{j=m}^M \sum_{k=n}^{n+\nu^{\frac{1}{p}}-1} c_{j,k} \sin(jx) \cos(ky) \right| \leq \frac{1}{\mu^{\frac{1}{p}} \nu^{\frac{1}{p}}} \sum_{j=m}^{m+\mu^{\frac{1}{p}}-1} \sum_{k=n}^{n+\nu^{\frac{1}{p}}-1} j \ln j k \ln k |c_{j,k}| \\ &+ \frac{1}{\mu^{\frac{1}{p}}} \sum_{j=m}^{m+\mu^{\frac{1}{p}}-1} \sup_{j \geq m} j \ln j \sum_{k=n}^{\infty} |c_{j,k}| + \frac{1}{\nu^{\frac{1}{p}}} \sum_{k=n}^{n+\nu^{\frac{1}{p}}-1} \sup_{k \geq n} k \ln k \sum_{j=m}^{\infty} |c_{j,k}| + \varepsilon < 4\varepsilon. \end{aligned}$$

Wykorzystując Lemat 5, (3.54) oraz (3.67), w analogiczny sposób jak dla (3.57) otrzymujemy

$$\begin{aligned} |S_2^*| &= \left| \sum_{j=m}^M \sum_{k=n+\nu^{\frac{1}{p}}}^N c_{j,k} \sin(jx) \cos(ky) \right| \\ &= \left| \sum_{j=m}^M \sum_{k=n+\nu^{\frac{1}{p}}}^N c_{j,k} \left(j \cos(jz_j) \left(\frac{2(l_1+1)\pi}{r} - x \right) + \sin\left(j \frac{2l_1\pi}{r}\right) \right) \cos(ky) \right| \\ &< \frac{4\varepsilon}{\mu^{\frac{1}{p}}} \sum_{j=m}^{m+\mu^{\frac{1}{p}}-1} \ln p + 4\varepsilon \ln p \leq 8\varepsilon \ln p. \end{aligned}$$

Zatem spełniona jest nierówność (3.58).

(a_3^*) : $m + \mu^{\frac{1}{p}} \leq M$ oraz $n + \nu^{\frac{1}{p}} > N$. Analogicznie jak w (a_2^*) otrzymujemy, że (3.58) jest prawdziwa.

(a_4^*) : $m + \mu^{\frac{1}{p}} \leq M$ oraz $n + \nu^{\frac{1}{p}} \leq N$. Wtedy

$$\begin{aligned} \sum_{j=m}^M \sum_{k=n}^N c_{j,k} \sin(jx) \cos(ky) &= \sum_{j=m}^{m+\mu^{\frac{1}{p}}-1} \sum_{k=n}^{n+\nu^{\frac{1}{p}}-1} c_{j,k} \sin(jx) \cos(ky) + \sum_{j=m+\mu^{\frac{1}{p}}}^M \sum_{k=n}^{n+\nu^{\frac{1}{p}}-1} c_{j,k} \sin(jx) \cos(ky) \\ &+ \sum_{j=m}^{m+\mu^{\frac{1}{p}}-1} \sum_{k=n+\nu^{\frac{1}{p}}}^N c_{j,k} \sin(jx) \cos(ky) + \sum_{j=m+\mu^{\frac{1}{p}}}^M \sum_{k=n+\nu^{\frac{1}{p}}}^N c_{j,k} \sin(jx) \cos(ky) \\ &= S_3^* + S_4^* + S_5^* + S_6^*. \end{aligned}$$

Analogicznie jak w (a_1^*) dostajemy, że $|S_3^*| < 4\varepsilon$. Ponadto, podobnie jak przy szacowaniu wielkości $|S_4|$ korzystając z (3.67) zamiast (3.56), otrzymujemy $|S_4^*| < 8\varepsilon \ln p$. Dalej, w analogiczny sposób jak dla (3.57) uzyskujemy $|S_5^*| < 8\varepsilon \ln p$ oraz w identyczny sposób jak dla (3.59), że $|S_6^*| < 16\varepsilon \ln^2 p$.

Przypadek (b^*) : $\max\{\mu, \eta\} < m \leq M$ oraz $\eta < n \leq N \leq \nu$. Dokonując analogicznych szacowań jak w Przypadku (b) otrzymujemy, że nierówność (3.53) jest prawdziwa.

Przypadek (c^*) : $\eta < m \leq M \leq \mu$ oraz $\max\{\eta, \nu\} < n \leq N$. W przypadku (c^*) mamy dwa przypadki do rozważenia:

(c_1^*) : $m + \mu^{\frac{1}{p}} > N$. Wykorzystując (3.67) otrzymujemy

$$\begin{aligned} \sum_{j=m}^M \sum_{k=n}^N c_{j,k} \sin(jx) \cos(ky) &= \sum_{j=m}^M \left(-j \cos(jz_j) \left(\frac{2(l_1+1)\pi}{r} - x \right) + \sin(j \frac{2l_1\pi}{r}) \right) \sum_{k=n}^N c_{j,k} \cos(ky) \\ &= \left(\frac{2(l_1+1)\pi}{r} - x \right) \sum_{j=m}^M -j \cos(jz_j) \sum_{k=n}^N c_{j,k} \cos(ky) + \sum_{k=n}^N \sum_{j=m}^M c_{j,k} \sin(j \frac{2l_1\pi}{r}) \cos(ky) \\ &= S_7^* + S_8^*. \end{aligned}$$

Analogicznie jak w (3.60) wykorzystując (2.2) zamiast (2.1) dostajemy

$$|S_7^*| \leq \left(\frac{2(l_1+1)\pi}{r} - x \right) \sum_{j=m}^{m+\mu^{\frac{1}{p}}-1} j \left| \sum_{k=n}^N c_{j,k} \cos(ky) \right| < \frac{\pi}{2\nu^{\frac{1}{p}}r} \sum_{j=m}^{m+\mu^{\frac{1}{p}}-1} (\varepsilon + r\varepsilon + r\varepsilon) \leq 3\pi\varepsilon. \quad (3.68)$$

Analogicznie jak w (3.61) wykorzystując (2.2) zamiast (2.1) otrzymujemy

$$|S_8^*| \leq \sum_{j=m}^{m+\mu^{\frac{1}{p}}-1} \left| \sum_{k=n}^N c_{j,k} \cos(ky) \right| \leq \frac{\pi\varepsilon}{r} \left(C\lambda \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{2^{\frac{r}{p}}} + r \right) \ll \varepsilon. \quad (3.69)$$

Zatem nierówność (3.53) jest spełniona.

Przypadek (d^*) : $\max\{\eta, \mu\} < m \leq M$ oraz $\max\{\eta, \nu\} < n \leq N$. Wykorzystując Lemat 3, (3.16), (3.17) oraz (3.54), analogicznie jak w (3.34) uzyskujemy

$$\left| \sum_{j=m}^M \sum_{k=n}^N c_{j,k} \sin(jx) \sin(ky) \right| \leq \frac{\pi^2}{r^2} (\varepsilon + 2r\varepsilon + 2r\varepsilon + 4r^2\varepsilon) \leq 4\pi^2\varepsilon. \quad (3.70)$$

Przypadek (e^*) : $\eta < m \leq \mu < M$ i $\eta < n \leq N \leq \nu$. Wtedy, analogicznie jak w Przypadku (e), korzystając z Przypadku (a^*) i (b^*) otrzymujemy (3.53).

Przypadek (f^*) : $\eta < m \leq M \leq \mu$ i $\eta < n \leq \nu < N$. Korzystając z Przypadku (a^*) i (c^*) dostajemy (3.53).

Przypadek (g^*) : $\max\{\eta, \mu\} < m \leq M$ i $\eta < n \leq \nu < N$. Wtedy analogicznie jak w Przypadku (g), korzystając z Przypadku (c^*) i (d^*) uzyskujemy (3.53).

Przypadek (h^*) : $\eta < m \leq \mu < M$ i $\max\{\eta, \nu\} < n \leq N$. Korzystając z Przypadku (b^*) i (d^*) otrzymujemy (3.53).

Przypadek (i^*) : $\eta < m \leq \mu < M$ i $\eta < n \leq \nu < N$. Wtedy, analogicznie jak w Przypadku (i), korzystając z Przypadków (a^*) - (d^*) otrzymujemy (3.53).

Przyjmijmy teraz, że $x \in \left(\frac{2l_1\pi}{r}, \frac{(2l_1+1)\pi}{r}\right]$ oraz $y \in \left(\frac{(2l_2+1)\pi}{r}, \frac{2(l_2+1)\pi}{r}\right)$, gdzie $l_1 \in \{0, 1, \dots, [\frac{r}{2}]\}$, $l_2 \in \{0, 1, \dots, [\frac{r}{2}] - 1\}$, gdy $r \geq 3$ jest liczbą nieparzystą, oraz $l_1, l_2 \in \{0, 1, \dots, [\frac{r}{2}] - 1\}$, gdy r jest liczbą parzystą. Niech $\mu = \left[\frac{1}{x - \frac{2l_1\pi}{r}}\right]^p$ oraz $\nu = \left[\frac{1}{\frac{2(l_2+1)\pi}{r} - y}\right]^p$. Wykorzystując elementarne przekształcenia otrzymujemy

$$\begin{aligned} \sin(jx) \cos(ky) &= \left(\sin(jx) - \sin\left(j\frac{2l_1\pi}{r}\right)\right) \left(\cos(ky) - \cos\left(k\frac{2(l_2+1)\pi}{r}\right)\right) \\ &+ \left(\sin(jx) - \sin\left(j\frac{2l_1\pi}{r}\right)\right) \cos\left(k\frac{2(l_2+1)\pi}{r}\right) \\ &+ \sin\left(j\frac{2l_1\pi}{r}\right) \left(\cos(ky) - \cos\left(k\frac{2(l_2+1)\pi}{r}\right)\right) \\ &+ \sin\left(j\frac{2l_1\pi}{r}\right) \cos\left(k\frac{2(l_2+1)\pi}{r}\right). \end{aligned} \quad (3.71)$$

Stosując twierdzenie Lagrange'a o wartości średniej do funkcji $f(x) = \sin(jx)$ oraz $f(y) = \cos(ky)$ odpowiednio na przedziałach $\left[\frac{2l_1\pi}{r}, x\right]$ oraz $\left[y, \frac{2(l_2+1)\pi}{r}\right]$, uzyskujemy, że dla dowolnego $j, k \in \mathbb{N}$ istnieją liczby $z_j \in \left(\frac{2l_1\pi}{r}, x\right)$ oraz $q_k \in \left(y, \frac{2(l_2+1)\pi}{r}\right)$ takie, że

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{2l_1\pi}{r}\right) - \sin(jx) &= j \cos(jz_j) \left(x - \frac{2l_1\pi}{r}\right), \\ \cos\left(\frac{2(l_2+1)\pi}{r}\right) - \cos(ky) &= -k \sin(kq_k) \left(\frac{2(l_2+1)\pi}{r} - y\right). \end{aligned} \quad (3.72)$$

Musimy rozważyć dziewięć następujących przypadków:

Przypadek (a^{**}): $\eta < m \leq M \leq \mu$ oraz $\eta < n \leq N \leq \nu$. W przypadku (a^{**}) mamy cztery przypadki do rozpatrzenia:

(a₁^{**}): $m + \mu^{\frac{1}{p}} > M$ oraz $n + \nu^{\frac{1}{p}} > N$. Wykorzystując (3.71) i (3.72) zamiast (3.66) i (3.67) oraz korzystając z (3.54) w analogiczny sposób jak w Przypadku (a₁^{*}) otrzymujemy

$$\left| \sum_{j=m}^M \sum_{k=n}^N c_{j,k} \sin(jx) \cos(ky) \right| < 4\varepsilon.$$

(a₂^{**}): $m + \mu^{\frac{1}{p}} > M$ oraz $n + \nu^{\frac{1}{p}} \leq N$. Wtedy

$$\begin{aligned} \sum_{j=m}^M \sum_{k=n}^N c_{j,k} \sin(jx) \cos(ky) &= \sum_{j=m}^M \sum_{k=n}^{n+\nu^{\frac{1}{p}}-1} c_{j,k} \sin(jx) \cos(ky) + \sum_{j=m}^M \sum_{k=n+\nu^{\frac{1}{p}}}^N c_{j,k} \sin(jx) \cos(ky) \\ &= S_1^{**} + S_2^{**}. \end{aligned}$$

Szacując w podobny sposób jak w Przypadku (a₂^{*}), wykorzystując (3.54), Lemat 5 oraz (3.72) zamiast (3.67) dostajemy $|S_1^{**}| < 4\varepsilon$ i $|S_2^{**}| < 8\varepsilon \ln p$.

Stąd spełniona jest nierówność (3.58).

(a₃^{**}): $m + \mu^{\frac{1}{p}} \leq M$ oraz $n + \nu^{\frac{1}{p}} > N$. Analogicznie jak w (a₂^{**}) otrzymujemy, że nierówność (3.58) jest prawdziwa.

(a_4^{**}) : $m + \mu^{\frac{1}{p}} \leq M$ oraz $n + \nu^{\frac{1}{p}} \leq N$. Wtedy

$$\begin{aligned}
 & \sum_{j=m}^M \sum_{k=n}^N c_{j,k} \sin(jx) \cos(ky) \\
 &= \sum_{j=m}^{m+\mu^{\frac{1}{p}}-1} \sum_{k=n}^{n+\nu^{\frac{1}{p}}-1} c_{j,k} \sin(jx) \cos(ky) + \sum_{j=m+\mu^{\frac{1}{p}}}^M \sum_{k=n}^{n+\nu^{\frac{1}{p}}-1} c_{j,k} \sin(jx) \cos(ky) \\
 &+ \sum_{j=m}^{m+\mu^{\frac{1}{p}}-1} \sum_{k=n+\nu^{\frac{1}{p}}}^N c_{j,k} \sin(jx) \cos(ky) + \sum_{j=m+\mu^{\frac{1}{p}}}^M \sum_{k=n+\nu^{\frac{1}{p}}}^N c_{j,k} \sin(jx) \cos(ky) \\
 &= S_3^{**} + S_4^{**} + S_5^{**} + S_6^{**}.
 \end{aligned}$$

Analogicznie jak w (a_1^*) uzyskujemy, że $|S_3^{**}| < 4\varepsilon$. Ponadto, analogicznie jak przy szacowaniu wielkości $|S_4|$ korzystając z (3.72) zamiast (3.56), otrzymujemy $|S_4^{**}| < 8\varepsilon \ln p$. Dalej, w analogiczny sposób jak dla (3.57) dostajemy, że $|S_5^{**}| < 8\varepsilon \ln p$ oraz w podobny sposób jak dla (3.59) mamy, że $|S_6^{**}| < 16\varepsilon \ln^2 p$.

Przypadek (b^{**}) : $\max\{\mu, \eta\} < m \leq M$ oraz $\eta < n \leq N \leq \nu$. W przypadku (b^{**}) mamy dwa przypadki do rozważenia:

(b_1^{**}) : $n + \nu^{\frac{1}{p}} > N$. Wykorzystując (3.72) otrzymujemy

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=m}^M \sum_{k=n}^N c_{j,k} \sin(jx) \cos(ky) &= \sum_{k=n}^N \left(k \sin(kq_k) \left(\frac{2(l_2+1)\pi}{r} - y \right) + \cos\left(k \frac{2l_2\pi}{r}\right) \right) \sum_{j=m}^M c_{j,k} \sin(jx) \\
 &= \left(\frac{2(l_2+1)\pi}{r} - y \right) \sum_{k=n}^N (-k \sin(kq_k)) \sum_{j=m}^M c_{j,k} \sin(jx) + \sum_{k=n}^N \sum_{j=m}^M c_{j,k} \cos\left(k \frac{2l_2\pi}{r}\right) \sin(jx) \\
 &= S_7^{**} + S_8^{**}.
 \end{aligned}$$

Korzystając z Lematu 11 oraz (3.54), analogicznie jak w (3.31) dostajemy

$$|S_7^{**}| \leq \left(y - \frac{2l_2\pi}{r} \right) \sum_{k=n}^{n+\nu^{\frac{1}{p}}-1} k \left| \sum_{j=m}^M c_{j,k} \sin(jx) \right| < \frac{\pi}{2\nu^{\frac{1}{p}}r} \sum_{k=n}^{n+\nu^{\frac{1}{p}}-1} (\varepsilon + r\varepsilon + r\varepsilon) \leq 3\pi\varepsilon. \quad (3.73)$$

Dalej, korzystając z Lematu 11, (3.54) oraz definicji klasy $DGM(p, {}_2\alpha, {}_2\beta, {}_2\gamma, r)$, analogicznie jak w (3.32) otrzymujemy

$$|S_8^{**}| \leq \sum_{k=n}^{n+\nu^{\frac{1}{p}}-1} \left| \sum_{j=m}^M c_{j,k} \sin(jx) \right| \leq \frac{\pi\varepsilon}{r} \left(C\lambda \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{2^{\frac{r}{p}}} + r \right) \ll \varepsilon. \quad (3.74)$$

Stąd nierówność (3.53) jest prawdziwa.

(b_2^{**}) : $n + \nu^{\frac{1}{p}} \leq N$. Wtedy

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=m}^M \sum_{k=n}^N c_{j,k} \sin(jx) \cos(ky) &= \sum_{k=n}^{n+\nu^{\frac{1}{p}}-1} \left(\left(k \sin(kq_k) \left(\frac{2(l_2+1)\pi}{r} - y \right) \right) \right. \\
 &\quad \left. + \cos\left(k \frac{2(l_2+1)\pi}{r}\right) \right) \sum_{j=m}^M c_{j,k} \sin(jx) + \sum_{k=n+\nu^{\frac{1}{p}}}^N \cos(ky) \sum_{j=m}^M c_{j,k} \sin(jx)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \left(\frac{2(l_2 + 1)\pi}{r} - y \right) \sum_{k=n}^{n+\nu^{\frac{1}{p}}-1} k \sin(kq_k) \sum_{j=m}^M c_{j,k} \sin(jx) \\
 &+ \sum_{k=n}^{n+\nu^{\frac{1}{p}}-1} \sum_{j=m}^M c_{j,k} \cos\left(k \frac{2(l_2 + 1)\pi}{r}\right) \sin(jx) + \sum_{k=n+\nu^{\frac{1}{p}}}^N \cos(ky) \sum_{j=m}^M c_{j,k} \sin(jx) \\
 &= S_9^{**} + S_{10}^{**} + S_{11}^{**}.
 \end{aligned}$$

Analogicznie jak w (3.60) oraz (3.61) mamy $|S_9^{**}| \leq 3\pi\varepsilon$, $|S_{10}^{**}| \ll \varepsilon$. Wykonując podobne oszacowania jak w (3.33) uzyskujemy, że $|S_{11}^{**}| \ll \varepsilon$. Zatem nierówność (3.53) jest spełniona. Przypadek (c^{**}): $\eta < m \leq M \leq \mu$ oraz $\max\{\eta, \nu\} < n \leq N$. W przypadku (c^{**}) mamy dwa przypadki do rozważenia:

(c₁^{**}): $m + \mu^{\frac{1}{p}} > N$. Wykorzystując (3.72) otrzymujemy

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=m}^M \sum_{k=n}^N c_{j,k} \sin(jx) \cos(ky) &= \sum_{j=m}^M \left(j \cos(jz_j) \left(x - \frac{2l_1\pi}{r} \right) + \sin\left(j \frac{2l_1\pi}{r}\right) \right) \sum_{k=n}^N c_{j,k} \cos(ky) \\
 &= \left(x - \frac{2l_1\pi}{r} \right) \sum_{j=m}^M j \cos(jz_j) \sum_{k=n}^N c_{j,k} \cos(ky) + \sum_{k=n}^N \sum_{j=m}^M c_{j,k} \sin\left(j \frac{2l_1\pi}{r}\right) \cos(ky) \\
 &= S_7^{**} + S_8^{**}.
 \end{aligned}$$

Analogicznie jak w (3.60) oraz (3.61) uzyskujemy, że $|S_7^{**}| < 3\pi\varepsilon$, oraz $|S_8^{**}| \ll \varepsilon$. Stąd nierówność (3.53) jest spełniona.

Przypadek (d^{**}): $\max\{\eta, \mu\} < m \leq M$ oraz $\max\{\eta, \nu\} < n \leq N$. Wykorzystując Lemat 3, (3.16), (3.17) oraz (3.54), analogicznie jak w (3.34) uzyskujemy

$$\left| \sum_{j=m}^M \sum_{k=n}^N c_{j,k} \sin(jx) \cos(ky) \right| \leq \frac{\pi^2}{r^2} (\varepsilon + 2r\varepsilon + 2r\varepsilon + 4r^2\varepsilon) \leq 4\pi^2\varepsilon. \quad (3.75)$$

Przypadek (e^{**}): $\eta < m \leq \mu < M$ i $\eta < n \leq N \leq \nu$. Wtedy, analogicznie jak w Przypadku (e), korzystając z Przypadku (a^{**}) i (b^{**}) otrzymujemy (3.53).

Przypadek (f^{**}): $\eta < m \leq M \leq \mu$ i $\eta < n \leq \nu < N$. Korzystając z Przypadku (a^{**}) i (c^{**}) dostajemy (3.53).

Przypadek (g^{**}): $\max\{\eta, \mu\} < m \leq M$ i $\eta < n \leq \nu < N$. Wtedy analogicznie jak w Przypadku (g), korzystając z Przypadku (c^{**}) i (d^{**}) uzyskujemy (3.53).

Przypadek (h^{**}): $\eta < m \leq \mu < M$ i $\max\{\eta, \nu\} < n \leq N$. Korzystając z Przypadku (b^{**}) i (d^{**}) otrzymujemy (3.53).

Przypadek (i^{**}): $\eta < m \leq \mu < M$ i $\eta < n \leq \nu < N$. Wtedy, analogicznie jak w Przypadku (i), korzystając z Przypadków (a^{**}) - (d^{**}) otrzymujemy (3.53).

Dalej, niech $x \in \left(\frac{(2l_1+1)\pi}{r}, \frac{2(l_2+1)\pi}{r} \right)$ oraz $y \in \left(\frac{(2l_2+1)\pi}{r}, \frac{2(l_2+1)\pi}{r} \right)$, gdzie $l_1, l_2 \in \{0, 1, \dots, [\frac{r}{2}] - 1\}$ dla $r \geq 2$. Niech $\mu = \left\lceil \frac{1}{\frac{2(l_1+1)\pi}{r} - x} \right\rceil^p$ oraz $\nu = \left\lceil \frac{1}{\frac{2(l_2+1)\pi}{r} - y} \right\rceil^p$. Wykorzystując elementarne przekształcenia otrzymujemy

$$\sin(jx) \cos(ky) = \left(\sin(jx) - \sin\left(j \frac{2(l_1+1)\pi}{r}\right) \right) \left(\cos(ky) - \cos\left(k \frac{2(l_2+1)\pi}{r}\right) \right)$$

$$\begin{aligned}
 & + \left(\sin(jx) - \sin\left(j \frac{2(l_1+1)\pi}{r}\right) \right) \cos\left(k \frac{2(l_2+1)\pi}{r}\right) \\
 & + \sin\left(j \frac{2(l_1+1)\pi}{r}\right) \left(\cos(ky) - \cos\left(k \frac{2(l_2+1)\pi}{r}\right) \right) \\
 & + \sin\left(j \frac{2(l_1+1)\pi}{r}\right) \cos\left(k \frac{2(l_2+1)\pi}{r}\right).
 \end{aligned} \tag{3.76}$$

Stosując twierdzenie Lagrange'a o wartości średniej do funkcji $f(x) = \sin(jx)$ oraz $f(y) = \cos(ky)$ odpowiednio na przedziałach $\left[x, \frac{2(l_2+1)\pi}{r}\right]$ oraz $\left[y, \frac{2(l_2+1)\pi}{r}\right]$, uzyskujemy, że dla dowolnego $j, k \in \mathbb{N}$ istnieją liczby $z_j \in \left(x, \frac{2(l_2+1)\pi}{r}\right)$ oraz $q_k \in \left(y, \frac{2(l_2+1)\pi}{r}\right)$ takie, że

$$\begin{aligned}
 \sin\left(\frac{2l_1\pi}{r}\right) - \sin(jx) &= j \cos(jz_j) \left(x - \frac{2l_1\pi}{r}\right), \\
 \cos\left(\frac{2(l_2+1)\pi}{r}\right) - \cos(ky) &= -k \sin(kq_k) \left(\frac{2(l_2+1)\pi}{r} - y\right).
 \end{aligned} \tag{3.77}$$

Musimy rozważyć dziewięć następujących przypadków:

Przypadek (a^{***}): $\eta < m \leq M \leq \mu$ oraz $\eta < n \leq N \leq \nu$. W przypadku (a^{***}) mamy cztery przypadki do rozpatrzenia:

(a_1^{***}): $m + \mu^{\frac{1}{p}} > M$ oraz $n + \nu^{\frac{1}{p}} > N$. Wykorzystując (3.76) i (3.77) zamiast (3.66) i (3.67) oraz korzystając z (3.54) w analogiczny sposób jak w Przypadku (a_1^*) otrzymujemy, że

$$\left| \sum_{j=m}^M \sum_{k=n}^N c_{j,k} \sin(jx) \cos(ky) \right| < 4\varepsilon.$$

(a_2^{***}): $m + \mu^{\frac{1}{p}} > M$ oraz $n + \nu^{\frac{1}{p}} \leq N$. Wtedy

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=m}^M \sum_{k=n}^N c_{j,k} \sin(jx) \cos(ky) &= \sum_{j=m}^M \sum_{k=n}^{n+\nu^{\frac{1}{p}}-1} c_{j,k} \sin(jx) \cos(ky) + \sum_{j=m}^M \sum_{k=n+\nu^{\frac{1}{p}}}^N c_{j,k} \sin(jx) \cos(ky) \\
 &= S_1^{***} + S_2^{***}.
 \end{aligned}$$

Szacując w podobny sposób jak w Przypadku (a_2^*), wykorzystując (3.54), Lemat 5 oraz (3.77) zamiast (3.67) dostajemy, że $|S_1^{***}| < 4\varepsilon$ i $|S_2^{***}| < 8\varepsilon \ln p$. Stąd

$$\left| \sum_{j=m}^M \sum_{k=n}^N c_{j,k} \sin(jx) \cos(ky) \right| < \varepsilon (4 + 8 \ln p). \tag{3.78}$$

(a_3^{***}): $m + \mu^{\frac{1}{p}} \leq M$ oraz $n + \nu^{\frac{1}{p}} > N$. Analogicznie jak w (a_2^{***}) otrzymujemy, że nierówność (3.78) jest spełniona.

(a_4^{***}): $m + \mu^{\frac{1}{p}} \leq M$ oraz $n + \nu^{\frac{1}{p}} \leq N$. Wtedy

$$\begin{aligned}
 & \sum_{j=m}^M \sum_{k=n}^N c_{j,k} \sin(jx) \cos(ky) \\
 &= \sum_{j=m}^{m+\mu^{\frac{1}{p}}-1} \sum_{k=n}^{n+\nu^{\frac{1}{p}}-1} c_{j,k} \sin(jx) \cos(ky) + \sum_{j=m+\mu^{\frac{1}{p}}}^M \sum_{k=n}^{n+\nu^{\frac{1}{p}}-1} c_{j,k} \sin(jx) \cos(ky)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{j=m}^{m+\mu^{\frac{1}{p}}-1} \sum_{k=n+\nu^{\frac{1}{p}}}^N c_{j,k} \sin(jx) \cos(ky) + \sum_{j=m+\mu^{\frac{1}{p}}}^M \sum_{k=n+\nu^{\frac{1}{p}}}^N c_{j,k} \sin(jx) \cos(ky) \\
 & = S_3^{***} + S_4^{***} + S_5^{***} + S_6^{***}.
 \end{aligned}$$

Analogicznie jak w (a_1^*) dostajemy, że $|S_3^{***}| < 4\varepsilon$. Ponadto, analogicznie jak przy szacowaniu wielkości $|S_4|$ korzystając z (3.77) zamiast (3.56), otrzymujemy $|S_4^{***}| < 8\varepsilon \ln p$. Dalej, w analogiczny sposób jak dla (3.57) uzyskujemy, że $|S_5^{***}| < 8\varepsilon \ln p$ oraz w identyczny sposób jak dla (3.59) dostajemy, że $|S_6^{***}| < 16\varepsilon \ln^2 p$. Zatem nierówność (3.53) jest spełniona.

Przypadek (b^{***}) : $\max\{\mu, \eta\} < m \leq M$ oraz $\eta < n \leq N \leq \nu$. Dokonując analogicznych szacowań jak w Przypadku (b) uzyskujemy, że (3.53) zachodzi.

Przypadek (c^{***}) : $\eta < m \leq M \leq \mu$ oraz $\max\{\eta, \nu\} < n \leq N$. W przypadku (c^{***}) mamy dwa przypadki do rozważenia:

(c_1^{***}) : $m + \mu^{\frac{1}{p}} > N$. Wykorzystując (3.77) otrzymujemy

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=m}^M \sum_{k=n}^N c_{j,k} \sin(jx) \cos(ky) & = \sum_{j=m}^M \left(j \cos(jz_j) \left(x - \frac{2(l_1+1)\pi}{r} \right) + \sin\left(j \frac{2(l_1+1)\pi}{r} \right) \right) \sum_{k=n}^N c_{j,k} \cos(ky) \\
 & = \left(x - \frac{2(l_1+1)\pi}{r} \right) \sum_{j=m}^M j \cos(jz_j) \sum_{k=n}^N c_{j,k} \cos(ky) + \sum_{k=n}^N \sum_{j=m}^M c_{j,k} \sin\left(j \frac{2l_1\pi}{r} \right) \cos(ky) \\
 & = S_7^{***} + S_8^{***}.
 \end{aligned}$$

Analogicznie jak w (3.60) oraz (3.61) uzyskujemy, że $|S_7^{***}| < 3\pi\varepsilon$, oraz $|S_8^{***}| \ll \varepsilon$. Stąd (3.53) zachodzi.

Przypadek (d^{***}) : $\max\{\eta, \mu\} < m \leq M$ oraz $\max\{\eta, \nu\} < n \leq N$. Wykorzystując Lemat 3, (3.16), (3.17) oraz (3.54), analogicznie jak w (3.34) uzyskujemy

$$\left| \sum_{j=m}^M \sum_{k=n}^N c_{j,k} \sin(jx) \cos(ky) \right| \leq \frac{\pi^2}{r^2} (\varepsilon + 2r\varepsilon + 2r\varepsilon + 4r^2\varepsilon) \leq 4\pi^2\varepsilon. \quad (3.79)$$

Przypadek (e^{***}) : $\eta < m \leq \mu < M$ i $\eta < n \leq N \leq \nu$. Wtedy, analogicznie jak w Przypadku (e), korzystając z Przypadku (a^{***}) i (b^{***}) otrzymujemy (3.53).

Przypadek (f^{***}) : $\eta < m \leq M \leq \mu$ i $\eta < n \leq \nu < N$. Jest to symetryczny odpowiednik przypadku (e^{***}) , więc korzystając z Przypadku (a^{***}) i (c^{***}) dostajemy (3.53).

Przypadek (g^{***}) : $\max\{\eta, \mu\} < m \leq M$ i $\eta < n \leq \nu < N$. Wtedy analogicznie jak w Przypadku (g), korzystając z Przypadku (c^{***}) i (d^{***}) uzyskujemy (3.53).

Przypadek (h^{***}) : $\eta < m \leq \mu < M$ i $\max\{\eta, \nu\} < n \leq N$. Jest to symetryczny odpowiednik przypadku (g^{***}) , więc korzystając z Przypadku (b^{***}) i (d^{***}) otrzymujemy (3.53).

Przypadek (i^{***}) : $\eta < m \leq \mu < M$ i $\eta < n \leq \nu < N$. Wtedy, analogicznie jak w Przypadku (i), korzystając z Przypadków (a^{***}) - (d^{***}) otrzymujemy (3.53).

Niech $y = \frac{2l_2\pi}{r}$, $x \in (\frac{2l_1\pi}{r}, \frac{(2l_1+1)\pi}{r}]$, gdzie $l_1 \in \{0, 1, \dots, [\frac{r}{2}] - 1\}$, $l_2 \in \{0, 1, \dots, [\frac{r}{2}]\}$, gdy r jest liczbą parzystą oraz $l_1, l_2 \in \{0, 1, \dots, [\frac{r}{2}]\}$, gdy r jest liczbą nieparzystą. Niech $\mu = \left[\frac{1}{x - \frac{2l_1\pi}{r}} \right]^p$.

Mamy do rozważenia następujące przypadki:

Przypadek (a°) : $\eta < m \leq M \leq \mu$. W przypadku (a°) mamy do rozważenia dwa przypadki:

(a_1°): $m + \mu^{\frac{1}{p}} > M$. Korzystając z (3.54) oraz (3.56) otrzymujemy

$$\begin{aligned} \left| \sum_{j=m}^M \sum_{k=n}^N c_{j,k} \sin(jx) \cos(k \frac{2l_2\pi}{r}) \right| &= \left| \sum_{j=m}^M \sum_{k=n}^N c_{j,k} \left(\left(\sin(jx) - \sin(j \frac{2l_1\pi}{r}) \right) + \sin(j \frac{2l_1\pi}{r}) \right) \cos(k \frac{2l_2\pi}{r}) \right| \\ &\leq \left(x - \frac{2l_1\pi}{r} \right) \sum_{j=m}^M \sum_{k=n}^N j |c_{j,k}| + \left| \sum_{j=m}^M \sum_{k=n}^N c_{j,k} \sin(j \frac{2l_1\pi}{r}) \cos(k \frac{2l_2\pi}{r}) \right| \\ &< \frac{1}{\mu^{\frac{1}{p}}} \sum_{j=m}^{m+\mu^{\frac{1}{p}}-1} \sup_{j \geq m} j \ln j \sum_{k=n}^{\infty} |c_{j,k}| + \varepsilon < 2\varepsilon. \end{aligned}$$

(a_2°): $m + \mu^{\frac{1}{p}} \leq M$. Wtedy

$$\begin{aligned} \sum_{j=m}^M \sum_{k=n}^N c_{j,k} \sin(jx) \cos(k \frac{2l_2\pi}{r}) &= \sum_{j=m}^{m+\mu^{\frac{1}{p}}-1} \sum_{k=n}^N c_{j,k} \sin(jx) \cos(k \frac{2l_2\pi}{r}) \\ &+ \sum_{j=m+\mu^{\frac{1}{p}}}^M \sum_{k=n}^N c_{j,k} \sin(jx) \cos(k \frac{2l_2\pi}{r}) = S_1^\circ + S_2^\circ. \end{aligned}$$

Analogicznie jak w przypadku (a_1°), korzystając z (3.54) oraz (3.56) mamy

$$|S_1^\circ| \ll \frac{1}{\mu^{\frac{1}{p}}} \sum_{j=m}^{m+\mu^{\frac{1}{p}}-1} \sup_{j \geq m} j \ln j \sum_{k=n}^{\infty} |c_{j,k}| < 2\varepsilon.$$

Wykorzystując (3.54) i Lemat 5, otrzymujemy

$$\begin{aligned} |S_2^\circ| &\leq \left| \sum_{j=m+\mu^{\frac{1}{p}}}^{m+\mu} \sum_{k=n}^N c_{j,k} \sin(jx) \cos(k \frac{2l_2\pi}{r}) \right| \leq 4 \sum_{j=m+\mu^{\frac{1}{p}}}^{m+\mu-1} \frac{1}{(j+1) \ln(j+1)} \sup_{j \geq m} j \ln j \sum_{k=n}^{\infty} |c_{j,k}| \\ &\leq 4\varepsilon \sum_{j=m+\mu^{\frac{1}{p}}}^{m+\mu-1} \int_j^{j+1} \frac{1}{x \ln x} dx \leq 4\varepsilon \int_{m+\mu^{\frac{1}{p}}}^{m+\mu} \frac{1}{x \ln x} dx \leq 4\varepsilon \ln p. \end{aligned}$$

Przypadek (b°): $\max\{\mu, \eta\} < m \leq M$. Wykorzystując Lemat 11, (3.54) oraz definicję klasy $DGM(p, {}_2\alpha, {}_2\beta, {}_2\gamma, r)$ dostajemy w analogiczny sposób jak w (3.32), że

$$\left| \sum_{j=m}^M \sum_{k=n}^N c_{j,k} \sin(jx) \cos(k \frac{2l_2\pi}{r}) \right| \leq \sum_{k=n}^N \left| \sum_{j=m}^M c_{j,k} \sin(jx) \right| \leq \frac{C\pi\varepsilon\lambda}{r} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{2^{\frac{r}{p}}} + \pi\varepsilon \ll \varepsilon.$$

Przypadek (c°): $\eta < m \leq \mu < M$. W tym przypadku rozbijając sumę na dwa składniki otrzymujemy

$$\begin{aligned} \left| \sum_{j=m}^M \sum_{k=n}^N c_{j,k} \sin(jx) \cos(k \frac{2l_2\pi}{r}) \right| &\leq \left| \sum_{j=m}^{\mu} \sum_{k=n}^N c_{j,k} \sin(jx) \cos(k \frac{2l_2\pi}{r}) \right| \\ &+ \left| \sum_{j=\mu+1}^M \sum_{k=n}^N \sin(jx) \cos(k \frac{2l_2\pi}{r}) \right|. \end{aligned}$$

Następnie, korzystając z Przypadku (a°) i (b°) otrzymujemy, że nierówność (3.53) jest spełniona.

Niech $y = \frac{2l_2\pi}{r}$, $x \in (\frac{(2l_1+1)\pi}{r}, \frac{2(l_1+1)\pi}{r})$, gdzie $l_1 \in \{0, 1, \dots, [\frac{r}{2}] - 1\}$, $l_2 \in \{0, 1, \dots, [\frac{r}{2}]\}$, gdy r jest liczbą parzystą oraz $l_1 \in \{0, 1, \dots, [\frac{r}{2}] - 1\}$, $l_2 \in \{0, 1, \dots, [\frac{r}{2}]\}$, gdy $r \geq 3$ jest liczbą nieparzystą. Niech $\mu = \left\lceil \frac{1}{\frac{2(l_1+1)\pi}{r} - x} \right\rceil^p$. Mamy do rozważenia następujące przypadki:

Przypadek ($a^{\circ\circ}$): $\eta < m \leq M \leq \mu$. Korzystając z (3.67) zamiast (3.56) oraz (3.54) i Lematu 5 uzyskujemy analogicznie jak dla Przypadku (a°), że

$$\left| \sum_{j=m}^M \sum_{k=n}^N c_{j,k} \sin(jx) \cos(k \frac{2l_2\pi}{r}) \right| \ll \varepsilon.$$

Przypadek ($b^{\circ\circ}$): $\max\{\mu, \eta\} < m \leq M$. Wykorzystując Lemat 11, (3.54) oraz definicję klasy $DGM(p, {}_2\alpha, {}_2\beta, {}_2\gamma, r)$ dostajemy w analogiczny sposób jak w (3.39), że

$$\left| \sum_{j=m}^M \sum_{k=n}^N c_{j,k} \sin(jx) \cos(k \frac{2l_2\pi}{r}) \right| \leq \sum_{k=n}^N \left| \sum_{j=m}^M c_{j,k} \sin(jx) \right| < \frac{C\pi\varepsilon\lambda}{r} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{2^{\frac{s}{p}}} + \pi\varepsilon \ll \varepsilon.$$

Przypadek ($c^{\circ\circ}$): $\eta < m \leq \mu < M$. Analogicznie jak w Przypadku (c°) rozbijając sumę na dwa składniki otrzymujemy

$$\begin{aligned} \left| \sum_{j=m}^M \sum_{k=n}^N c_{j,k} \sin(jx) \cos(k \frac{2l_2\pi}{r}) \right| &\leq \left| \sum_{j=m}^{\mu} \sum_{k=n}^N c_{j,k} \sin(jx) \cos(k \frac{2l_2\pi}{r}) \right| \\ &+ \left| \sum_{j=\mu+1}^M \sum_{k=n}^N \sin(jx) \cos(k \frac{2l_2\pi}{r}) \right|. \end{aligned}$$

Korzystając z Przypadku ($a^{\circ\circ}$) i ($b^{\circ\circ}$) otrzymujemy, że nierówność (3.53) jest spełniona.

Jeżeli $x = 0$ lub $x = \pi$ to nierówność (3.53) również jest spełniona.

Zatem, niech teraz $x = \frac{2l_1\pi}{r}$, $y \in (\frac{2l_2\pi}{r}, \frac{(2l_2+1)\pi}{r}]$, gdzie $l_1 \in \{1, \dots, [\frac{r}{2}] - 1\}$, $l_2 \in \{0, 1, \dots, [\frac{r}{2}]\}$, gdy $r \geq 4$ jest liczbą parzystą oraz $l_1 \in \{1, \dots, [\frac{r}{2}]\}$, $l_2 \in \{0, 1, \dots, [\frac{r}{2}]\}$, gdy $r \geq 3$ jest liczbą nieparzystą. Niech $\nu = \left\lceil \frac{1}{y - \frac{2l_2\pi}{r}} \right\rceil^p$. Mamy do rozważenia trzy przypadki: Przypadek ($a^{\circ\circ\circ}$): $\eta < n \leq N \leq \nu$, Przypadek ($b^{\circ\circ\circ}$): $\max\{\nu, \eta\} < n \leq N$, Przypadek ($c^{\circ\circ\circ}$): $\eta < n \leq \nu < N$. Korzystając z (3.13) zamiast (3.12) i (3.54) otrzymujemy w analogiczny sposób jak dla Przypadków (a°) - (c°), że nierówność (3.53) jest spełniona.

Ostatecznie, niech $x = \frac{2l_1\pi}{r}$, $y \in (\frac{(2l_2+1)\pi}{r}, \frac{2(l_2+1)\pi}{r})$, gdzie $l_1 \in \{1, \dots, [\frac{r}{2}] - 1\}$, $l_2 \in \{0, 1, \dots, [\frac{r}{2}] - 1\}$, gdy $r \geq 3$. Niech $\nu = \left\lceil \frac{1}{\frac{2(l_2+1)\pi}{r} - y} \right\rceil^p$. Mamy do rozważenia trzy przypadki: Przypadek ($a^{\circ\circ\circ\circ}$): $\eta < n \leq N \leq \nu$, Przypadek ($b^{\circ\circ\circ\circ}$): $\max\{\nu, \eta\} < n \leq N$, Przypadek ($c^{\circ\circ\circ\circ}$): $\eta < n \leq \nu < N$.

Korzystając z (3.15) zamiast (3.14) i (3.54) dostajemy w analogiczny sposób jak dla Przypadków ($a^{\circ\circ}$) - ($c^{\circ\circ}$), że nierówność (3.53) jest prawdziwa.

Wykorzystując wszystkie częściowe oszacowania, otrzymujemy, że nierówność (3.53) jest spełniona, co kończy dowód twierdzenia. $\square$

Analizując dowód Twierdzenia 24 otrzymujemy, że w przypadku $p = 1$ prawdziwe jest następujące twierdzenie:

Twierdzenie 25. *Niech ciąg $\{c_{j,k}\}_{j,k=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ należy do klasy $DGM(1, {}_2\alpha, {}_2\beta, {}_2\gamma, r)$, gdzie $r \in \mathbb{N}$. Załóżmy, że dla $r \in \mathbb{N}$ spełnione są warunki (3.45), (3.46), (3.51). Jeżeli zachodzi warunek (3.8), to szereg (3.47) jest zbieżny jednostajnie regularnie względem (x, y) .*

Jeżeli dodatkowo założymy, że $r = 2$ lub $r = 1$, to warunki (3.45), (3.46), (3.51) będziemy mogli zastąpić odpowiednio przez warunki (3.48), (3.49), (3.50) w przypadku $r = 2$ i warunki (3.48), (3.49) w przypadku $r = 1$. W konsekwencji z Twierdzenia 25 otrzymamy odpowiednio Twierdzenie 23 i Twierdzenie 22. Stąd dostaniemy również wszystkie wcześniejsze wyniki dotyczące tej problematyki cytowane w rozprawie.

Sformułowane zostanie teraz twierdzenie podające warunek konieczny jednostajnej zbieżności szeregu (3.47), gdy współczynniki tego szeregu należą do klasy $DGM(p, {}_2\alpha, {}_2\beta, {}_2\gamma, r)$.

Twierdzenie 26. *Niech $\{c_{j,k}\}_{j,k=1}^{\infty}$ będzie ciągiem o wyrazach nieujemnych należącym do klasy $DGM(p, {}_2\alpha, {}_2\beta, {}_2\gamma, r)$, gdzie $r \in \mathbb{N}$ oraz $p \geq 1$. Jeśli szereg (3.47) jest zbieżny jednostajnie regularnie względem (x, y) , to*

$$(mn)^{\frac{1}{p}} c_{m,n} \rightarrow 0, \quad (3.80)$$

gdzie $m + n \rightarrow \infty$.

Dowód. Niech $\{c_{j,k}\}_{j,k=1}^{\infty}$ będzie ciągiem o wyrazach nieujemnych oraz niech $\varepsilon > 0$. Wykorzystując założenie, że szereg (3.47) jest zbieżny jednostajnie regularnie względem (x, y) otrzymujemy, iż istnieje liczba naturalna $m_0 = m_0(\varepsilon)$ taka, że nierówność

$$\left| \sum_{j=m}^M \sum_{k=n}^N c_{j,k} \sin(jx) \cos(ky) \right| < \varepsilon \quad (\text{gdzie } 1 \leq m \leq M \text{ i } 1 \leq n \leq N) \quad (3.81)$$

jest spełniona dla dowolnego $m, n, M, N \in \mathbb{N}$, gdy $m + n > m_0$ oraz dowolnego $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Niech

$$\begin{aligned} x_1(m) &= \frac{\pi}{4(m+r)}, \\ x_2(m) &= \frac{\pi}{4\lambda b_1(m)}, \\ x_3(m) &= \frac{\pi}{4m}. \end{aligned}$$

Wtedy

$$\begin{aligned} \sin(jx_1(m)) &\geq \sin\left(\frac{\pi}{4}\right), \quad \text{dla } m+r \leq j \leq 2m+r-1, \\ \sin(jx_2(m)) &\geq \sin\left(\frac{\pi}{4\lambda}\right), \quad \text{dla } b_1(m) \leq j \leq 2\lambda b_1(m), \\ \sin(jx_3(m)) &\geq \sin\left(\frac{\pi}{4}\right), \quad \text{dla } m \leq j \leq 2m. \end{aligned}$$

Ponieważ ciągi $\{b_1(l)\}_{l=1}^{\infty}$, $\{b_2(l)\}_{l=1}^{\infty}$, $\{b_3(l)\}_{l=1}^{\infty}$ dążą do nieskończoności, to istnieje liczba naturalna m_1 , taka, że dla dowolnych m, n spełniających nierówność $m + n > m_1$ prawdziwe

są również nierówności $m + n > m_0$, $b_1(m) + n > m_0$, $m + b_2(n) > m_0$ i $b_3(m + n) > m_0$. Przyjmując $y = 0$ i wykorzystując powyższe nierówności, Lemat 8 oraz (3.81) mamy

$$\begin{aligned}
 4\varepsilon &> \sup_{M+N \geq b_3(m+n)} \sum_{j=M}^{2M} \sum_{k=N}^{2N} c_{j,k} \sin(jx_3(M)) + \sum_{j=b_1(m)}^{2\lambda b_1(m)} \sum_{k=n+1}^{2n+r-1} c_{j,k} \sin(jx_2(m)) \\
 &+ \sum_{j=m+r}^{2m+r-1} \sum_{k=n+r}^{2n+r-1} c_{j,k} \sin(jx_1(m)) + \sum_{k=b_2(n)}^{2\lambda b_2(n)} \sum_{j=m+1}^{2m+r-1} c_{j,k} \sin(jx_1(m)) \\
 &\geq \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \sup_{M+N \geq b_3(m+n)} \sum_{j=M}^{2M} \sum_{k=N}^{2N} c_{j,k} + \sin\left(\frac{\pi}{4\lambda}\right) \sum_{j=b_1(m)}^{2\lambda b_1(m)} \sum_{k=n+1}^{2n+r-1} c_{j,k} \\
 &+ \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \sum_{j=m+r}^{2m+r-1} \sum_{k=n+r}^{2n+r-1} c_{j,k} + \sin\left(\frac{\pi}{4\lambda}\right) \sum_{k=b_2(n)}^{2\lambda b_2(n)} \sum_{j=m+1}^{2m+r-1} c_{j,k} \\
 &\gg \sin\left(\frac{\pi}{4\lambda}\right) (mn)^{\frac{1}{p}} c_{m,n}, \text{ gdy } m+n > m_1 \text{ oraz } m, n \geq \max\{\lambda, 2r\}.
 \end{aligned}$$

Jeśli $j \rightarrow \infty$ oraz $k < \max\{\lambda, 2r\}$ lub $j < \max\{\lambda, 2r\}$ oraz $k \rightarrow \infty$, wtedy warunek (3.19) wynika z jednostajnej zbieżności szeregów pojedynczych (3.52). To kończy dowód. $\square$

Przyjmując w Twierdzeniu 26, że $p = 1$ i $r = 2$ otrzymujemy wynik uzyskany przez K. Duzinkiewicza w pracy [4] oraz wszystkie wcześniejsze rezultaty podające warunek konieczny zbieżności podwójnych szeregów mieszanych.

Bibliografia

- [1] T. W. Chaundy i A. E. Jolliffe, The uniform convergence of a certain class of trigonometrical series, *Proc. London Math. Soc.*, 15 (1916), 214–216.
- [2] Ó. Domínguez, S. Tikhonov, Function spaces of logarithmic smoothness: embeddings and characterizations, <https://arxiv.org/abs/1811.06399> (2018).
- [3] K. Duzinkiewicz, B. Szal, On the uniform convergence of double sine series, *Colloq. Math.*, 151 (1) (2018), 71–95.
- [4] K. Duzinkiewicz, On the uniform convergence of sine, cosine and double sine-cosine series, *Discuss. Math., Differ. Incl., Control Optim.*, 36 (2016), 87–116.
- [5] M. Dyachenko, S. Tikhonov, Convergence of trigonometric series with general monotone coefficients, *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I* 345 (2007), 123–126.
- [6] M. Dyachenko, S. Tikhonov, General monotone sequences and convergence of trigonometric series. *Topics in Classical Analysis and Applications in Honor of Daniel Waterman*. World Scientific (L.De Carli et al., eds.). Hackensack, NJ, (2008), 88–101.
- [7] M. Dyachenko, S. Tikhonov, Integrability and continuity of functions represented by trigonometric series: coefficients criteria, *Studia Math.* 193 (2009), 285–306.
- [8] J. W. Garrett, C. S. Rees i Č. V. Stanojević, On L^1 convergence of Fourier series with quasi-monotone coefficients, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 72 (3) (1978), 535–538.
- [9] G. H. Hardy, J. E. Littlewood, G. Pólya, *Inequalities*, University Press, Cambridge, (1934).
- [10] P. Kórus, Remarks on the uniform and L^1 -convergence of trigonometric series, *Acta Math. Hungar.*, 128 (2010), 369–380.
- [11] P. Kórus, F. Móricz, On the uniform convergence of double sine series, *Studia Math.*, 193 (2009), 79–97.
- [12] P. Kórus, On the uniform convergence of double sine series with generalized monotone coefficients, *Period. Math. Hungar.*, 63 (2011), 205–214.
- [13] P. Kórus, Uniform convergence of double trigonometric series, *Math. Bohem.*, 138 (2013), No. 3, 225–243.
- [14] M. Kubiak, B. Szal, A necessary condition for uniform convergence of double sine series with p -bounded variation coefficients, *Colloq. Math.* 166 (2) (2021) 291–312.

- [15] M. Kubiak, B. Szal, A sufficient condition for uniform convergence of double sine series with p -bounded variation coefficients, praca wysłana do publikacji, <https://arxiv.org/abs/2305.09040>.
- [16] M. Kubiak, B. Szal, A sufficient condition for uniform convergence of trigonometric series with p -bounded variation coefficients, praca wysłana do publikacji, <https://arxiv.org/abs/2305.09039>.
- [17] M. Kubiak, B. Szal, Uniform convergence of trigonometric series with p -bounded variation coefficients, Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin, 27(1) (2020), 89-110.
- [18] R. Le, S. Zhou, A new condition for the uniform convergence of certain trigonometric series. Acta Math. Hung., 108 (2005), 161–169.
- [19] L. Leindler, A new class of numerical sequences and its applications to sine and cosine series, Anal. Math., 28 (2002), 279–286.
- [20] L. Leindler, A new extension of monotone sequence and its application, J. Inequal. Pure and Appl. Math., 7(1) (2006), Art. 39, 7 pp.
- [21] L. Leindler, A note on the uniform convergence and boundedness of a new class of sine series, Anal. Math., 31 (2005), 269–275.
- [22] L. Leindler, A theorem on Besov-Nikol'skii class, Publ. Math. Debrecen, 64 (1-2) (2004), 237-248.
- [23] L. Leindler, Embedding relations of Besov classes, Acta Sci. Math. (Szeged), 73 (2007), 133-149.
- [24] L. Leindler, Generalization of embedding relations of Besov classes, Anal. Math., 31(2005), 1-12.
- [25] L. Leindler, Integrability conditions pertaining to Orlicz space, J. Inequal. Pure Appl. Math, 8(2), Article 38 (2007).
- [26] L. Leindler, Necessary and sufficient conditions for uniform convergence and boundedness of a general class of sine series, Austral. J. Math. Anal. Appl., 4 (1) (2007), 1-4.
- [27] L. Leindler, On the Uniform Convergence and Boundedness of a Certain Class of Sine Series, Anal. Math., 27 (2001), 279–285
- [28] L. Leindler, On the uniform convergence of single and double sine series, Acta Math. Hungar., 140 (2013), 232–242.
- [29] E. Liflyand, S. Tikhonov, A concept of general monotonicity and applications, Math. Nachr., 284(8-9) (2011), 1083-1098.
- [30] E. Liflyand, S. Tikhonov, The Fourier transforms of general monotone functions, Analysis and Mathematical Physics, Trends in Mathematics (Birkhäuser, 2009), pp. 373-391.
- [31] W. Lenski, B. Szal, Applications of general monotone sequences to strong approximation by Fourier series, Indag. Math., 24 (1) (2014), 122–130.

- [32] W. Łenski , U. Singh , B. Szal, Trigonometric approximation of functions in seminormed spaces, *Math. Inequal. App.*, 24 (1) (2021), 89–101.
- [33] J. R. Nurcombe, On the uniform convergence of sine series with quasimonotone coefficients, *J. Math. Anal. Appl.*, 166 (20) (1992), 577–581.
- [34] U. S. Pugachev, I. N. Sinitsy, Lectures on functional analysis and applications, Word Scientific Publ. (1999).
- [35] B. Szal, Application of the classes *IMRBVS* to embedding relations of Besov classes, *Acta Math. Hungar.*, 124 (1-2) (2009), 25–39.
- [36] B. Szal, Application of the *MRBVS* classes to embedding relations of the Besov classes, *Demonstratio Math.*, 42 2(2009), 303–322.
- [37] B. Szal, A new class of numerical sequences and its applications to uniform convergence of sine series, *Math. Nachr.*, 284(14-15) (2011), 1985–2002.
- [38] B. Szal, A note on the uniform convergence and boundedness of a generalized class of sine series, *Comment. Math.*, 48 1 (2008), 85–94.
- [39] B. Szal, A note on the *MRBSVS* class and its application to the uniform convergence and boundedness of sine series, *Comment. Math.*, 49 1(2009), 67–79.
- [40] B. Szal, Generalization of a theorem on Besov-Nikol'skiĭ class, *Acta Math. Hungar.*, 125 (1-2)(2009), 161–181.
- [41] B. Szal, On L -convergence of trigonometric series, *J. Math. Anal. Appl.*, 373 (2011), 449–463.
- [42] B. Szal, On the uniform convergence of weighted trigonometric series, *Banach Center Publ.*, 92 (2011), 35–46.
- [43] S. Tikhonov, On uniform convergence of trigonometric series. *Mat. Zametki*, 81(2) (2007), 304–310, translation in *Math. Notes*, 81(2)
- [44] S. Tikhonov, Best approximation and moduli of smoothness: Computation and equivalence theorems, *J. Approx. Theory*, 153 (2008), 19–39.
- [45] S. Tikhonov, Trigonometric series with general monotone coefficients, *J. Math. Anal. Appl.*, 326(1) (2007), 721–735.
- [46] S. Tikhonov, On the integrability of trigonometric series, *Math. Notes*, 78(3) (2005), 437–442.
- [47] Z. Tomovski, Convergence and integrability for some classes of trigonometric series, *Dissertationes Math.*, 420 (2003), 1–65.
- [48] I. E. Žak, A. A. Šneider, Conditions for uniform convergence of double sine series. *Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii. Matematika*, (4) (1966), 44–52.
- [49] S. P. Zhou, D. S. Yu, A generalization of monotonicity and applications, *Acta Math. Hungar.*, 115 (3) (2007), 247–267.

- [50] S. P. Zhou, P. Zhou i D. S. Yu, On L_1 -convergence of Fourier series under $MVBV$ condition, Canadian Math. Bull., 52 (4) (2009), 627-636.
- [51] S. P. Zhou, P. Zhou i D. S. Yu, On L^p integrability and convergence of trigonometric series, Studia Math., 182 (3) (2007), 215-226.
- [52] S. P. Zhou, R. J. Le i D. S. Yu, Remarks on convergence of trigonometric series with special varying coefficients, J. Math. Anal. Appl., 333 (2) (2007), 1128-1137.
- [53] S. P. Zhou, P. Zhou i D. S. Yu, Ultimate generalization to monotonicity for uniform convergence of trigonometric series, Sci. China Math., 53(7) (2010), 1853–1862.
- [54] A. Zygmund, Trigonometric series, Vol. I, University Press, Cambridge, 1959.