Agnieszka Jardin

Praca doktorska

Badanie zachowań chaotycznych plazmy wytwarzanej przez silnik Halla

PROMOTOR

dr hab. Piotr Lubiński, prof. UZ

Uniwersytet Zielonogórski
Wydział Fizyki i Astronomii

Zielona Góra, 2022

Bóg gra w kości ze Wszechświatem. Ale kości są fałszywe. I główne zadanie fizyki polega obecnie na odkryciu, jak zostały sfałszowane i jak możemy ich użyć do naszych celów.

Joseph Ford, 1993

Od Autora

Ze względu na to, że niniejsza rozprawa została napisana w formie bezosobowej, czytelnik nie jest w stanie ocenić rzeczywistego wkładu własnego autora. To skłoniło mnie do umieszczenia poniższego tekstu.

Po pierwsze, będąc pracownikiem Instytutu Fizyki Plazmy i Laserowej Mikrosyntezy, brałam czynny udział w projektach silników Halla, których dotyczy sporządzona analiza. Oba akceleratory zostały zbudowane dzięki programowi finansowanemu przez Europejską Agencję Kosmiczną (ESA), przy czym HIKHET (ang. *High Impuslse Krypton Hall Effect Thruster*) został rozwinięty na sukcesie poprzedniego projektu KLIMT (ang. *Krypton Large IMpulse Thruster*), który zademonstrował nam możliwość użycia kryptonu jako gazu roboczego alternatywnego dla znacznie droższego ksenonu. Badania głównie odbywały się w Laboratorium Plazmowych Napędów Satelitarych (PlaNS) leżącym na terenie Instytutu, ale jeden z prototypów był również testowany z moim udziałem w Holandii w laboratoarium ESTEC (*European Space Research and Technology Centre*) należącym do ESA.

Po drugie, sondy elektryczne typu Faraday'a, które zostały wykorzystane w rozprawie doktorskiej zostały przeze mnie specjalnie zaprojektowane na tą okazję, a następnie przetestowane i odpowiednio skalibrowane. Przy ich pomocy mogłam dokonać analizy wydajności silnika, która wraz ze zmierzoną siłą ciągu stanowiły podstawy do stwierdzenia w jakich warunkach silnik pracował najsprawniej. Metodyka badań tj. badanie zmienności prądowych wraz z rosnącym napięciem wyładowania, jak i wybór topografii pola magnetycznego poprzez dobranie stosunku prądów płynących przez cewki, czy wybór pozostałych parametrów operacyjnych silnika również zostały przeze mnie odpowiednio zaplanowane i dostosowane do potrzeb tej rozprawy doktorskiej.

Cała zawarta w tej pracy analiza wydajności silnika została przeze mnie wykonana samodzielnie. Ponadto, przygotowując oprogramowanie służące do poszukiwań zachowań chaotycznych, przetestowałam je dla kilku znanych układów, a w tym dla szumu, sygnału periodycznego, sygnału quasi-periodycznego, układu Lorenza i wzbudzanego układu Lotki-Volterry. Do tworzenia kodów numerycznych oraz skryptów służących ilustrowaniu wyników wykorzystałam programy *Matlab* oraz *R-project*. Zatem wszystkie znajdujące się w rozprawie wykresy, diagramy itp. dotyczące nie tylko danych pomiarowych, ale również wymienionych wyżej układów referencyjnych są moim indywidualnym wkładem w niniejszą pracę doktorską.

Agnieszka Jardin

Wstęp

Cel i zakres pracy doktorskiej

Niniejsza rozprawa doktorska dotyczy badań strumienia plazmy emitowanej przez silnik Halla, a w szczególności wiązki jonowej generującej ciąg w tego rodzaju silniku, jak również badań dynamiki zmienności prądu wyładowania. Głównym jej celem było poszukiwanie chaosu w zebranych przebiegach prądowych i identyfikacja zakresów warunków pracy silnika, w których chaos znacząco wpływa na jego działanie. Miało to doprowadzić do dostarczenia nowej wiarygodnej metody badawczej służącej do analizy wydajności w tego rodzaju silniku.

Rozprawa doktorska obejmuje szczegółową analizę szeregów czasowych uzyskanych w rezultacie pomiarów prądu wyładowania i prądu jonowego. Warto podkreślić, że jej nowatorstwo polega na poszukiwaniu chaosu w danych eksperymentalnych, a nie w modelach numerycznych symulujących dynamikę oscylacji prądowych, czego podjęły się już wcześniej grupy kierowane przez Marini [161] czy Mandala [158].

Obecnie silniki elektryczne są powszechnie stosowanymi napędami służącymi między innymi do kontroli orbit satelitów czy transportu aparatury badawczej w przestrzeni kosmicznej. Jeden z najpopularniejszych wariantów, silnik Halla (HET, ang. *Hall Effect Thruster*), dzięki wysokiemu impulsowi właściwemu, kompaktowej budowie, niewielkim rozmiarom i niskiemu zużyciu paliwa znalazł szerokie zastosowanie zarówno podczas podtrzymywania satelitów na odpowiednich orbitach jak i w misjach dalekiego zasięgu [66].

Jonowe silniki stanowiące obiekty badań tej pracy są zbudowane z katody, anody, dystrybutora gazu oraz z wewnętrznyego izolatora, który tworzy pierścieniowy kanał wyładowania, gdzie gaz obojętny jest jonizowany w wyniku zderzeń z elektronami. Kolejnym elementem budowy silnika jest obwód magnetyczny służący do generowania pola magnetycznego o topografii, która jest sterowana przez dwie koncentryczne cewki magnetyczne: wewnętrzną (zwaną *inn*) i zewnętrzną (*out*) [220]. Wiązka jonowa jest przyspieszana z wnętrza kanału wyładowania przy pomocy pola elektrycznego powstałego dzięki przyłożeniu napięcia między katodą i anodą, wytwarzając siłę ciągu silnika.

Łatwo obserwowalny przy pomocy oscyloskopu, fluktuacyjny charakter prądu wyładowania silnika Halla zmienia się w zależności od użytych parametrów operacyjnych, takich jak napięcie wyładowania, natężenie pola magnetycznego czy przepływ masowy paliwa [255]. Te powszechnie obserwowane oscylacje są różnego typu – mają zmienną amplitudę i częstotliwości w zależności od doboru parametrów. Naturalnie, pojawianie się wysokoamplitudowych oscylacji prądowych może być szkodliwe dla działania samych silników jak i ich jednostek zasilających.

Zmienne zachowanie sygnałów prądowych mierzonych w eksperymentach, szerokopasmowy charakter widm mocy oraz nieliniowe relacje obecne w modelach teoretycznych wydają się wskazywać, że wspomniane powyżej oscylacje mogą przejawiać zachowania chaotyczne. Ponieważ występowanie takich zachowań może być niekorzystne, celem niniejszej pracy było sprawdzenie czy niskowymiarowy chaos deterministyczny może być wyjaśnieniem fluktuacji plazmowych obserwowanych w przebiegach prądowych silnika Halla, a następnie powiązanie go z wydajnością silnika.

Pomiary gęstości prądu jonowego w wiązce plazmowej elektrycznych napędów satelitarnych mają ogromne znaczenie, ponieważ strumień wyrzucanych jonów determinuje właściwości silnika, takie jak poziom siły ciągu, impuls właściwy czy wykorzystanie paliwa [166]. Prędkości i rozkłady kątowe jonów pochodzących z wiązki plazmowej oraz gęstość prądu jonowego można mierzyć w laboratorium za pomocą odpowiednich sond elektrycznych, które zasadniczo składają się z elektrody przewodzącej, zwanej kolektorem, spolaryzowanej odpowiednio dostosowanym ujemnym napięciem w stosunku do lokalnego potencjału plazmy w celu odepchnięcia niepożądanych elektronów [93, 115]. Istnieją różne konfiguracje takich sond – od prostego metalowego dysku po architektury z kolimatorami, pierścieniami ochronnymi czy filtrami [166].

Sonda płaska z pierścieniem ochronnym, często nazywana sondą Faraday'a (*FP*, ang. *Faraday Probe*), oraz kubek Faraday'a (*FC*, ang. *Faraday Cup*), jeśli są poprawnie zaprojektowane i pracują przy odpowiednim napięciu polaryzacji, pozostają niewrażliwe na istnienie warstwy elektrostatycznej, która się tworzy wokół obiektu wprowadzonego w środowisko plazmowe i potrafi znacznie zaburzyć wyniki pomiaru. Dlatego też te dwa instrumenty są szczególnie zalecane do pomiarów gęstości prądu jonowego [166].

Realizacja jednego z głównych celów postawionych w ramach tej dysertacji, tj. eksperymentalne zbadanie dynamiki strumienia jonów generowanych przez silnik Halla, wymagała zbudowania układu diagnostycznego do rejestracji odpowiednich szeregów czasowych. Do rejestracji prądu jonowego wykorzystane zostały wspomniane wyżej sondy elektryczne typu Faraday'a zaprojektowane i wykonane w ramach rozprawy doktorskiej.

Parametry wiązki plazmowej wyznaczone za pomocą pomiarów sondami zostały wykorzystane do ilościowego określenia mechanizmów strat wydajności silnika i określenia efektywności wykorzystania paliwa [34]. Mianowicie w celu oceny i porównania całkowitego prądu jonowego oraz rozbieżności wiązki jonowej w różnych warunkach pracy silnika odtworzone zostały profile tej wiązki. Odbywało się to poprzez zbieranie uśrednionych w czasie sygnałów zmierzonych przez oba typy sond podczas obrotu ramienia diagnostycznego. Powyższa metoda oraz bezpośrednie pomiary siły ciągu pozwoliły na określenie wydajności silnika w funkcji napięcia wyładowania. Zależność prądu jonowego od czasu, potrzebna do przeprowadzenia analizy pod względem zachowania chaotycznego, była natomiast mierzona wzdłuż osi silnika, gdy dana sonda pozostawała nieruchoma.

Ponieważ stwierdzono, że różne układy wykazują podobne przejścia do chaosu poprzez zmianę parametru kontrolnego [202], wybrano parametr kontrolny w postaci napięcia wyładowania i przebadano dynamikę prądu wyładowania oraz prądu jonowego w szerokim zakresie tego napięcia. W trakcie pomiarów natężenie przepływu gazu roboczego było utrzymywane na stałym poziomie, natomiast wykonano osobne serie pomiarowe dla kilku różnych wartości prądu zasilającego cewki magnetyczne.

Chociaż eksperymenty przeprowadzono dla dwóch prototypów silnika Hallla, analizę pod względem zachowań chaotycznych przedstawiono tylko dla silnika KLIMT, ponieważ w przypadku silnika HIKHET część pomiarów mogła zostać zaburzona przez rozszczelnienie dystrybutora gazu. Szczegółowej analizie poddano przede wszystkim dane zebrane dla stosunku prądów cewek I_{inn}/I_{out} równego 7.0 A do 4.0 A, które były reprezentatywne dla pozostaych pomiarów. Na początku przetestowano stacjonarność zmienności badanych przebiegów prądowych wyznaczając momenty ich rozkładu dla różnych przedziałów czasu. Dokonano także redukcji poziomu szumu za pomocą dedykowanej metody uwzględniającej szerokopasmowość sygnału, dzięki czemu możliwe było zastosowanie do oczyszczonych danych kilku wymagających tego technik badania chaosu.

Pierwsza część badań nad zachowaniami chaotycznymi obejmowała analizę diagramów bifurkacyjnych, gdzie parametrem kontrolnym było napięcie wyładowania, charakterystykę widm mocy oraz diagnozę zachowań intermitentnych. W analizie bifurkacji, poza standardowymi diagramami, przedstawiono również tzw. diagramy gęstościowe. Widma mocy zebranych przebiegów prądowych zbadano pod względem dyskretnych składowych, odpowiadających głównym trybom pracy silnika. Zjawisko intermitencji, polegające na przełączaniu się układu pomiędzy dwoma odmiennymi trybami, przeanalizowano na trzy sposoby, badając rozkłady kilku parametrów dla tych trybów, nachylenie widm mocy w zakresie wysokich częstotliwości i rozkłady czasów trwania dominującego trybu.

Oczyszczone dane poddano analizie dwoma metodami, opartymi na funkcji autokorelacji i informacji wzajemnej, wyznaczając dzięki temu opóźnienia czasowe charakterystyczne dla badanego sygnału. Pozwoliło to na zastosowanie metody Takensa, dzięki której uzyskano rekonstrukcję atraktora w przestrzeni fazowej. Ponieważ istnienie atraktora o niecałkowitym wymiarze jest jednym z głównych wskaźników istnienia chaosu w układzie, następnie wyznaczono jego wymiar fraktalny w postaci tzw. wymiaru korelacyjnego.

Rekonstrukcja atraktora pozwoliła na użycie kolejnej metody badania chaosu, tzw. przekrojów Poincare'go, określających stopień skupienia trajektorii fazowych. Zastosowano także podstawowe narzędzie diagnozy zachowań chaotycznych, jakim jest wyznaczanie wykładników Lapunowa, w szczególności największego z tych wykładników, dla którego zbadano zależność od parametru kontrolnego, czyli napięcia wyładowania. Kolejną metodą zastosowaną w badaniu zmienności przebiegów prądowych silnika Halla była analiza wykresów rekurencyjnych, która, poza interpretacją wizualną, pozwala na wyznaczenie wielu parametrów badanego sygnału. Ostatnią metodą opisaną w niniejszej rozprawie był tzw. symetryzowany wzór kropkowy, którego wyniki także można analizować i wizualnie, i ilościowo.

Niniejsza rozprawa doktorska składa się z pięciu rozdziałów. Pierwszy zawiera ogólne informacje dotyczące silników i sond elektrycznych. Drugi opisuje użyte metody badawcze, a zwłaszcza wskaźniki chaosu, dzięki którym można charakteryzować badane układy. W rozdziale trzecim opisano konkretne modele silników, których dotyczy sporządzona analiza, jak również dokonano opisu użytych sond elektrycznych oraz podano metodykę porowadzenia eksperymentów. Na końcu tego rozdziału zaprezentowane zostały osiągi testowanych silników, które posłużyły do oceny w jaki sposób przejście silnika w stan chaotyczny wpływa na jego wydajność. Rozdział czwarty stanowi serce rozprawy doktorskiej – tutaj znajduje się cała sporządzona analiza danych pomiarowych prądu jonowego i prądu wyładownia oparta na wskaźnikach z rozdziału drugiego oraz wnioski dotyczące możliwości pojawienia się zachowań chaotycznych. W ostatnim piątym rozdziale umieszczone zostało podsumowanie oraz nakreślono perspektywy dalszego rozwoju naukowego.

Wykaz publikacji

Agnieszka Jardin (wcześniej Szelecka) jest samodzielną autorką jednego artykułu naukowego oraz współautorką siedmiu innych, z których w czterech jest pierwszym autorem. Ponieważ dwa spośród nich ([16] i [222]) nie są bezpośrednio związane z rozprawą doktorską, gdyż dotyczą silników impulsowych, nie zostały poniżej omówione.

Jedyny samodzielny artykuł *Advanced laboratory for testing plasma thrusters and Hall thruster measurement campaign* (Nukleonika, 2016) [219] dotyczył opisu laboratorium PlaNS pod względem możliwości prowadzenia w nim badań testowych.

Dwa kolejne artykuły opisywały testy przeprowadzane na silnikach Halla przez Grupę Akceleratorów Plazmowych. Są to *Performance tests of IPPLM's krypton Hall thruster* (Laser and Practicle Beams, 2018) [144] oraz artykuł konferencyjny *Preliminary Tests of HIKHET Laboratory Model at IFPiLM* (36th International Electric Propulsion Conference, 2019) [145].

Pierwsze wyniki bezpośrednio dotyczące niniejszej rozprawy doktorskiej zostały umieszczone w publikacji *Study of plasma dynamics in the HET relying on global thruster characteristics parameterized with discharge voltage* (The European Physical Journal Plus, 2021) [220]. W artykule tym został przedstawiony opis sond elektrycznych użytych w rozprawie doktorskiej oraz wyniki przeprowadzonej analizy wydajności silnika w funkcji napięcia wyładowania.

Kolejne wyniki wstępne do tej dysertacji zostały umieszczone w publikacji *Searching for Chaotic Behavior in the Ion Current Waveforms of a Hall Effect Thruster* (Journal of Fusion Energy, 2022) [123]. Struktury zaobserwowane na diagramie bifurkacyjnym i na wykresach rekurencyjnych prądu jonowego wskazywały na obecność zachowania chaotycznego, chociaż mocne ilościowe dowody potwierdzające hipotezę deterministycznego chaosu nie zostały dostarczone. Dlatego w niniejszej rozprawie doktorskiej kontynuowano te badania z danymi po odpowiedniej redukcji szumu, uwzględniając również prąd wyładowania oraz stosując jeszcze inne metody analizy nieliniowych szeregów czasowych.

Podziękowania

Chciałabym podziękować prof. Krysztofowi Przesławskiemu za wzniecenie zainteresowania układami chaotycznymi poprzez bardzo ciekawe i inspirujące przedstawienie mechaniki powstawania struktur fraktalnych na jednym z wykładów na Wydziale Matematyki, Informatyki i Ekonometrii Uniwersytetu Zielonogórskiego (UZ), od którego tak na prawdę zaczęła się cała moja przygoda z chaosem.

Ponownie podziękowania kieruję do prof. Van Cao Longa oraz prof. Wiesława Leońskiego z Wydziału Fizyki i Astronomii UZ za rozwinięcie i poszerzenie tego ekscytujacego mnie tematu oraz wszelką pomoc w przygotowaniu pracy magisterskiej pt. *Zasada korespondencji w przypadku układów chaotycznych*, która dotyczyła dociekań czy dany system klasyczny lub kwantowy przejawia zachowanie chaotyczne i czy przejawiają je obydwa odpowiadające sobie układy.

Nieodparta chęć poszukiwań chaosu w zjawiskach z codziennego życia oraz wola zrozumienia i próby nadania im pewnych stałych wartości przetrwała u mnie przez lata. Obecna praca nad silnikami plazmowymi pozwoliła mi wykryć przesłanki mogące świadczyć o chaotycznej naturze układu podczas okoliczności analizy zachowań prądu wyładowania. W związku z tym ogromne podziękowania kieruję do mojego promotora, prof. Piotra Lubińskiego z Wydziału Fizyki i Astronomii UZ, za zgodę na dalsze rozwijanie frapującego mnie tematu oraz nieodzowną pomoc, jak i cierpliwość dotyczącą opóźnienia przesłania manuskryptu związanego z przedłużaniem się terminów planowanych eksperymentów.

Szczególne podziękowania należą się dr. Jackowi Kurzynie będącemu kierownikiem Laboratorium Plazmowych Napędów Satelitarnych (PlaNS) znajdującego się w Instytucie Fizyki Plazmy i Laserowej Mikrosynetzy (IFPiLM) w Warszawie. Po pierwsze za możliwość wygospodarowania czasu niezbędnego na przeprowadzenie obserwacji zachowań plazmy pod kątem chaosu, ale przede wszystkim za liczne uwagi merytoryczne.

Serdeczne podziękowania należą się też pozostałym członkom zespołu PlaNS, a w szczególności Maciejowi Jakubczakowi i Arsenijowi Riazantsev za koleżeńskie poparcie i pomoc w żmudnym, wielogodzinnym zbieraniu danych.

Chciałabym również podziękować mojemu kochanemu mężowi Axelowi za pomoc w utrzymywaniu motywacji do prowadzenia badań nad chaosem, wiarę w sukces ukończenia tej rozprawy oraz podtrzymywanie na duchu w najgorszych momentach.

Agnieszka Jardin

Nomenklatura

Oznaczena

A_{Cu} - współczynnik temperaturowy miedzi,
A_c - stała materiałowa katody wnękowej,
A_{tol} - współczynnik przy doborze rozmiaru atraktora,
B - indukcja magnetyczna,
B_r - wartość pola magnetycznego,
$B_{r,max}$ - wartość maksymalnego pola magnetycznego w pobliżu płaszczyzny wylotowej silnika,
$C(R)$ - całka korelacyjna,
c_s - prędkość akustyczna jonów,
$C(\tau)$ - funkcja autokorelacji,
d - wymiar przestrzeni fazowej,
D_A - wymiar atraktora,
D_G - wymiar korelacyjny,
DET - determinizm,
DIV - dywergencja trajektorii przestrzeni fazowej,
e - elementarny ładunek elektryczny,
E - natężenie pola elektrycznego,
E_c - natężenie pola elektrycznego na powierzchi katody,
E_j - energia jonu,
E_z - natężenie pola elektrycznego w kierunku z,
$ENTR$ - entropia Shannona obliczana na podstawie RP,
$ENTR_{SDP}$ - entropia Shannona obliczana na podstawie SDP,
f_i - częstość oscylatora harmonicznego,
F_L - siła Lorentza,
g - przyspieszenie grawitacyjne,
$H(k)$ - funkcja skokowa Heaviside'a,
h - parametr Halla,
I_{col} - prąd jonowy zebrany przez kolektor,
I_d - prąd wyładowania,
I_{FP} - prąd jonowy zebrany przez sondę FP,
I_{FC} - prąd jonowy zebrany przez sondę FC,
I_{FCold} - prąd jonowy zebrany przez sondę FC$_{old}$,
I_i - prąd jonowy,
$I_{i,+}$ - prąd jonowy pochodzący od czastek naładowanych pojedynczo,
$I_{i,++}$ - prąd jonowy pochodzący od cząstek naładowanych podwójnie,
I_{inn} - prąd cewki wewnętrznej,
I_H - prąd grzałki katody,

I_{out} - prąd cewki zewnętrznej,
I_{sp} - impuls właściwy,
$I(\tau)$ - informacja wzajemna,
j_i - gęstość prądu jonowego,
J - gęstość prądu elektronowego,
J_c - gęstość prądu emisyjnego,
K_2 - dolna granica entropii Kołmogorowa,
k_B – stała Boltzmanna,
$Kurt$ - kurtoza,
l - długość odcinka równoległego do przekątnej $i = j$ na RP,
l_{min} - minimalna długość odcinka równoległego do przekątnej $i = j$ na RP,
L - długość obszaru dryfu, (rozdział 1)
L - średnia długość odcinków równoległych do przekątnej $i = j$ na RP, (rozdział 2 i 4)
$L_{śr}$ - średnia odległość między punktami w przestrzeni fazowej,
LAM - laminarność,
L_{max} - maskymalna długość odcinka równoległego do przekątnej $i = j$ na RP,
$\dot{m}$ - masa paliwa zużytego przez satelitę, wydatek masowy paliwa,
m - liczba powierzchni odbijających w SDP,
M - masa atomowa gazu,
m_0 - całkowita masa napędu rakietowego,
$\dot{m}_a$ - anodowy wydatek masowy,
$\dot{m}_c$ - katodowy wydatek masowy,
m_d - sucha masa napędu rakietowego,
m_e - masa elektronu,
m_i - masa jonu,
$\dot{m}_i$ - jonowy przepływ masowy,
$m_{i,Xe}$ - masa jonu ksenonu,
$m_{i,Kr}$ - masa jonu kryptonu,
n_0 - gęstość cząstek neutralnych,
n_a - gęstość cząstek neutralnych przy anodzie,
n_i - gęstość jonów w plazmie, gęstość wiązki jonów w obszarze wydechowym,
n_e - gęstość elektronów w plazmie,
N_1 - populacja ofiar w modelu Lotki-Volterry,
N_2 - populacja drapieżników w modelu Lotki-Volterry,
P_d - moc wyładowania (moc wymagana do produkcji jonów),
P_{in} - całkowita moc wejściowa,
P_{jet} - moc strumienia wiązki jonów,
$P_{jet,Kr}$ - moc strumienia wiązki jonów kryptonu,
$P_{jet,Xe}$ - moc strumienia wiązki jonów ksenonu,
$P(l)$ - rozkład długości odcinków równoległych do przekątnej $i = j$ na RP,
$P(\nu)$ - rozkład długości odcinków pionowych na RP,
r - współczynnik rozrodczości w równaniu logistycznym; parametr kontrolny,
R - odległość sondy od silnika, (rozdział 1)

R_O - długość promienia hiperkuli,
R_1 - wewnętrzny promień kanału wyładowania,
R_2 - zewnętrzny promień kanału wyładowania,
R_A - promień atraktora,
R_{cewka} - oporność cewki,
r_e - promień cyklotronowy elektronu,
R_{FP} - promień sondy Faraday'a,
$r(i)$ - odległość od początku układu na SDP,
r_i - promień cyklotronowy jonu,
R_{kab} - oporność kabli,
$RP^d_{i,j}$ - element tablicy RP,
RR - stopień rekurencji,
$Skew$ - skośność,
T - siła ciągu,
T_{cewka} - temperatura cewki magnetycznej,
T_e - temperatura elektronów,
T_{lab} - temperatura w laboratorium,
$TREND$ - trend,
TT - czas pułapkowania, średnia długość odcinka pionowego na RP,
T_w - temperatura wkładki,
U_d - napięcie wyładowania (napięcie przyspieszające),
U_H - napięcie grzałki katody,
U_s - napięcie sondy,
$v_{a,0}$ - prędkość gazu wychodzącego z anody,
v_e - prędkość elektronów,
v_E - prędkość elektronów w kierunku pola elektrycznego,
$v_{E\times B}$ - prędkość elektronów w kierunku $E \times B$,
v_i - prędkość jonów,
V_f - potencjał pływający,
v_θ - prędkość rotacji w kierunku obwodowym,
v_{out} - prędkość masy wyrzucanej przez napęd rakietowy,
V_p - potencjał plazmy;

α_1 - maltuzjański współczynnik przyrostu ofiar w modelu Lotki-Volterry,
α_2 - wskaźnik wymierania drapieżników w modelu Lotki-Volterry,
α_K - nachylenie rozkładu długości odcinków ukośnych równoległych do przekatnej $i = j$ na RP,
β_1 - częstość umierania ofiar na skutek drapieżnictwa w modelu Lotki-Volterry,
β_2 - współczynnik przyrostu drapieżników w modelu Lotki-Volterry,
$\Gamma_{e,E}$ - strumień elektronów w kierunku anody,
$\Gamma_{e,E\times B}$ - strumień Halla,
Δm - masa wyrzucana z satelity,
Δp - zmiana pędu satelity,
ϵ - wielkość progu do konstrukcji RP,
Δv - zmiana prędkości napędu rakietowego pod wpływem wyrzucanego paliwa,
ϵ_0 - przenikalność elektryczna próżni,
ζ - przyrost wykresu SPD,
η - wydajność silnika,
η_a - wydajność anodowa silnika,
η_d - wydajność silnika pod względem mocy P_d (koszt produkcji jonów),
η_e - elektryczna sprawność silnika,
η_m - wydajność silnika związana z masowym wykorzystaniem jonów,
η_p - wydajność gazowa silnika,
η_T - całkowita sprawność silnika,
η_θ - wydajność pod kątem rozbieżności wiązki,
θ - kąt rozbieżności wiązki,
$\theta(i)$ - kąt układu biegunowego w SDP,
λ_D - długość Debye'a,
λ_{max} - największy wykładnik Lapunowa,
$\mu_{e,E}$ - ruchliwość elektronów w kierunku anody,
μ_e - całkowita częstotliwość zderzeń elektronów,
$\mu_{e,x}$ - ruchliwość elektronów w kierunku poprzecznym do pola magnetycznego,
ν - długość odcinków pionowych na RP,
ν_{min} - minimalna długość odcinków pionowych na RP,
ν_e - częstotliwość zderzeń elektronów,
ξ_{ion} - współczynnik tempa jonizacji,
τ - opóźnienie czasowe,
τ_e - czas, w którym elektron przemieszcza się z katody do anody,
τ_i - czas przejścia cząstek neutralnych,
$\phi(i)$ - kąt układu biegunowego na SDP,
ω - częstość siły zewnętrznej; parametr kontrolny modelu L-V,
Ω - częstość wymuszenia drgań ramy; parametr kontrolny,
Ω_e - częstotliwość cyklotronowa elektronu,
Ω_i - częstotliwość cyklotronowa jonu;

Akronimy i skróty

BM - ang. *Breathing Mode*, tryb oddechowy,
CEX - ang. *Charge EXchange*, wymiana ładunkowa,
EDI - ang. *Electron Drift Instabilities*, niestabilności dryfu elektronowego,
EP - ang. *Electric Propulsion*, napęd elektryczny,
ESA - ang. *European Space Agency*, Europejska Agencja Kosmiczna,
FC - ang. *Faraday Cup*, kubek Faraday'a,
FC_{old} - ang. *Faraday Cup old*, pierwsza wersja kubka Faraday'a,
FFT - ang. *Fast Fourier Transform*, szybka transformata Fouriera,
FNN - ang. *False Nearest Neighbors*, metoda fałszywych najbliższych sąsiadów,
FP - ang. *Faraday Probe*, sonda Faraday'a,
GIT - ang. *Grid Ion Thruster*, siatkowy silnik jonowy,
HEMPT - ang. *High Efficiency Multistage Plasma Thruster*, wysokowydajny wielostopniowy silnik plazmowy,
HET - ang. *Hall Effect Thruster*, silnik Halla,
HIKHET - ang. *High Impulse Krypton Hall Effect Thruster* (tytuł projektu ESA realizowanego w IFPiLM), silnik z efektem Halla o wysokim impulsie właściwym operujący na kryptonie,
IFPiLM - Instytut Fizyki Plazmy i Laserowej Mikrosyntezy,
KLIMT - ang. *Krypton Large IMpulse Thruster* (tytuł projektu ESA w ramach II konkursu PECS realizowanego w IFPiLM), silnik o wysokim impulsie właściwym operujący na kryptonie,
L-μPPT - ang. *Liquid Micro Pulsed Plasma Thruster* (tytuł projektu w ramach EC FP7 realizowanego w IFPiLM), impulsowy silnik plazmowy niewielkich rozmiarów działający na paliwo ciekłe,
MPDT - ang. *MagnetoPlasmaDynamic Thruster*, silnik magnetoplazmadynamiczny,
PEEK - polieteroeteroketon,
PlaNS - Laboratorium Plazmowych Napędów Satelitarnych,
PPS - franc. *Propulseur à Plasma Stationnaire*, stacjonarny napęd plazmowy, silnik Halla,
PPT - ang. *Pulsed Plasma Thruster*, plazmowy silnik impulsowy,
RP - ang. *Recurrence Plot*, wykres rekurencyjny,
RQA - ang. *Recurrence Quantification Analysis*, analiza ilościowa wykresu rekurencyjnego,
SEE - ang. *secondary electron emission*, emisja wtórna elektronów,
SERT-1 - ang. *Space Electric Rocket Test*, nazwa sondy testowej NASA,
SMART-1 - ang. *Small Missions for Advanced Research in Technology 1*, pierwsza księżycowa misja ESA, bezzałogowa sonda kosmiczna przeznaczona do testowania nowych technologii,
SPD - ang. *Symmetrized Dot-Pattern*, symetryzowany wzór kropkowy,
SPT - ang. *Stationary Plasma Thruster*, stacjonarny silnik plazmowy z warstwą magnetyczną, silnik Halla,

SUNIST - ang. *Sino-UNIted Spherical Tokamak*, tokamak,
TAL - ang. *Thruster with Anode Layer*, silnik Halla z warstwą anodową,
TORPEX - ang. *TORoidal Plasma EXperiment*, tokamak,
WEST - ang. *Tungsten Environment in Steady-state Tokamak*, tokamak;

Spis treści

Rozdział 1

Wprowadzenie do badań

Rozdział 1 stanowi wprowadzenie do tematyki związanej z silnikami elektrycznymi, których przykład stanowi silnik Halla będący obiektem badań tej pracy doktorskiej oraz wprowadzenie do tematyki sond elektrycznych, których wybrane modele umożliwiły zebranie danych na potrzeby niniejszej rozprawy.

1.1 Napędy elektryczne

Pierwszy podrozdział został przeznaczony na zarys historyczny dotyczący napędów elektrycznych (*EP*, ang. *electric propulsion*), a w podrozdziale 1.1.2 przedstawiono przegląd koncepcji takich napędów, dzieląc je na trzy grupy: elektrotermiczne, elektrostatyczne i elektromagnetyczne. Podane przykłady mają na celu uwidocznienie cech wspólnych oraz uwydatnienie różnic między zasadami działania jak i budową poszczególnych typów.

W podrozdziale 1.1.3 omówiono podstawowe parametry, które są przydatne do opisu wydajności silnika czy też rozbieżności wytwarzanej wiązki plazmowej. Dzięki nim można nie tylko scharakteryzować dany silnik, ale i przeprowadzić analizę porównawczą poszczególnych typów. Ponadto część z tych parametrów będzie pomocna przy próbie oceny jak pojawienie się zachowań chaotycznych wpływa na osiągi akceleratora.

Podstawy fizyczne działania silnika Halla zostały podane w podrozdziale 1.1.4, gdzie omówiono proces jonizacji oraz neutralizacji wiązki jonowej, a podrozdział 1.1.5 zawiera opis kilku podstawowych typów oscylacji, które mogą się pojawić w plaźmie wytwarzanej przez ten silnik.

1.1.1 Zarys historyczny i przegląd najważniejszych misji

Gdy tylko pojawiły się możliwości podróży kosmicznych, napęd elektryczny był rozważany jako aparatura służąca do transportu w przestrzeni kosmicznej [52, 171]. Już w 1906 r. Goddard spekulował, że przyspieszenie elektronów przez pole elektryczne może być wykorzystane do napędzania statku kosmicznego, co zaowocowało w 1920 r. powstaniem patentu na pierwszy elektrostatyczny silnik jonowy [92]. Ciołkowski, któremu zawdzięcza się pierwszy zaawansowany model uruchu rakiety kosmicznej uważał, że energia elektryczna może być wykorzystana w urządzeniach rakietowych do wyrzucania cząstek z dużą prędkością [232].

Pierwsze realistyczne koncepcje dotyczące napędów elektrycznych zostały zaproponowane przez Obertha w 1929 r. [178]. Cztery lata później Glushko i in. [90] zbudowali prototyp elektrycznego silnika w wersji elektrotermicznej i przetestowali go pod względem siły ciągu. Dziesięć lat później Shepherd i Cleaver [212] przedstawili pierwszą analizę wykonalności napędu elektrostatycznego sugerując konieczność użycia paliwa o dużej masie atomowej i podkreślając znaczenie neutralizacji wiązki.

Wszyscy wyżej wymienieni konstruktorzy doszli jednak do wniosku, że zbyt małe przyspieszenie, które się uzyskuje, rozstrzyga o niepraktyczności zastosowań silników elektrycznych. Jednak w 1951 r. Spitzer wykazał, że już niewielka wartość przyspieszenia wystarczy do napędzania satelitów w przestrzeni kosmicznej. Rozpoczął zatem kompleksowe i systematyczne badania napędów elektrycznych, a w szczególności silników jonowych [218].

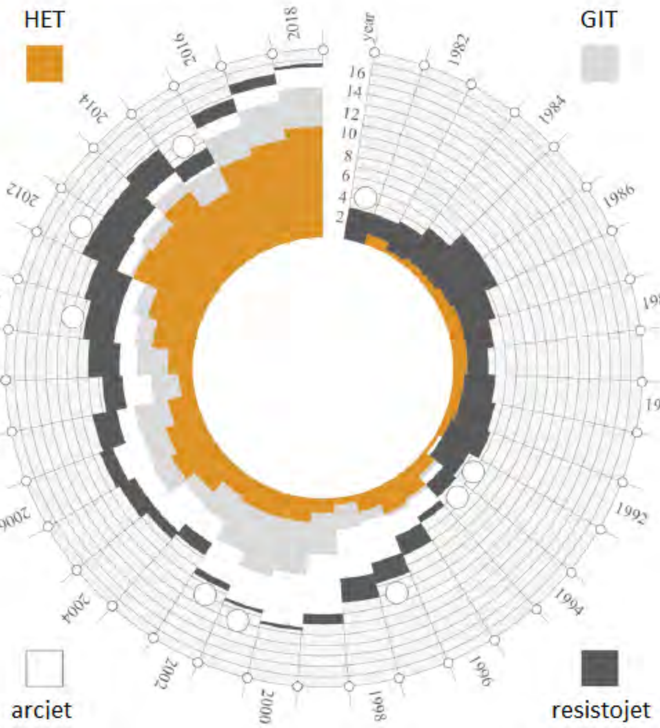
W następnych latach powstawały różne koncepcje napędów, które okazały się na tyle skuteczne, że pozostają w użyciu do chwili obecnej. Należą do nich np. silniki jonowe bombardowane elektronami opracowane przez Kaufmana [127], silniki jonowe o częstotliwości radiowej opracowane przez Löba [155] oraz silniki Halla (HET ang. *Hall Effect Thruster*), zwane również stacjonarnymi silnikami plazmowymi (SPT ang. *Stationary Plasma Thruster*) lub silnikami z zamkniętym dryfem elektronowym, opracowane przez Morozova [174].

Spośród licznych pomysłów dotyczących napędów elektrycznych dwa typy silników okazały się szczególne użyteczne: silniki Halla oraz siatkowe silniki jonowe GIT (ang. *Grid Ion Thruster*) [93]. Podczas gdy silniki Halla wydają się najodpowiedniejsze do klasycznych zastosowań, takich jak stabilizacja orbity, ze względu na ich wysoki stosunek siły ciągu do mocy elektrycznej, siatkowe silniki nadają się bardziej do misji długoterminowych ze względu na ich wyższy impuls właściwy, co umożliwia dłuższe czasy pracy przy tej samej ilości paliwa. Pomimo bardziej skomplikowanej fizyki, za silnikami Halla przemawia jednak to, że są urządzeniami dużo prostszymi technicznie i wymagają mniejszej ilości zasilaczy do działania [93].

Obecnie silniki jonowe używane są jako podstawowe systemy napędowe w kosmosie, a ich rozwój naukowy i techniczny jest ukierunkowany przede wszystkim na optymalizację wydajności. Postęp inżynierii kosmicznej zawsze był odzwierciedleniem technicznych możliwości danej epoki. Dzięki zastosowaniu technologii półprzewodników ogniwa słoneczne stały się znacznie wydajniejsze, co zaowocowało zwiększeniem ilości energii elektrycznej dostępnej na satelicie i rozkwitem w dziedzinie napędów elektrycznych. Do 2019 r. ponad 500 statków kosmicznych było wyposażonych w silniki elektryczne. Ich chronologiczny rozwój na przestrzeni ostatnich dziesięcioleci został przedstawiony na Rysunku 1.1 [116].

Podstawowym parametrem opisującym układ napędzający rakietę jest siła ciągu. Ponieważ siła ciągu T układu napędowego jest iloczynem prędkości wyrzucanej masy v_{out} oraz masy zuzytego paliwa $\dot{m}$:

$$T = v_{out}\dot{m}, \tag{1.1}$$



Rysunek 1.1: Chronologiczne zestawienie silników elektrycznych wyniesionych na orbitę geosynchroniczną w latach 1981-2018. Kolorami wyróżniono poszczególne typy silników: *arcjet*, *resistojet*, siatkowe silniki jonowe (GIT) oraz silniki Halla (HET). (Rysunek reprodukowany z [116].) Omówienie poszczególnych typów silników znajduje się w rozdziale 1.1.2.

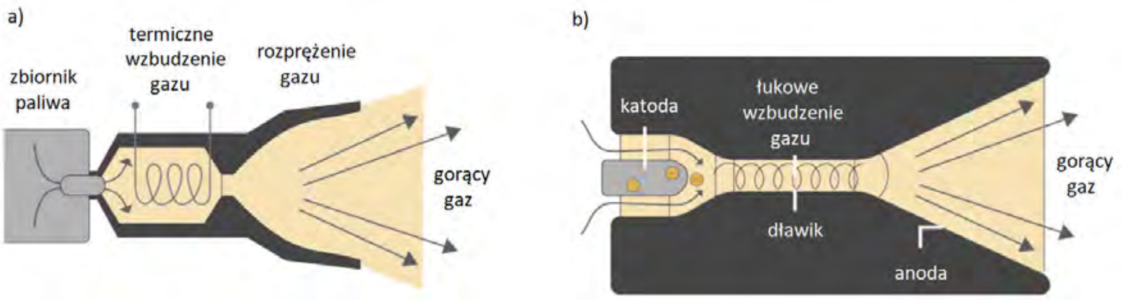
to zwiększenie prędkości wyrzucanej masy pozwoli zaoszczędzić pewną ilość paliwa przy zachowaniu tej samej siły ciągu. Ponieważ prędkości w napędach elektrycznych 10-krotnie przewyższają prędkości uzyskiwane w napędach chemicznych, to satelita napędzany elektrycznie może funkcjonować przy znacznie mniejszej ilości paliwa. Po pierwsze prowadzi to do ogromnego obniżenia kosztów, ponieważ duże ilości ciężkiego paliwa nie muszą być wynoszone z Ziemi, a po drugie, zwiększa się ładowność, tj. satelita napędzany elektrycznie może być obciążony przez znacznie większy ładunek niż jego chemiczny odpowiednik.

Omówiona powyżej zależność wynika wprost z równania Ciołkowskiego:

$$\frac{m_d}{m_0} = exp\left(\frac{-\Delta v}{v_{out}}\right), \tag{1.2}$$

gdzie m_d oznacza suchą masę napędu rakietowego (tj. masę rakiety bez paliwa), m_0 masę całkowitą, Δv zmianę prędkości rakiety pod wpływem wyrzucanego paliwa, a v_{out} prędkość wyrzucanych spalin [116].

W obszarze badań nad napędami chemicznymi od dziesięcioleci podejmuje się szereg wysiłków, aby znaleźć materiały o wystarczająco wysokiej gęstości energii, które zapewniłyby wysokie prędkości spalin. Jednak jedynie co do tej pory osiągnięto to maksymalna prędkość v_{out} wynoszącą około 5 km/s, podczas gdy dla napędu jonowego wynosi ona



Rysunek 1.2: Schematy głównych typów napędów elektrycznych elektrotermicznych pokazane w przekroju: a) resistojet, b) arcjet. (Szkice reprodukowane z [116] i przetłumaczone.)

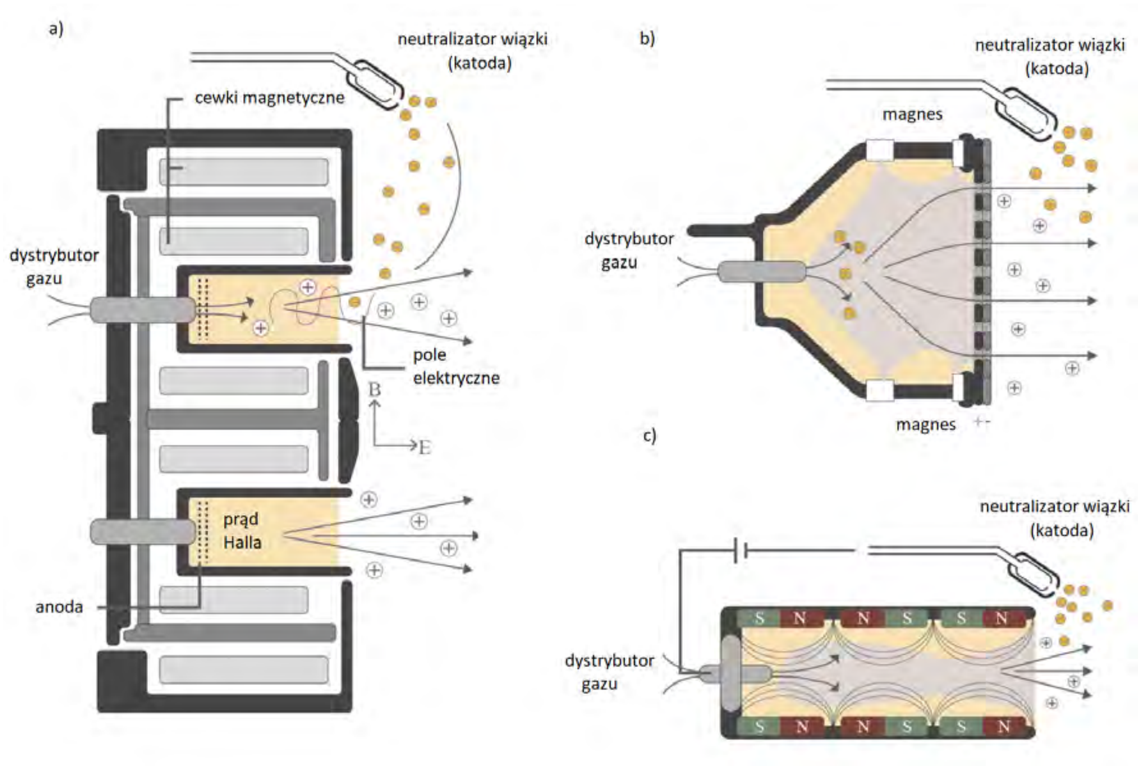
40 km/s. Biorąc pod uwagę fakt, że obecnie każdy satelita wraz z paliwem musi zostać wystrzelony w kosmos przez rakietą o napędzie chemicznym, użycie w kosmosie znacznie bardziej efektywnego napędu elektrycznego staje się wręcz konieczne, aby przedsięwzięcie było w ogóle opłacalne [116].

Ze względu na możliwość zastosowań militarnych, intensywne badania nad silnikami z zamkniętym dryfem elektronowym rozpoczęto niezależnie w ZSRR i USA już na początku lat 60 [255]. Pierwsze wykorzystanie silników elektrycznych miało miejsce w 1964 r. i było koordynowane przez amerykańską organizację NASA. Podczas misji suborbitalnej o nazwie *SERT-1* silniki jonowe zasilane rtęcią i cezem były testowane przez około 30 minut. W tym samym roku Rosjanie wystrzelili sondę kosmiczną *Zond-2* wyposażoną w sześć impulsowych silników plazmowych [116].

Silnik Halla po raz pierwszy został uruchomiony na pokładzie rosyjskiego satelity meteorologicznego *Meteor 1-10*, wystrzelonego 29 grudnia 1971 r. [169, 174]. Do kontroli orbity wykorzystane zostały dwa silniki SPT-60 działające z ksenonem [111]. Jednym z bardziej znanych przykładów wykorzystania silnika Halla był jego udział w europejskiej misji księżycowej *SMART-1* rozpoczetej w 2003 r. Podczas tej dwuletniej misji niewielki statek kosmiczny o masie startowej 367 kg, zaprojektowany przez Swedish Space Cooperation, był napędzany przez pojedynczy ksenonowy silnik Halla PPS-1350 o sile ciągu rzędu 70 mN oraz impulsie właściwym na poziomie 1600 s [62].

1.1.2 Główne typy silników i rodzaje paliwa

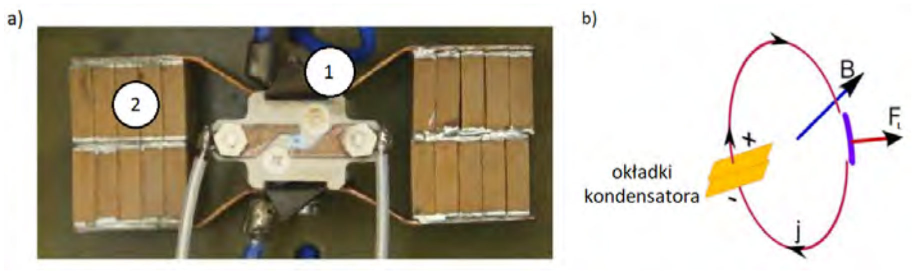
Silniki elektrotermiczne W silnikach elektrotermicznych gaz pędny jest podgrzewany elektrycznie, a siła ciągu jest generowana poprzez termodynamiczne rozszerzanie się gazu i jego ucieczkę dyszą o odpowiedniej geometrii. Silniki tego typu są proste w konstrukcji, jednak nie są w stanie zapewnić dużych prędkości wylotowych. Klasycznymi przedstawicielami tego gatunku są *resistojet* i *arcjet*, których schematy przedstawia Rysunek 1.2. Pierwszy z silników zwiększa prędkość spalin dzięki omowemu grzaniu gazu przez element elektryczny. W drugim gaz jest podgrzewany dzięki zderzeniom z cząsteczkami pochodzącymi z wyładowania łukowego [116].



Rysunek 1.3: Schematy głównych typów napędów elektrycznych elektrostatycznych pokazane w przekroju: a) HET, b) GIT i c) HEMPT. (Szkice reprodukowane z [116], wprowadzono polskie opisy.)

Silniki elektrostatyczne W silnikach elektrostatycznych do generacji siły ciągu stosuje się pole elektryczne. Przykładem silnika elektrostatycznego jest silnik siatkowy GIT, w którym procesowi jonizacji paliwa i jego przyspieszania przydzielone są inne partie silnika, tzn. plazma jest generowana w naczyniu wyładowczym, a jony są ekstrahowane za pomocą siatki. Silniki Halla[1] lub wysokowydajne wielostopniowe silniki plazmowe (HEMPT, ang. *High Efficiency Multistage Plasma Thruster*) nie potrzebują takiego rozdzielenia. Wykorzystują one bowiem topologię skrzyżowanych pól elektrycznego i magnetycznego do generowania pętli prądowych dla elektronów, zapewniając wysoce wydajną jonizację paliwa w kanale wyładowania. Natomiast przyspieszenie jonów następuje blisko ujścia z tego kanału, o cylindrycznym kształcie dla silnika HEMPT i pierścieniowym dla HET. Elektrony pochodzące z katody są przyciągane przez potencjał anody, inicjują wyładowanie plazmowe i podtrzymują je wewnątrz kanału wyładowania [138]. Katoda może być umieszczona na zewnątrz korpusu silnika lub być centralnie zamontowana na jego osi. Jej celem jest dostarczenie elektronów do wyładowania plazmowego oraz neutralizacja wiązki jonowej [34]. Anoda i wlot paliwa znajdują się po stronie zamkniętego

[1]Silniki Halla, wedle klasyfikacji podanej przez Goebla i Katza, są określane jako urządzenia elektrostatyczne a nie elektromagnetyczne, ponieważ jony są przyspieszane przez przyłożone pole elektryczne, pomimo iż istnienie pola magnetycznego jest krytyczne dla całego procesu [93].



Rysunek 1.4: a) Zdjęcie prototypu miniaturowego impulsowego silnika plazmowego na paliwo ciekłe LμPPT (ang. *Liquid Micro Pulsed Plasma Thruster*) zaprojektowanego i zmontowanego w laboratorium PlaNS. Pod numerem 1 znajduje się elektroda główna, a pod numerem 2 jedna z baterii kondensatora [16, 222]. b) Schemat generacji siły ciągu w plazmowym silniku impulsowym.

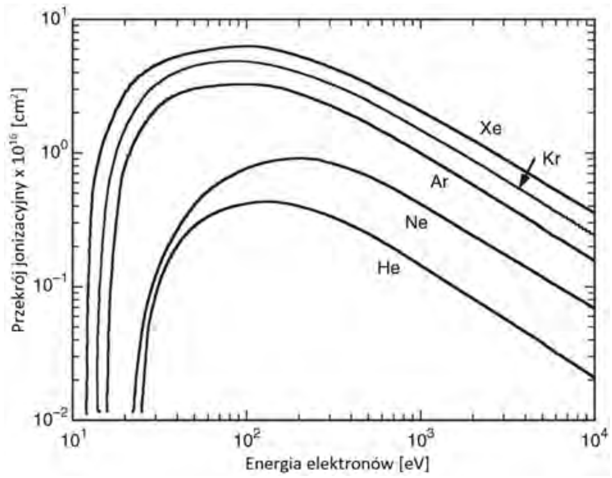
końca kanału. Główną różnicą między tymi dwoma omawianymi rodzajami silników jest zmienne pole magnetyczne, występujące w HEMPT, które poprawia pułapkowanie plazmy, co w konsekwencji ma zapewniać jej wyższe gęstości w rejonie przyspieszania oraz zmniejszyć erozję ścian [138]. Schematy silników elektrostatycznych znajdują się na na Rysunku 1.3.

Istnieją dwa warianty silników Halla: silniki z warstwą magnetyczną, będące przedmiotem badań tej pracy doktorskiej oraz silniki z warstwą anodową znane jako TAL (ang. *Thruster with Anode Layer*). Główna różnica konstrukcyjna polega na tym, że w silniku z warstwą anodową kanał wyładowania został skrócony i zastosowano w nim przewodzące ściany zamiast ceramicznych.

Silniki elektromagnetyczne W silnikach elektromagnetycznych tworzenie jonów oraz ich przyspieszanie odbywa się dzięki silnemu sprzężeniu pola elektrycznego z magnetycznym. Zatem w przeciwieństwie do silników elektrostatycznych jonizacji i akceleracji nie można traktować jako procesów oddzielnych. Jednym z przykładów silnika elektromagnetycznego jest plazmowy silnik impulsowy (PPT, ang. *Pulsed Plasma Thruster*). Przedstawiciel tego gatunku – miniaturowy prototyp LμPPT, przedstawiony na Rysunku 1.4 a), był rozwijany w laboratorium PlaNS w latach 2013-2017 [16, 222]. Pole magnetyczne w PPT jest generowane przez wyładowanie łukowe, co skutkuje przyspieszaniem cząstek dzięki sile Lorentza [116]:

$$\vec{F_L} = \vec{j} \times \vec{B}, \tag{1.3}$$

gdzie wektor j oznacza gęstość prądu płynącego w plaźmie, a B indukcję magnetyczną, co schematycznie przedstawiono na Rysunku 1.4 b). Innym przykładem silnika należącego do tej grupy jest silnik magnetoplazmadynamiczny (MPDT, ang. *MagnetoPlasmaDynamic Thruster*), który można interpretować jako *arcjet* o znacznie większej mocy, gdzie wyładowanie łukowe ma tak wysoką intensywność, że gaz pędny jest nie tylko podgrzewany termicznie, ale także w pewnym stopniu jonizowany i przyspieszany przez pola elektromagnetyczne towarzyszące wyładowaniu. Wadą silnika MPDT jest to, że wysoką wydajność osiąga przy stosunkowo wysokim zużyciu mocy elektrycznej; w przeciwnym razie pola



Rysunek 1.5: Przekrój czynny na jonizację na skutek zderzeń z elektronami [200].

generowane przez łuk nie są wystarczająco intensywne, aby przyspieszyć paliwo [116].

Paliwa silników elektrycznych Ocena, czy dany materiał nadaje się na paliwo, jest dość złożonym zadaniem. Ważnymi własnościami, które należy uwzględnić w przypadku paliw atomowych są: masa atomowa, energia jonizacji i przekrój czynny na jonizację, a także temperatura wrzenia [63]. Rysunek 1.5 przedstawia przekroje czynne na jonizację w zderzeniach z elektronami dla kilku gazów szlachetnych. Argon, krypton i ksenon wykazują podobny kształt krzywej jonizacji i są znacznie efektywniejsze niż hel i neon. Oprócz rzeczywistej wielkości przekrojów ocenie należy również poddać energię jonizacji. Pod tym względem gazy szlachetne są gorsze niż paliwa cząsteczkowe, ponieważ wypełniona powłoka atomowa okazuje się szczególnie stabilna. Atomy zbliżone strukturą do gazu szlachetnego, takie jak metale alkaliczne czy halogeny, mogą ulegać jonizacji podczas zderzeń z elektronami o znacznie niższych energiach, ale z tego samego powodu substancje te są bardzo reaktywne chemicznie, co może prowadzić do niepożądanych interakcji materiałowych.

W ostatnich latach przebadano szereg różnych pierwiastków i związków chemicznych pod względem ich przydatności w charakterze paliwa. Obiecującym kandydatem okazał się jod, który do pewnego progu przepływu masowego wykazuje podobne wydajności do ksenonu [116]. Jednak ze wzgledu na jego reaktywność wokół satelity wytwarza się atmosfera jodowa, która pozostaje w kontakcie z materiałami użytymi do budowy satelity, dając możliwość zajścia reakcji chemicznych. Chociaż wysoka korozyjność wymusza również stworzenie specjalnych warunków umożliwiających przeprowadzenie testów laboratoryjnych, niedogodność tą udało się niedawno pokonać, co zaowocowało powstaniem komercyjnych jonowych silników Halla [116, 190].

Obecnie trwają również prace nad zupełnie odmiennym rozwiązaniem, przeznaczonym jednak tylko dla misji wokół planet z atmosferą. Chodzi o stworzenie silników jonowych, które uzupełniałyby paliwo w swoim zbiorniku, wykorzystując gaz resztkowy z otoczenia, który wytwarza siłę oporu działającą na satelicie, sprężać go i wykorzystywać jako paliwo. Co ważne, taka możliwość tankowania wydłużyłaby czas pracy satelity, co z kolei korzystnie wpłynęłoby na rosnący problem kosmicznych śmieci.

W obecnym czasie ksenon jest rutynowo wykorzystywanym materiałem napędowym. Po pierwsze jest on gazem chemicznie obojętnym, a zatem minimalizuje zarówno zanieczyszczenie statku kosmicznego, jak i środowiska. Po drugie użycie ksenonu pozwala uzyskać niską masę zbiornika pod ciśnieniem, ze względu na wysoką gęstość w temperaturze otoczenia i, w porównaniu z innymi gazami obojętnymi, umiarkowane ciśnienie. Nie gromadzi się też on na elementach statku kosmicznego. Poza tym ksenon charakteryzuje się niską energią jonizacji (12.1 eV w porównaniu z kryptonem 14.0 eV), jak i wysoką masą atomową (131.3 u w porównaniu z kryptonem 83.3 u) [255]. Chciaż na korzyść ksenonu przemawia wiele czynników, cena tego gazu szlachetnego jest bardzo wysoka, a i wobec rosnącego popytu na podróże kosmiczne jego ilość wkrótce nie wystarczy – zawartość ksenonu w powietrzu wynosi zaledwie 400 *ppb*. Poszukiwanie łatwo dostępnych, wydajnych i opłacalnych alternatyw dla ksenonu stało się zatem podstawowym przedmiotem zainteresowania w dziedzinie napędów elektrycznych [116].

Tak jak i w przypadku silników badanych w niniejszej rozprawie doktorskiej, często obieraną alternatywą dla ksenonu staje się krypton, który występuje w ziemskiej atmosferze około dziesięciokrotnie częściej, co obniża jego cenę. Jednak z fizycznego punktu widzenia konieczne staje się zwiększenie mocy strumienia wiązki jonów P_{jet}, tj. mocy elektrycznej potrzebnej do wytworzenia tego samego ciągu poprzez akcelerację jonów [116]:

$$P_{jet,Kr} = P_{jet,Xe} \cdot \sqrt{\frac{m_{i,Xe}}{m_{i,Kr}}} \approx 1.25 \cdot P_{jet,Xe}, \tag{1.4}$$

gdzie $m_{i,Kr}$ i $m_{i,Xe}$ oznaczają odpowiednio masy jonu kryptonu i ksenonu. Chociaż zgodnie z równaniem 1.4 pobór mocy jest o 25 % wyższy dla kryptonu niż dla ksenonu, można przypuszczać, że jeśli na satelicie dostępna będzie wystarczająca moc elektryczna, krypton rzeczywiście stanie się odpowiednią, tańszą alternatywą dla ksenonu. Oprócz wzrostu mocy, istnieją też inne czynniki, które należy wziąć pod uwagę ze względu na różne energie jonizacji, przekroje czynne na jonizację i wzbudzenia, a także właściwości samego przepływu [116].

Istnieją argumenty za tym, że wydajność silnika kryptonowego może być porównywalna z wydajnością silnika ksenonowego, jeśli masowe natężenie przepływu Kr będzie zwiększone [136, 153], gdyż większa gęstość kryptonu w kanale wyładowania jest w stanie skompensować jego niższy przekrój czynny na jonizację i poprawić wykorzystanie masy gazu. Wzrost mocy elektrycznej P_{jet} zapewniony jest przez wzrost prądu wyładowania, który powoduje wzrost nagrzewania Joule'a i będzie prowadził do zwiększonych obciążeń cieplnych silnika. W HET bez aktywnego systemu chłodzenia jedynym sposobem na odprowadzenie nadmiernego ciepła Joule'a jest promieniowanie. Energia cieplna z wnętrza silnika musi zostać przekazana na odpowiednie powierzchnie promieniujące. Skuteczne zapewnienie tego transferu było jednym z głównych wyzwań projektu KLIMT (ang. *Krypton Large IMpulse Thruster*) realizowanego w IFPiLM w latach 2013-2016, dla którego uzyskano saturację temperaturową [221].

1.1.3 Podstawowe parametry charakteryzujące silnik

Przy planowaniu misji kosmicznej o wyborze odpowiedniego typu silnika decydują dwa kryteria. Pierwszym z nich jest moc elektryczna dostępna na satelicie, a tym samym stosunek siły ciągu do mocy zasilacza. Ponieważ większa siła ciągu przy zachowaniu tej samej mocy oznacza szybsze podróże w kosmosie, moc określa efektywność czasową. Drugim kryterium jest wartość impulsu właściwego I_{sp} związanego z możliwą do osiągnięcia zmianą pędu Δp w stosunku do wyrzucanej masy Δm. Impuls właściwy odpowiada generowanej sile ciągu T podzielonej przyspieszenie grawitacyjne $g \approx 9.807\ m/s^2$ i przez tzw. wydatek masowy oznaczający natężenie przepływu gazu $\dot{m}$. Można go również wyrazić przez prędkość przyspieszanych cząstek v_{out} podzieloną przez g. Impuls właściwy przy stałej wartości ciągu i przy stałym natężeniu przepływu paliwa wynosi:

$$I_{sp} = \frac{\Delta p}{\Delta m g} = \frac{T}{\dot{m} g} = \frac{v_{out}}{g}. \tag{1.5}$$

Dla wszystkich silników jonowych przy założeniu, że wiązka plazmowa jest jednokierunkowa i składa się z jonów monoenergetycznych, prawdziwy jest również wzór [93]:

$$I_{sp} = \frac{v_i}{g} \frac{\dot{m}_i}{\dot{m}}, \tag{1.6}$$

gdzie $\dot{m}_i$ oznacza wydatek masowy jonów, $\dot{m}$ ilość pobieranego paliwa, a v_i prędkość jonów.

Wysokie wartości I_{sp} oznaczają, że do otrzymania tej samej siły ciągu można użyć mniejszej ilości paliwa. Zatem impuls właściwy określa wydajność silnika pod względem masy paliwa. Niestety wysokim wartościom impulsu towarzyszy wyższy pobór mocy elektrycznej, czyli stosunek siły ciągu do mocy elektrycznej ulega zmniejszeniu. Wybór odpowiedniego układu napędowego jest zatem zawsze kompromisem między dostępną mocą elektryczną a ilością paliwa, które można przetransportować. W przypadku wysokich wartości I_{sp} moc elektryczna jest określana głównie poprzez moc strumienia wiązki jonów daną wzorem:

$$P_{jet} = \frac{1}{2} \dot{m} v_{out}^2. \tag{1.7}$$

Wykorzystując wzór na siłę ciągu 1.1 oraz wzór na impuls właściwy 1.5, moc strumienia można zapisać również jako:

$$P_{jet} = \frac{T^2}{2\dot{m}}, \tag{1.8}$$

z czego wynika, że zwiększenie siły ciągu bez zwiększenia natężenia przepływu gazu spowoduje wzrost mocy strumienia wiązki jonów. Moc strumienia jest powiązana z impulsem właściwym relacją $P_{jet} \propto I_{sp}^2$, ponadto łącząc wzory 1.5 i 1.7 otrzyma się kolejną zależność:

$$P_{jet} = \frac{T I_{sp} g}{2}. \tag{1.9}$$

Natężenie przepływu jonów jest związane z prądem wiązki jonowej I_i relacją:

$$\dot{m}_i = \frac{I_i M}{e}, \tag{1.10}$$

gdzie M oznacza masę atomową użytego gazu, a e elementarny ładunek elektryczny. Przyjmując, że prędkość jonów v_i jest dużo większa niż cząstek pozbawionych ładunku, których niewielka ilość również opuszcza silnik, siłę ciągu można przedstawić jako:

$$T = v_{out}\frac{dm}{dt} \approx v_i\dot{m}_i. \tag{1.11}$$

Ze względu na to, że siła ciągu jest generowana głównie przez ilość przyspieszanych jonów $\dot{m}_i$, wprowadzono wydajność ich masowego wykorzystania η_m, tj. proporcję emitowanych jonów w stosunku do całości paliwa $\dot{m}$:

$$\eta_m = \frac{\dot{m}_i}{\dot{m}}, \tag{1.12}$$

co w przypadku jednokrotnie zjonizowanych atomów przybiera postać:

$$\eta_m = \frac{I_i}{e}\frac{M}{\dot{m}}. \tag{1.13}$$

Sprawność η_m jest proporcjonalna do masy jonów i prądu jonowego, ponieważ te czynniki dominują w wytwarzaniu siły ciągu.

Sprawność elektryczna:

$$\eta_e = \frac{P_{jet}}{P_{in}}, \tag{1.14}$$

stanowi stosunek mocy strumienia wiązki jonów P_{jet} do całkowitej mocy wejściowej dostarczanej do silnika P_{in}.

Ponieważ w silnikach Halla jony są przyspieszane dzięki ustalonemu napięciu wyładowania U_d, ich prędkość określona jest zależnością:

$$v_{out}^2 = \frac{2eU_d}{M}. \tag{1.15}$$

Podstawiając powyższe równania do równania 1.7 można zauważyć, że moc strumienia określa prosta zależność $P_{jet} = U_d I_i$.

Koszt produkcji jonów wyraża się jako stosunek mocy służącej do ich produkcji i prądu przez nie wytworzonego:

$$\eta_d = \frac{P_{in}}{I_i}. \tag{1.16}$$

W przeciwieństwie do większości pozostałych typów wydajności, pożądana jest jak najmniejsza wartość η_d, ponieważ oznacza ona utratę wkładanej mocy. Minimalny koszt produkcji jonów jest określony przez energię jonizacji paliwa i w silnikach jonowych wynosi zwykle kilkaset eV na jon.

Jeśli pominie się wkład niezjonizowanych cząstek neutralnych w produkcję ciągu, całkowita sprawność silnika η_T będzie określona równaniem 1.14. Wygodnie jest ją również wyrazić za pomocą siły ciągu, przepływu masowego paliwa i całkowitej mocy wejściowej:

$$\eta_T = \frac{T^2}{2\dot{m}P_{in}}. \tag{1.17}$$

W silnikach typu Halla gaz jest doprowadzany niezależnie do kanału wyładowania i do zewnętrznej katody. Zatem:

$$\dot{m} = \dot{m}_a + \dot{m}_c, \tag{1.18}$$

gdzie $\dot{m}_a$ jest natężeniem przepływu gazu podawanego od strony anody, a $\dot{m}_c$ katody. Ponieważ strumień gazu katodowego jest podawany na zewnątrz obszaru jonizacji jest on w dużej mierze tracony. W związku z powyższym wydajność gazową definiuje się jako [93]:

$$\eta_p = \frac{\dot{m}_a}{\dot{m}} = \frac{\dot{m}_a}{\dot{m}_a + \dot{m}_c}. \tag{1.19}$$

Wydajność silnika Halla jest też wyrażana za pomocą tzw. wydajności anodowej:

$$\eta_a = \frac{1}{2}\frac{T^2}{\dot{m}_a P_d}, \tag{1.20}$$

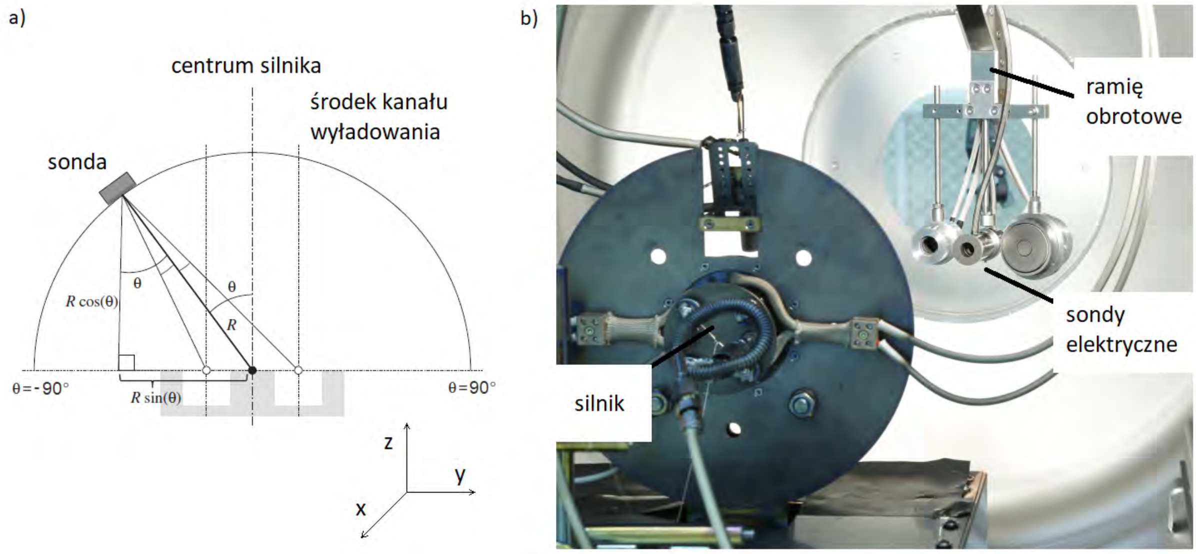
gdzie P_d oznacza moc wyładowania równą iloczynowi prądu wyładowania I_d i napięcia wyładowania U_d. Wzór ten opisuje podstawowe osiągi silnika bez uwzględnienia skutków przepływu gazu z katody i bez uwzględnienia mocy wykorzystywanej do generowania pola magnetycznego czy podtrzymywania pracy katody. Zwykle ma to na celu oddzielenie strat katodowych i magnetycznych, aby można było dostrzec trendy w mechanizmach wytwarzania plazmy i przyspieszania [93]. Dzięki powyższemu równaniu można w wygodny sposób porównać wydajności różnych typów silników.

Siła ciągu dla pojedynczo zjonizowanego gazu roboczego jest proporcjonalna do prądu wiązki i pierwiastka kwadratowego z napięcia przyspieszającego:

$$T = \sqrt{\frac{2M}{e}} I_i \sqrt{U_d}. \tag{1.21}$$

Powyższe równanie stanowi podstawowe równanie na siłę ciągu, które stosuje się w przypadku jednokierunkowej, pojedynczo zjonizowanej, monoenergetycznej wiązki jonów. Aby uwzględnić rozbieżność wiązki oraz obecność cząstek wielokrotnie naładowanych, które stanowią do 20 % produkowanych jonów [93], równanie to należy zmodyfikować. Korekta siły ciągu ze względu na rozbieżność wiązki jest prosta, gdy wiązka rozchodzi się równomiernie po wyjściu z silnika, tzn. gdy profil gęstości jonów pozostaje stały. W przypadku silników o cylindrycznej lub pierścieniowej budowie kanału wyładowania współczynnik korekty ma bardziej rozbudowaną formę. Druga przedstawiona w tym podrozdziale poprawka zastosowana do równania 1.21 będzie częściowo uwzględniała obecność jonów o wielokrotnym ładunku.

Przy obliczeniach całkowitego prądu jonowego I_i na ogół zakłada się, że wiązka jest symetryczna osiowo wokół osi z stanowiącej oś wylotu silnika (patrz Rysunek 1.6), gdzie oś obrotu sondy jest osią x. Sonda porusza się po łuku o stałej wartości promienia R, a kolektor jest skierowany do centrum silnika we wszystkich ustawieniach kątowych pomiaru. Taki sposób zbierania danych pozwala zbadać symetrię wiązki plazmowej w przemiatanej płaszczyźnie [34].



Rysunek 1.6: a) Schemat zbierania profilu prądu jonowego dzięki sondzie umieszczonej na obrotowym ramieniu diagnostycznym [34]. b) Zdjęcie zrobione w laboratorium PlaNS przedstawiające ramię obrotowe ustawione pod kątem 30° w stosunku do osi centralnej silnika Halla, na którym zamontowano sondy elektryczne.

Ponieważ rozbieżność wiązki jonów ma związek z utratą pędu w kierunku osiowym silnika, straty w sile ciągu można szacować na jej podstawie:

$$S_\theta = \pi R^2 \frac{\int_{-90^\circ}^{90^\circ} j_i(\theta)\, |\sin\theta| \cos\theta d\theta}{I_i}, \tag{1.22}$$

gdzie $j_i(\theta)$ jest lokalną gęstością prądu jonowego zmierzoną, gdy sonda znajdowała się pod katem θ od osi silnika.

Wydajność ze względu na rozbieżność wiązki definiuje się następująco [34]:

$$\eta_\theta = \langle\cos\theta\rangle^2 = S_\theta^2. \tag{1.23}$$

Gdy silnik Halla pracuje przy wyższych poziomach mocy, czyli przy zwiększonym przepływie masowym oraz wyższym napięcu wyładowania (U_d ponad 300 V), to generuje znaczną liczbę wielokrotnie zjonizowanych atomów gazu. Jony te mają wpływ na wydajność urządzenia [93]. Jeśli wiązka zawiera zarówno atomy zjonizowane pojedynczo, jak i podwójnie, to całkowity prąd wiązki wyniesie:

$$I_i = I_{i,+} + I_{i,++}, \tag{1.24}$$

gdzie $I_{i,+}$ to prąd jonowy pochodzący od cząstek naładowanych pojedynczo, a $I_{i,++}$ od cząstek naładowanych podwójnie. Ponieważ całkowita siła ciągu wytwarzana z udziałem jonów obu rodzajów jest sumą ciągu generowanego przez każdy z nich, można ją zapisać w postaci [93]:

$$T = I_{i,+}\sqrt{\frac{2MU_d}{e}} + I_{i,++}\sqrt{\frac{MU_d}{e}} = I_{i,+}\sqrt{\frac{2MU_d}{e}}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{I_{i,++}}{I_{i,+}}\right). \tag{1.25}$$

Współczynnik korekty siły ciągu w obecności podwójnie zjonizowanych atomów jest określony przez stosunek równań 1.25 i 1.21, gdzie prąd wiązki w równaniu 1.21 jest podany przez równanie 1.24:

$$S_{i,+,++} = \frac{I_{i,+} + \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{I_{i,++}}{I_{i,+}}}{I_{i,+} + I_{i,++}} = \frac{1 + 0.707\frac{I_{i,++}}{I_{i,+}}}{1 + \frac{I_{i,++}}{I_{i,+}}}. \tag{1.26}$$

Stosunek $I_{i,++}/I_{i,+}$ można wyznaczyć za pomocą badań spektroskopowych lub ewentualnie przyjąć orientacyjną wartość procentową zależną od przykładanego napięcia. Podobny współczynnik korygujący można wyprowadzić dla jonów o wyższym stopniu jonizacji, ale przeważnie się tego nie robi, gdyż ich liczba jest stosunkowo niewielka w większości siatkowych silników jonowych oraz Halla [93].

W celach poglądowych na końcu tego podrozdziału umieszczono Tabelę 1.1. Przedstawia ona zakresy parametrów charakteryzujących napędy omówione w rozdziale 1.1.2 oraz rodzaje stosowanych paliw. Dodatkowo podane zostały tutaj główne wady i zalety poszczególnych typów silników.

	Resistojet	Arcjet	GIT	HET/HEMPT	PPT	MPDT
T [mN]	0.5 - 6000	50 - 6800	0.01 - 750	0.01 - 2000	0.05 - 10	0.001 - 2000
I_{sp} [s]	150 - 850	130 - 2200	1500 - 10000	600 - 3000	1400 - 2700	200 - 3200
η_e [%]	30 - 110	25 - 60	30 - 90	20 - 70	5 - 30	20 - 70
T/P [mN/kW]	450 - 700	150 - 600	20 - 250	150 - 300	50 - 200	150 - 500
Paliwo	NH_3, X_2, He, Xe, N_2 hydrazyna	NH_3, X_2, He, N_2 hydrazyna	Xe, Kr, Ar, Bi I_2, H_2O	Xe, Kr, Ar, I_2	PTFE	Ar, Xe H_2, Li
Wady	bardzo niskie I_{sp}	niskie η_e	niskie T, duża złożoność	dywergencja wiązki, erozja kanału	niskie η_e	wymagana wysoka moc, krótka żywotność
Zalety	mała złożoność	wysokie T	wysokie I_{sp} i η_e	wysokie T/P	paliwo stałe	wysokie I_{sp} i η_T

Tabela 1.1: Charakterystyka głównych typów silników o napędzie elektrycznym. Sprawność η_e została określona poprzez równanie 1.14. (Dane zaczerpnięto z artykułu [116].)

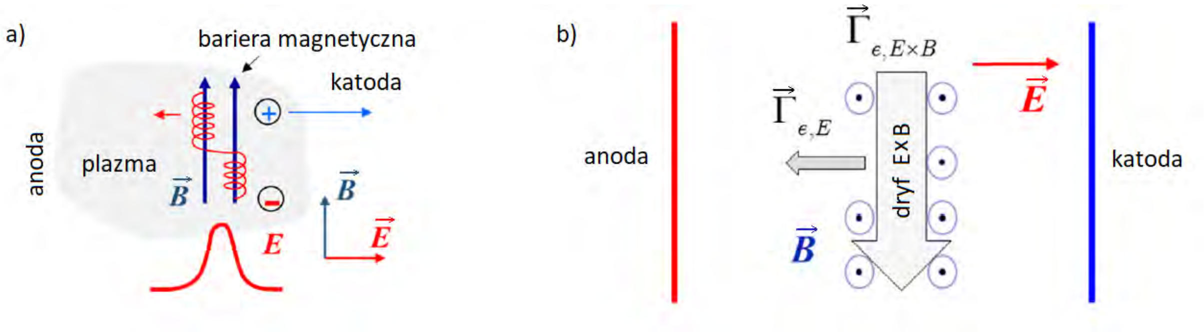
1.1.4 Podstawy fizyczne działania silników Halla

Chciaż zasada działania silników Halla wydaje się stosunkowo prosta, kryjąca się za nią fizyka jest bardzo skomplikowana i nieliniowa. Powód leży w złożonym transporcie elektronów w poprzek pola magnetycznego i jego sprzężeniu z polem elektrycznym oraz gęstością neutralnych atomów gazu. Poza tym wytworzenie silnego pola elektrycznego w plazmie quasi-neutralnej jest sporym wyzwaniem, ze względu na różnego typu niestabilności utrudniające pułapkowanie elektronów. Ponadto na transport elektronów w kierunku anody mają istotny wpływ ich oddziaływania ze ściankami. Charakterystyka silnika zależy zatem od nie w pełni poznanych właściwości materiałowych tych ścian (wtórnej emisji elektronów, chropowatości powierzchni itp.) [24].

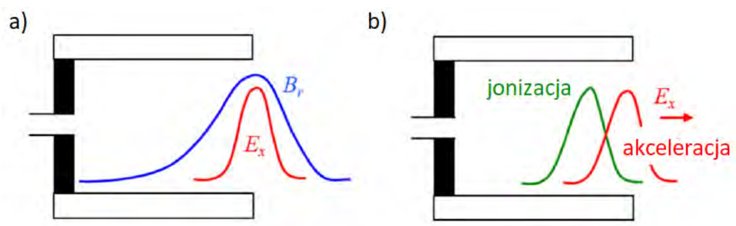
W silniku Halla, którego schemat przedstawiono na Rysunku 1.3, jony dodatnie powstające w wyniku zderzeń z elektronami są ekstrahowane z plazmy i przyspieszane przez lokalne pole elektryczne ustalające się w kanale w wyniku przyłożenia stałego napięcia między anodą i katodą [93]. Elektrony są dostarczane zarówno na skutek zderzeń jonizacyjnych jak i dzięki zewnętrznej katodzie. Na skutek słabego oddziaływania z polem magnetycznym trajektorie jonów są z dobrym przybliżeniem prostoliniowe. Natomiast elektrony, ze względu na bardzo małą masę, zostają uwięzione przez pole magnetyczne, a ich trajektorie wyznacza prędkość dryfu w kierunku $E \times B$ (schemat powstania bariery magnetycznej przedstawia Rysunek 1.7). Lokalna wartość promienia Larmora elektronu jest znacznie mniejsza niż długość strefy jonizacyjno-akceleracyjnej oraz odległość między ścianami kanału [24]. Ładunek przyspieszonych jonów opuszczających silnik jest neutralizowany przez elektrony produkowane przez katodę (zatem silnik opuszcza quasi-neutralna wiązka plazmy).

Schwytane przez pole magnetyczne B elektrony mogą przemieszczać się w kierunku anody jedynie dzięki dryfowi zapewnionemu przez zderzenia z innymi cząstkami (głównie neutralnymi atomami) lub ze ścianami kanału wyładowania a także dzięki mikroniestabilnościom plazmy (transport anomalny) [24]. Ze względu na skuteczne działanie silników Halla ważne jest aby strumień elektronów generowany w kierunku $E \times B$ (tzw. strumień Halla) był znacznie większy niż strumień elektronów w kierunku anody: $\Gamma_{e,E\times B} \gg \Gamma_{e,E}$.

Ponieważ katoda jest ekranowana przez uwięzione elektrony, największa wartość spadku potencjału między elektrodami silnika występuje u ujścia z kanału. Jest to również miejsce gwałtownego przyspieszania jonów. Pole magnetyczne jest głównie radialne w rejonie biegunów magnetycznych i osiąga maksimum wartości w pobliżu płaszczyzny wylotowej kanału, a jego wartość zanika przy anodzie (patrz Rysunek 1.8 a)) [175]. W obszarze maksymalnego poprzecznego pola magnetycznego, na skutek efektu Joule'a, elektrony mają wyższą temperaturę i natężenie jonizacji wzrasta. Zmniejszony strumień elektronów $\vec{\Gamma}_{e,E}$ i ich wysoka temperatura w obszarze silnego pola magnetycznego powodują, że osiowe pole elektryczne również osiąga maksimum w pobliżu płaszczyzny wyjściowej. Ponieważ większość gazu zostaje zjonizowana, gęstość gazu obojętnego w tym rejonie jest bardzo mała [24]. Jak pokazano na Rysunku 1.8 b) obszary jonizacji i przyspieszenia są nieco przesunięte względem siebie, co prowadzi do dyspersji prędkości jonów i rozbieżności



Rysunek 1.7: a) Schemat powstania bariery magnetycznej. b) Schemat powstania dryfu elektronów w kierunku $E \times B$. (Schematy reprodukowane z [24] i przetłumaczone.)



Rysunek 1.8: a) Profil radialnego pola magnetycznego B_r oraz osiowego pola elektrycznego E_x wzdłuż kanału wyładowania. b) Profil wydajności jonizacji i przyspieszania. Białe prostokąty oznaczają ściany kanału wyładowania, a czarne anodę. (Profile reprodukowane z [24].)

kątowej wiązki plazmowej [93].

Intensywność i profil pola magnetycznego, które kontrolują względne położenia obszarów jonizacji i przyspieszenia, muszą zostać zoptymalizowane, aby zapewnić wydajną ekstrakcję jonów z kanału silnika. Podczas badań należy pamiętać, że zwiększenie wydatku masowego gazu doprowadzi do wzrostu częstotliwości zderzeń z elektronami, a zarazem zwiększy częstotliwość aktów jonizacji, a zmiana topografii pola magnetycznego będzie wpływać na objętość i położenie strefy jonizacyjnej oraz ruchliwość elektronów w kierunku ścian kanału wyładowania. Zatem odpowiednio dobrana topografia pola magnetycznego potrafi wzmocnić pułapkowanie elektronów w strefie jonizacji i zmniejszyć przewodność przyścienną.

Ponieważ temperatura elektronowa T_e jest w silnikach Halla na poziomie 10 eV, a koncentracja elektronowa n_e wynosi około 10^{10} cm^{-1}, można oszacować typową długość ekranowania Debye'a [59]:

$$\lambda_D = \sqrt{\frac{\epsilon_0 k_B T_e}{e^2 n_e}} \approx 0.74 \times 10^{-4} \quad m, \tag{1.27}$$

gdzie ϵ_0 oznacza przenikalność elektryczną próżni, k_B stałą Boltzmanna, a e ładunek elektronu.

Na klasyczny transport zderzeniowy elektronów w obecności sprzężonych pól $E \times B$ (patrz Rysunke 1.9 a)) można spojrzeć poprzez równanie pędu elektronu w plazmie jednorodnej [24]:

$$-\frac{e}{m_e}[\vec{E} + \vec{v_e} \times \vec{B}] - \nu_e \, \vec{v_e} = \vec{0}, \tag{1.28}$$

gdzie m_e jest masą elektronu, $\vec{v_e}$ średnią prędkością elektronów, a ν_e ich częstotliwością zderzeń. Przyjmując, że jednowymiarowe pole elektryczne E jest skierowane wzdłuż osi x, a indukcja magnetyczna B w kierunku y (co odpowiada dryfowi $E \times B$ w kierunku z) odpowiednie prędkości wyniosą [24]:

$$v_x = -\frac{eE}{m_e \nu_e}\frac{1}{1+h^2}, \tag{1.29}$$

$$v_z = -\frac{eE}{m_e \nu_e}\frac{h}{1+h^2}, \tag{1.30}$$

gdzie $h = \Omega_e/\nu_e$ jest tzw. parametrem Halla, a $\Omega_e = eB/m_e$ częstotliwością cyklotronową elektronu. Dla $\nu_e \ll \Omega_e$ (co jest prawdą w obszarze przyspieszenia w silnikach Halla, gdzie parametr h jest większy niż 10^3), składowe prędkości elektronu równoległe do pola elektrycznego i do kierunku $E \times B$ można wyrazić w przybliżeniu [24]:

$$v_x = v_E \approx -\frac{1}{h}\frac{E}{B}, \tag{1.31}$$

$$v_z = v_{E\times B} \approx \frac{E}{B}. \tag{1.32}$$

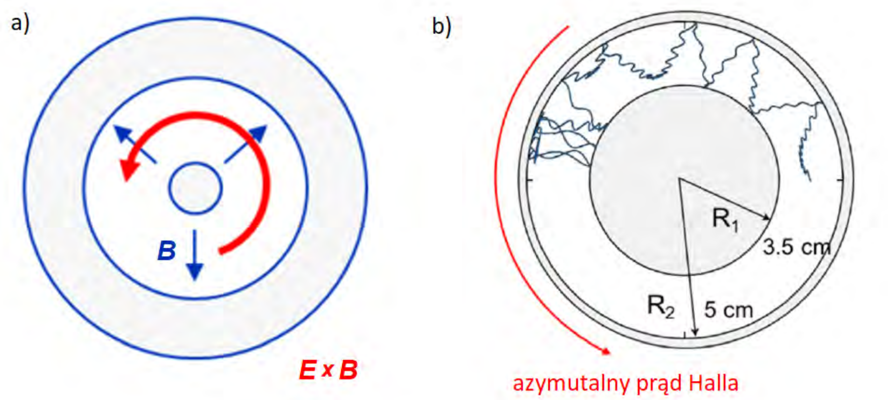
W przypadku braku pola magnetycznego ruchliwość elektronów w kierunku anody równoległa do pola elektrycznego wyraża się wzorem:

$$\mu_{e,E} = \left|\frac{v_x}{E}\right| = \frac{e}{m_e \nu_e}, \tag{1.33}$$

a w obecności pola magnetycznego ruchliwość ta jest silnie zmniejszona (podzielona przez współczynnik $1 + h^2 \approx h^2$):

$$\mu_{e,E} = \frac{1}{Bh}. \tag{1.34}$$

Klasyczny transport zderzeniowy pomiędzy elektronami i atomami omówiony powyżej nie jest jednak wystarczający do wyjaśnienia transportu elektronów w kierunku anody, ponieważ w silnikach Halla poważny wkład wnosi rozpraszanie elektronów na ścianach kanału prowadzące do transportu przyściennego. Efektywność rozpraszania zależy między innymi od stanu chropowatości powierzchni i w dużym stopniu od emisji wtórnej elektronów ze ściany (SEE, ang. *secondary electron emission*). Drugim istotnym czynnikiem jest transport anomalny elektronów uwarunkowany obecnością mikro-niestabilności i turbulencji w plazmie – w tym przypadku ruchliwość elektronów szacuje sie przez wyrażenie proporcjonalne do $1/B$, a nie do $1/B^2$ jak w przypadku transportu klasycznego [24]. Nie wiadomo, który z mechanizmów rozpraszania elektronów dominuje w poszczególnych konfiguracjach silników i w jakich warunkach pracy. Opracowanie w pełni spójnych modeli pozwalających przewidywać zachowania silników Halla jest zatem bardzo trudne [24].



Rysunek 1.9: a) Schemat obrazujący kierunek prądu Halla $E \times B$ w konfiguracji o zamkniętym dryfie. Na rysunku zazaczono radialne pole magnetyczne. b) Przykłady trajektorii elektronów uzyskane przez Boeufa dzięki scałkowaniu równań ruchu modelu hybrydowego (do zderzeń zastosowano metodę Monte Carlo, przy założeniu stałej obojętnej gęstości atomowej) [24].

Promień cyklotronowy elektronu r_e musi być mniejszy niż długość obszaru jonizacji L, liczonej wzdłuż osi kanału wyładowania, aby ruchliwość elektronów w kierunku anody była zmniejszona. Jest to długość, na której pole elektryczne i magnetyczne są skrzyżowane i na której dochodzi do jonizacji. Szerokość obszaru jonizacji jest natomiast równa szerokości kanału silnika. Zakładając, że prędkość elektronów charakteryzuje ich prędkość termiczna v_e, ich promień Larmora wyniesie [93]:

$$r_e = \frac{v_e}{\Omega_e} = \frac{1}{B}\sqrt{\frac{8}{\pi}\frac{m_e}{e}T_e} \ll L, \tag{1.35}$$

gdzie T_e to temperatura elektronów wyrażona w eV.

Elektrony wielokrotnie okrążają linie pola, zanim nastąpi zderzenie z atomem obojętnym lub jonem. Odpowiada to sytuacji, w której kwadrat parametru Halla jest znacznie większy od jedności [93]:

$$h^2 = \frac{\Omega_e^2}{\nu_e^2} \gg 1. \tag{1.36}$$

Z drugiej strony, długość obszaru jonizacji L powinna być znacznie mniejsza niż promień Larmora jonów r_i, aby jony mogły być przyspieszane wzdłuż osi silnika przez przyłożone pole elektryczne [93]:

$$L \ll \frac{1}{B}\sqrt{\frac{2m_i}{e}U_d} = \frac{m_i}{eB}\sqrt{\frac{2eU_d}{m_i}} = \frac{m_i v_i}{eB} = \frac{v_i}{\Omega_i} = r_i, \tag{1.37}$$

gdzie m_i oznacza masę jonu, Ω_i częstotliwość cyklotronową a v_i jego prędkość. Zatem długość obszaru jonizacji powinna się mieścić w zakresie:

$$r_e \ll L \ll r_i. \tag{1.38}$$

Czas, jaki elektron spędza na przejściu przez obszar jonizacji L od granicy katody o niskim potencjale do granicy anody o wysokim potencjale, jest określony przez ruchliwość elektronów w kierunku poprzecznym do pola magnetycznego $\mu_{e,x}$:

$$\tau_e \approx \frac{L}{v_e} = \frac{L}{\mu_{e,x} E_x} = \frac{L^2}{\mu_{e,x} U_d}. \tag{1.39}$$

Ruchliwość elektronów przy braku pola magnetycznego lub równoległa do tego pola wynosi $\mu_{e,E} = e/m_e \nu_e$. Długość obszaru jonizacji jest zatem znacznie większa niż promień cyklotronowy elektronu [104]:

$$L \approx r_e (v_e/v_i)^{1/2}. \tag{1.40}$$

Czas przejścia jonów przez strefę jonizacji jest wyrażony przez:

$$\tau_i \approx L/v_i. \tag{1.41}$$

Zakładając, że cały strumień atomów gazu zostanie zjonizowany i pomijając wkład jonów wielokrotnych, prąd jonowy w silniku Halla wynosi [24]:

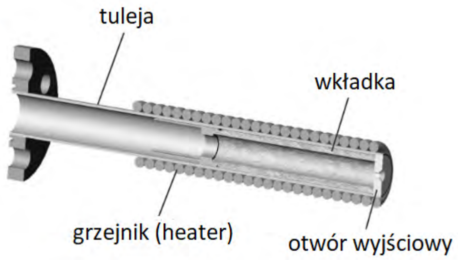
$$I_i = e \frac{\dot{m}_a}{m_i}, \tag{1.42}$$

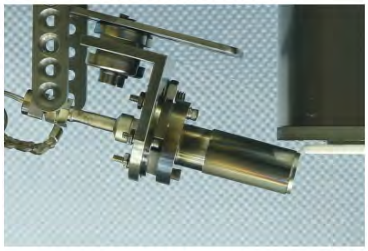
gdzie m_a to wydatek masowy gazu z anody.

Zderzenia elektronów ze ścianami kanału wyładowania silnika Halla były badane m. in. przez Boeufa [24]. Symulacje wykazały, że elektron podąża spiralną trajektorią wzdłuż linii pola magnetycznego (która jest radialna w obszarze wylotowym), zderza się ze ścianą i odbija, podążając inną spiralną trajektorią, która jest zwykle przesunięta w kierunku bardziej dodatniego potencjału, co powoduje, że elektron dryfuje w kierunku azymutalnym (patrz Rysunek 1.9 b). Ponieważ mechanizmy oddziaływania ze ściankami oraz pojawiające się niestabilności nie są dobrze określone, ich wkład do transportu jest często określany jako anomalny. Ponadto stwierdzono, że rozkłady osiowego prądu elektronowego mają maksymalne wartości w pobliżu ścian, co potwierdza znaczenie przewodności przyściennej [38]. Elektrony, które dotrą do anody są kierowane z powrotem do katody poprzez zewnętrzny obwód elektryczny.

Wybór odpowiedniej ceramiki do budowy napędu kosmicznego powinien uwzględniać jej należytą wytrzymałość mechaniczną, by mogła przetrwać wysokotemperaturowe i turbulentne środowisko startu, wystarczającą odporność na szok termiczny, aby wytrzymać rozruchy i przestoje oraz niski współczynnik rozpylania (ang. *sputtering*) dla jonów w celu utrzymania długiej żywotności. Poza tym ten materiał powinien charakteryzować się niską emisją wtórną elektronów – zderzenia elektronów i jonów ze ściankami generują niepożądane elektrony wtórne o niskiej energii, które obniżają temperaturę elektronów w plazmie wyładowania. Niska temperatura elektronów rozszerza strefę jonizacji, zbytnio spowalniając produkcję i przyspieszanie jonów [255]. Wiele wysiłku włożono w rozwój ceramiki, która jednocześnie spełnia te zróżnicowane wymagania [22, 93, 207].

Silniki Halla wymagają źródeł elektronów nie tylko do jonizacji gazu roboczego, ale również do neutralizacji dodatnio naładowanych jonów opuszczających silnik. W przypadku dużych ciągów, czyli wysokich prądów jonowych rzędu kilku amperów, które wymagają kompensacji, technologia neutralizatora z katodą wnękową jest obecnie jedynym

a) 

b) 

Rysunek 1.10: a) Typowa geometria katody wnękowej zbudowanej z metalowej rurki z wkładką emisyjną wewnątrz i grzałką na zewnątrz. (Rysunek reprodukowany z [93] i przetłumaczony.) b) Katoda HWPES-250 *HeatWave Labs Inc.*

rozwiązaniem. Typowa katoda tego typu składa się z pustej tulei posiadającej wkładkę w kształcie walca, otoczonej grzejnikiem zwanym *heaterem*, co przedstawia Rysunek 1.10. Wkładka stanowi aktywny emiter elektronów, a heater podnosi jej temperaturę do poziomu temperatur emisyjnych. Grzejnik zostaje wyłączony dopiero po zapaleniu wyładowania plazmowego wewnątrz katody. Katoda wyposażona jest również w dodatnio spolaryzowaną elektrodę zwaną *keeperem*. Główną rolą keepera jest ułatwienie rozruchu wyładowania, utrzymanie wystarczajacej temperatury oraz podtrzymywanie pracy katody podczas chwilowego przerwania działania silnika. Keeper chroni również katodę przed bombardowaniem jonami o wysokiej energii pochodzącymi z silnika, które mogą znacznie ograniczyć jej żywotność. Po przyłożeniu napięcia do anody elektrony są ekstrahowane przez odpowiedni otwór w keeperze i podążają w kierunku wlotu silnika.

Materiał wkładki znajdującej się w wydrążonej katodzie emituje elektrony przez emisję termoelektronową zgodnie z równaniem Richardsona - Dushmana [116]:

$$J_c = A_c T_w^2 exp\left(-\frac{eW}{k_B T_w}\right), \tag{1.43}$$

gdzie J_c to gęstość prądu, T_w temperatura wkładki, e ładunek elementarny, W praca wyjścia z materiału, a A_c stała materiałowa. Jednak w obecności silnych pól elektrycznych, które występują na powierzchni katody zmniejsza się bariera potencjału, którą muszą pokonać elektrony z pasma przewodnictwa, co skutkuje zmniejszoną pracą wyjścia. Jest to tzw. efekt Schottky'ego, który uwzględnia się w równaniu emisji przez dodanie członu opisującego wpływ powierzchniowego pola elektrycznego na gęstość prądu emisyjnego [201]:

$$J_c = A_c T_w^2 exp\left(-\frac{eW}{k_B T_w}\right) \exp\left(\frac{e}{k_B T_w}\sqrt{\frac{eE_c}{4\pi\epsilon_0}}\right), \tag{1.44}$$

gdzie E_c jest polem elektrycznym na powierzchni katody. Niska praca wyjścia w znacznym stopniu zwiększa emitowany prąd w danej temperaturze [93].

Materiał, z którego zbudowana jest katoda, jej umiejscowienie i struktura plazmy z niej wychodzącej w dużym stopniu determinują wydajność i żywotność samych silników. Wiadomo na przykład, że symetryczne położenie katody poprawia wydajność silnika, ale biorąc pod uwagę jej gabaryty nie zawsze można ją tak umieścić. Z różnych względów technicznych jak i ekonomicznych to samo paliwo jest używane zarówno w silniku, jak i w neutralizatorze.

1.1.5 Oscylacje plazmy w silnikach Halla

W silnikach Halla zidentyfikowano liczne oscylacje plazmy o szerokim zakresie charakterystycznych częstotliwości od kilku kHz do kilkudziesięciu MHz. Poniżej zostały wyodrębnione cztery główne typy tych oscylacji [24]:

1. Oscylacje azymutalne o małej długości fali, których częstotliwości znajdują się w zakresie 1–10 MHz, związane z niestabilnościami dryfu elektronów (EDI, ang. *Electron Drift Instabilities*).
2. Oscylacje czasu przejścia jonów w kierunku osiowym (ang. *transit time oscillations*) pojawiające się w zakresie częstotliwości 100–500 kHz.
3. Oscylacje azymutalne o niskiej kHz częstotliwości, zwane szprychami obrotowymi (ang. *rotating spokes*).
4. Nisko-częstotliwościowe oscylacje jonizacji o zakresie 10–40 kHz, które wynikają z okresowej zmienności procesu jonizacji gazu w obszarze największego pola magnetycznego.

Niestabilności dryfu elektronów Oscylacje związane z niestabilnością dryfu elektronów w kierunku $E \times B$, zostały najpierw przewidziane w teorii, a następnie zaobserwowane podczas symulacji cząstek w silniku.

Niestabilności i turbulencje pojawiają się w kierunku $E \times B$ najprawdopodobniej z powodu dużej różnicy prędkości dryfu elektronów i jonów. W artykule [67] pokazano, że EDI charakteryzuje się powstawaniem fali azymutalnej o długości w zakresie mm i prędkości rzędu prędkości akustycznej jonu. Fala ta zwiększa transport elektronów w kierunku prostopadłym do pola magnetycznego. Oscylacje propagują się z prędkością osiową wiązki jonów, zwykle od 15 do 20 km/s i poszerzają ich rozkład energii [26]. Ponadto EDI prowadzą do zwiększonej siły tarcia elektron-jon, która działa jako dodatkowy mechanizm utraty pędu [148]. Oscylacje te wzmacniają się wraz ze wzrostem radialnego pola magnetycznego B_r [50].

Oscylacje osiowe W silniku Halla pojawiają się niestabilności osiowe o zakresie częstotliwości 100 – 500 kHz, często nazywane *oscylacjami czasu przejścia jonów* [71], ze względu na to, że takie częstotliwości w przybliżeniu odpowiadają odwrotności czasu przejścia jonów przez obszar jonizacji. Badania wykazują, że w silniku Halla czas tranzytu jonów o prędkościach 10 km/s przez długość obszaru $L = 1$ cm jest rzędu 1 μs [24].

Oscylacje czasu przejścia jonów są quasi-osiowymi falami elektrostatycznymi o stosunkowo szerokim i mieszanym paśmie. Zwykle są stosunkowo turbulentne i przypuszcza się, że odgrywają ważną rolę w regulowaniu transportu plazmy. Ich znaczenie wzrasta wraz ze wzrostem radialnego pola magnetycznego B_r, a ich amplituda może sięgać nawet 30% napięcia wyładowania. Rozkład amplitudy oscylacji czasu przejścia w kanale silnika silnie zależy od profilu tego pola [17, 50].

Nisko-częstotliwościowe oscylacje azymutalne W silniku Halla wykryto również fluktuacje gęstości poruszające się azymutalnie w kierunku dryfu elektronów z prędkością fazową $0.2E/B$ [122]. Przy niskich napięciach wyładowania można zaobserwować niestabilność przypominającą z wyglądu obracające się szprychy (ang. *spoke*). Rotacja elektronów w pierścieniowym kanale wyładowania następuje w kierunku obwodowym i ma stałą prędkość:

$$v_\theta \approx c_v E_z / B_r, \tag{1.45}$$

gdzie c_v jest stałą o wartościach z przedziału $[0.4, 0.8]$ [71, 167].

Pomiary wykonane przez Michaela Sekeraka i in. w [205] pokazują, że prędkość szprychy odpowiada prędkości akustycznej jonów przy energiach elektronów około 5 eV. Oznacza to, że wirują one z prędkością od kilkuset do nawet kilku tysięcy metrów na sekundę. Badanie tej oscylacji wykazało, że szprycha posiada zwiększoną koncentrację zimnych elektronów i jest otoczona warstwą elektronów o wysokiej temperaturze [255]. Z przeprowadzonych pomiarów wywnioskowano, że około 50% prądu płynącego do anody jest przenoszone przez te obracające się szprychy.

Oscylacje jonizacji Fizyczne przyczyny oscylacji jonizacji o charakterystycznym zakresie częstotliwości 10 – 40 kHz są stosunkowo dobrze poznane. Ze względu na silną jonizację w obszarze dużego pola magnetycznego, front złożony z neutralnych atomów przesuwa się w kierunku anody (czyli do regioniu o niższym polu magnetycznym), gdzie jonizacja staje się mniej wydajna, ze względu na zwiekszoną ruchliwość zgodnie z kierunkiem strumienia $\vec{\Gamma}_{e,E}$ (Rysunek 1.7). Następnie neutralny front przesuwa się z powrotem w pobliże obszaru wyjścia z kanału, gdzie ponownie zachodzi jego intensywna jonizacja. Ze względu na podobieństwo do procesu nabierania i wydychania powietrza przez ludzki organizm, ten tryb oscylacji został nazwany trybem oddechowym (BM, ang. *breathing mode*) [25]. Okres oscylacji BM jest związany z czasem niezbędnym do uzupełnienia przez neutralne atomy gazu obszaru gdzie odbywa się jonizacja.

Oscylacje trybu oddechowego nie tylko zaburzają prąd wyładowania, ale również mają silny wpływ na gęstość plazmy w kanale wyładowania i w opuszczającej silnik wiązce plazmowej. Ponieważ odzwierciedlają one warunki pracy silnika Halla, stanowią głównie badany problem [239].

Mechanizm oscylacji o niskiej częstotliwości jest zwykle wyjaśniany za pomocą modelu typu drapieżnik-ofiara. Model ten bazuje na równaniach Lotki-Volterry i składa się z pary nieliniowych równań różniczkowych pierwszego rzędu, często używanych do opisu dynamiki układów biologicznych, w których oddziałują na siebie dwa gatunki, jeden jako drapieżnik, a drugi jako ofiara. Zostanie to omówione szerzej w rozdziale 2.2.2.

Jeden z pierwszych modeli zero-wymiarowych dotyczących trybu oddechowego opierający się na modelu drapieżnik-ofiara zaproponowali John Fife i in. w 1997 r. [75]. W ich modelu równania ciągłości dla jonów i atomów obojętnych podlegających transportowi ze stałą prędkością w obszarze jonizacji, gdzie uwzgledniono generowanie jonów i utratę atomów neutralnych w wyniku jonizacji, mają postać:

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} = n_i n_o \xi_{ion} - \frac{n_i v_i}{L} \tag{1.46}$$

oraz

$$\frac{\partial n_o}{\partial t} = -n_i n_o \xi_{ion} + \frac{n_o v_o}{L}, \tag{1.47}$$

gdzie n_i i n_0 są odpowiednio gęstościami jonów i cząstek neutralnych, ξ_{ion} współczynnikiem tempa jonizacji, v_i jest średnią osiową prędkością jonów, v_0 prędkością gazu obojętnego, a L długością strefy jonizacji.

Aby określić dynamiczny charakter pierwszego rzędu układu nieliniowego, należy przyjąć zaburzenia liniowe w postaci:

$$n_i = n_{i,0} + n_i^{'} \tag{1.48}$$

$$n_0 = n_{0,0} + n_0^{'} \tag{1.49}$$

gdzie $n_i^{'}$ i $n_0^{'}$ są zaburzeniami.

Zerowy rząd przybliżenia wynosi:

$$\xi_{ion} n_{0,0} = \frac{v_i}{L}, \tag{1.50}$$

$$\xi_{ion} n_{i,0} = \frac{v_0}{L}, \tag{1.51}$$

co wymaga aby:

$$\frac{n_{i,0}}{n_{0,0}} = \frac{v_0}{v_i}. \tag{1.52}$$

Z powyższego wynika, że skoro $v_0 \ll v_i$, stopień jonizacji musi być w tym rejonie niski. Z równań 1.50 i 1.51 otrzymuje się:

$$\frac{\partial n_i'}{\partial t} = n_{i,0} n_0' \xi_{ion} \tag{1.53}$$

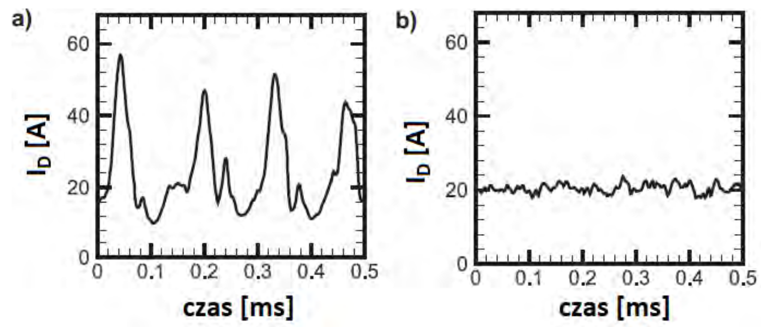
$$\frac{\partial n_0'}{\partial t} = -n_i' n_{0,0} \xi_{ion} \tag{1.54}$$

co można zapisać w różnoważnej formie:

$$\frac{\partial^2 n_i^{'}}{\partial t^2} = -n_{i,0} n_{0,0} n_i^{'} \xi_{ion}^2, \tag{1.55}$$

która reprezentuje nietłumiony oscylator harmoniczny o częstotliwości określonej przez [15, 51, 75, 174]:

$$f_i = \frac{1}{2\pi}\sqrt{n_{i,0} n_{0,0} \xi_{ion}^2} \approx \frac{\sqrt{v_i v_0}}{2\pi L}. \tag{1.56}$$



Rysunek 1.11: Dwa tryby oscylacji: a) tryb globalny, b) tryb lokalny. Przebiegi zostały zarejestrowane przez Kentaro Harę podczas eksperymentu z silnikiem Halla H6 [108].

Zatem w modelu Fifa i in. [75] charakter oscylacji o niskiej częstotliwości jest związany z prędkościami jonów i atomów neutralnych w stosunku do długości strefy jonizacji.

W 2011 r. Wang i in. [239] zaproponowali uzupełnienie powyższego modelu efektami związanymi ze zmieniającym się polem elektrycznym. Pole to odzwierciedla oddziaływanie strefy jonizacji ze strefą przyspieszenia. Ich model przedstawiają równania [239]:

$$\frac{\partial n_0}{\partial t} + \frac{\partial (n_0 v_0)}{\partial x} = -\xi_{ion} n_0 n_i, \tag{1.57}$$

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \frac{\partial (n_i v_i)}{\partial x} = \xi_{ion} n_0 n_i, \tag{1.58}$$

$$\frac{\partial (n_i v_i)}{\partial t} + \frac{\partial (n_i v_i^2)}{\partial x} = \frac{e n_i}{m_i} E(x) + \xi_{ion} n_0 n_i v_0, \tag{1.59}$$

gdzie $E(x)$ określa pole elektryczne.

Przedstawiony powyżej model stanowi jeden z bardzo wielu wariantów modyfikacji równań Lotki-Volterry. Jakościowe cechy trybu oddechowego są odtwarzane przez większość symulacji numerycznych, niezależnie od ich modelu podstawowego (płynowego [3, 4, 55, 129, 147], kinetycznego [19] lub hybrydowego [25, 74, 75]).

Nawet nieznaczne wahania przepływu masowego gazu, napięcia wyładowania i wielkości pola magnetycznego mogą spowodować znaczną zmianę charakteru oscylacji prądu wyładowania, co jest interpretowane jako przejście między tzw. modem globalnym, gdzie dominuje tryb oddechowy o wysokiej amplitudzie oscylacji, a nisko-amplitudowym modem lokalnym [107, 145, 204], których przykłady umieszczono na Rysunku 1.11. Zmiany pomiędzy dwoma trybami działania silnika nie są monotoniczne i są powszechnie obserwowane w silnikach Halla [203, 204].

Yongjie Ding i in. w [66] prowadząc badania nad silnikiem Halla zmieniali topografię pola magnetycznego przy zachowaniu stałych innych parametrów operacyjnych silnika i zauważyli, że po przejściu do trybu globalnego wiązka plazmowa zmienia swój kształ z bardziej skupionego na rozszerzony, w sposób zauważalny rośnie średni prąd wyładowania i/lub amplituda tego prądu, co skutkuje pogorszeniem pracy silnika [145]. Z powodu tego pogorszenia przejście między trybami nazwali katastrofą.

Według Pagnona i in. [183] tryb globalny nie tylko ma negatywny wpływ na jednostkę zasilającą, ale również powoduje większą erozję kanału wyładowania, co skraca długość życia silnika [85]. Kentaro Hara i in. [108] zauważyli, że w trybie globalnym plazma oscyluje zgodnie w całym kanale wyładowania, a nisko-częstotliwościowe oscylacje azymutalne są albo nieobecne, albo nieistotne. Amplitudy oscylacji w tym trybie mogą wynosić nawet 100 % wartości średniej, zatem jest to mod wysoko-amplitudowy. W trybie lokalnym oprócz trybu oddechowego duży wpływ na prąd wyładowania wnoszą oscylacje azymutalne rozchodzące się w kierunku $E \times B$, ponieważ amplitudy tych oscylacji zwykle wynoszą $10 - 20$ % wartości średniej, tryb lokalny jest nisko-amplitudowy [108]. Przejścia między trybami mogą być kontrolowane przez zmianę parametrów operacyjnych silnika takich jak napięcie wyładowania, ale również mogą się pojawić samorzutnie dzięki wzrostowi temperatury obwodu magnetycznego [123].

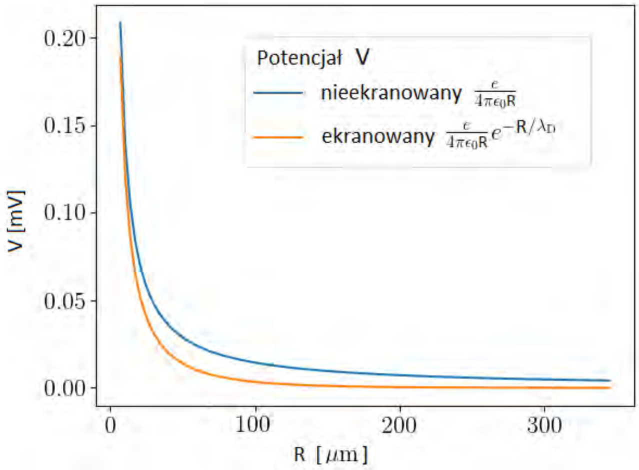
1.2 Sondy elektryczne

Ciśnienie panujące w środowisku testowym ma silny wpływ na wytwarzaną wiązkę plazmową, ale w praktyce wynikające z tego błędy pomiaru można łagodzić dzięki starannemu zaprojektowaniu sond [34]. W rozdziale 1.2.1 opisano najpierw środowisko plazmowe i jego wpływ na aparaturę pomiarową, a w rozdziale 1.2.2 przedstawiono sondy elektryczne rekomendowane dla silników Halla wraz z zaleceniami przydatnymi przy ich konstruowaniu.

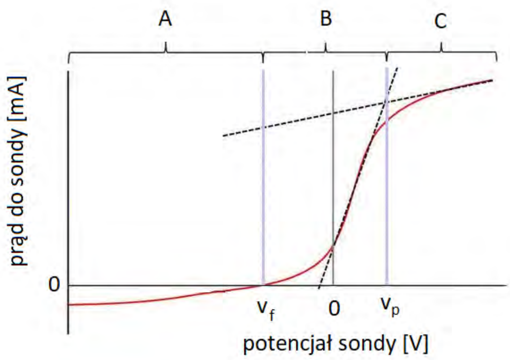
1.2.1 Środowisko plazmowe i jego wpływ na aparaturę pomiarową

Plazma, zwana czwartym stanem materii, jest quasi-neutralną mieszaniną dodatnio i ujemnie naładowanych cząstek. Pomimo, że cząstki te wydają się być niezależne, wykazuje ona zachowanie kolektywne, co objawia się np. tym, że lokalne fluktuacje potencjału są ekranowane na tzw. długości Debye'a (wzór 1.27), zatem nie mają wpływu na plazmę w makroskopowej skali. Efekt jaki ekranowanie wprowadza do potencjału elektrycznego został pokazany na Rysunku 1.12. Z pewną korzyścią dla napędów elektrycznych, plazma silnie oddziałuje z polem elektrycznym i magnetycznym oraz jest bardzo dobrym przewodnikiem elektrycznym.

Przy projektowaniu sond należy zdawać sobie sprawę, że każdy przemiot wystawiony na działanie plazmy, będzie wytwarzał wokół siebie warstwę elektrostatyczną (ang. *sheath*) stanowiącą obszar przejściowy, w którym neutralność plazmy jest zaburzona. Utworzona warstwa będzie ekranować ów przedmiot od głównej części plazmy. Jeśli przedmiotem tym jest elektroda spolaryzowana ujemnie względem potencjału plazmy, to zacznie ona przyciągać jony dodatnie i odpychać elektrony. W pobliżu elektrody nastąpi zubożenie obu rodzajów cząstek, ale w różnym tempie – elektrony szybciej opuszczą obszar zubożenia i stworzona warstwa będzie naładowana dodatnio. W rezultacie będzie ona ekranować ujemnie naładowaną elektrodę. To tzw. ekranowanie Debye'a spowoduje, że tylko cząstki ujemne o wystarczająco wysokiej energii kinetycznej zdołają pokonać spadek



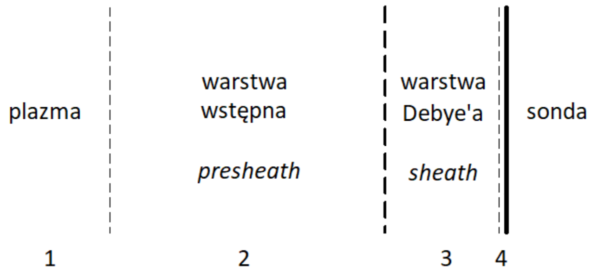
Rysunek 1.12: Ilustracja zjawiska ekranowania, które wprowadza dodatkowy czynnik w równaniu na potencjał elektryczny plazmy, gdzie λ_D jest długością Debye'a, e oznacza ładunek elementarny, ϵ_0 przenikalność elektryczną próżni, a R odległość od sondy.



Rysunek 1.13: Charakterystyka prądowo-napięciowa dla sondy wstawionej w środowisko plazmowe, gdzie V_f – potencjał pływający, V_p – potencjał plazmy [95]. Charakterystyka ta nazywana jest *charakterystyką I-V*, gdzie prąd I jest wyświetlany w funkcji napięcia oznaczonego jako V.

potencjału w warstwie i trafić do elektrody. Natomiast elektrony o niskich energiach nie będą w stanie do niej dotrzeć.

Gdyby w sposób ciągły począwszy od dużych wartości ujemnych zwiększać napięcie na sondzie wprowadzonej w środowisko plazmowe, w pierwszym regionie, zaznaczonym na Rysunku 1.13 literą A, sonda byłaby spolaryzowana silnie ujemnie względem potencjału plazmy, czyli żadne elektrony nie byłyby w stanie do niej dotrzeć. Przyciągane by były za to jony dodatnie. Im napięcie byłoby niższe tym więcej jonów pozostałoby zebranych i tym bardziej warstwa ekranująca zwiększyłaby swoją objętość. Zwiększając dalej napięcie na sondzie w rejonie przejściowym, reprezentowanym przez literę B, elektrony o odpowiednio wysokiej energii kinetycznej mogłyby już dotrzeć do sondy. W ostatnim obszarze, gdzie sonda byłaby spolaryzowana mocno dodatnio (patrz Rysunek 1.13 C), odpychane byłyby



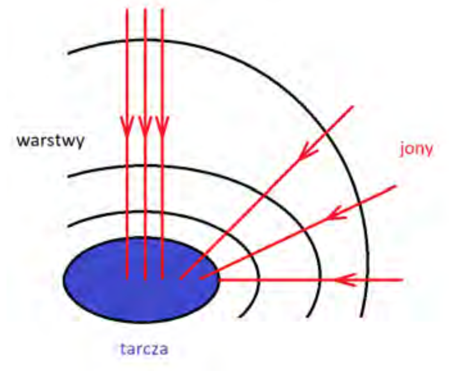
Rysunek 1.14: Zniekształcenie w potencjale plazmy wywołane przez obecność ujemnie spolaryzowanej sondy zostaje osłonięte warstwą dodatniego ładunku przestrzennego (*sheath*) [192]. Rysunek przedstawia schematyczne umieszczenie powstających wartstw.

wszystkie jony, a przyciągane elektrony. Dalszy wzrost napięcia polaryzującego znów spowodowałby znaczną ekspansję warstwy ekranującej.

Z powyższego wynika, że objętość warstwy ekranującej rośnie wraz ze wzrostem różnicy potencjałów między plazmą a sondą, a jej wzrost jest szczególnie widoczny dla silnie dodatnich polaryzacji sondy. W momencie gdy potencjał sondy zbliży się do potencjału plazmy, warstwa ekranująca sondę maksymalnie się skurczy.

Dwa miejsca na omówionej powyżej charakterystyce prądowo-napięciowej są szczególnie ważne. Pierwsze, oznaczone jako V_f, znajduje się na charakterystyce tam, gdzie następuje zrównanie prądu jonowego i elektronowego płynących do sondy. Jest to tzw. potencjał pływający (ang. *floating potential*), dla którego całkowity prąd płynący do sondy jest równy zeru. Można powiedzieć, że tak spolaryzowana elektroda staje się niejako „niewidoczna" dla naładowanych cząstek znajdujących się w plazmie. Efekt ten wykorzystuje się przy budowie pewnych elementów sond elektrycznych, można np. korpus sondy zostawić na potencjale pływającym, aby nie zaburzyć trajektorii cząstek wchodzących do jej wnętrza. Wartość potencjału pływającego zależy od geometrii sondy, zatem w tym wypadku nie jest ona ścisłym parametrem plazmy. Drugie miejsce oznaczone jako V_p występuje w punkcie przegięcia charakterystyki, co obrazują dwie przerywane linie widoczne na Rysunku 1.13, i jest spowodowane zrównaniem się polaryzacji sondy z potencjałem plazmy. W tym momencie żadne z cząstek nie są ani odpychane ani przyciągane do sondy.

Chociaż potencjał przestrzenny zmienia się płynnie pomiędzy plazmą a sondą, zwykle dla wygody dzieli się go na kilka obszarów. Najbliżej powierzchni sondy znajduje się niewielki obszar oznaczony na Rysunku 1.14 numerem 4, w którym gęstość elektronowa n_e jest pomijalna. Potem występuje tzw. elektrostatyczna warstwa Debye'a, oznaczona numerem 3, w której gęstość elektronowa n_e maleje wykładniczo z potencjałem V w miarę oddalania się od sondy. Na krawędzi tej warstwy zachodzi quasi-neutralność, czyli $n_e \approx n_i$. Tutaj rozkład elektronów jest izotropowy (z wyjątkiem nielicznych bardziej energetycznych elektronów, które wciąż mogą dotrzeć do sondy), a jony poruszają się w jednym kierunku, ponieważ z założenia sonda ma absorbować wszystkie przychodzące jony. Aby jednak osiągnąć ten stan, musi istnieć obszar wstępny (ang. *presheath*) oznaczony nume-



Rysunek 1.15: Schemat przedstawia kierunki ruchu jonów (kolor czerwony), które padają na płaską tarczę przewodzącą (kolor niebieski). Fragmenty czarnych krzywych symbolizują kształty poszczególnych warstw elektrostatycznych. [157]

rem 2, w którym niewielkie pole elektryczne przyspiesza jony do ich prędkości akustycznej c_s (jest to minimalna wymagana prędkość dla utworzenia warstwy ekranującej[2]). Powyżej tego obszaru znajduje się główna część plazmy oznaczona numerem 1, która jest neutralna i znajduje się na tyle daleko od sondy, że nie odczuwa ona pola elektrycznego przez nią wprowadzonego. Warstwa Debye'a jest zwykle grubsza niż region „jonowy" (4) znajdujący się najbliżej sondy, a obszar presheath jest znacznie grubszy niż oba te obszary [46].

Obwiednie warstw znajdujących się najbliżej sondy przyjmują kształt elipsoidalny wydłużony wzdłuż płaszczyzny tarczy stanowiącej powierzchnię zbierającą sondy, następnie w odległości około jednej średnicy od tej tarczy przechodzą w kształt kulisty [157], co w ogólnym zarysie prezentuje Rysunek 1.15. Kierunki ruchu jonów są prostopadłe do lokalnej powierzchni warstwy. Jony wchodzące pod kątami ostrymi są częściej rozpraszane (ang. *sputtering*) niż zbierane przez kolektor i penetrują jego płytsze głębokości. Jeśli stosunek promienia kolektora danej sondy do długości Debye'a zostanie niewłaściwie dobrany, warstwa elektrostatyczna przy powierzchni kolektora rozszerzy się jako spłaszczona elipsoida i zwiększy się efektywny obszar zbierania jonów.

Kolejnym aspektem, o którym należy pamiętać projektując sondy jest to, że wiązka plazmowa pochodząca z silnika Halla posiada swój rozkład gęstości jonowej oraz, że istnieje silne podrzędne źródło jonów, a są nim reakcje wymiany ładunku (CEX, ang. *charge exchange*). Wysokoenergetyczne jony pochodzące z wiązki mogą wymieniać ładunki z gazem obojętnym tworzonym przez niezjonizowane cząstki opuszczające zarówno silnik jak i neutralizator (katodę) oraz, w przypadku pomiarów laboratoryjnych, z gazowym tłem resztkowym obecnym w komorze próżniowej. Cząstki neutralne pochodzące z gazowego tła mogą zderzać się z wiązką plazmową, w wyniku czego dominującą interakcją będą zderzenia wymiany ładunku jonowo-obojętnego [31]. Zderzenia te generują cząstki neu-

[2] Warunkiem koniecznym do powstania cienkiej warstwy ekranującej jest słuszność kryterium Bohma, które w najprostszej postaci wymaga, aby jony wnikały w obszar warstwy z co najmniej prędkością fal akustycznych. Aby spełnić ten warunek, jony muszą zostać wstępnie przyspieszone w quasi-neutralnym obszarze presheath [192].

tralne o dużej prędkości oraz rozproszone jony o niskiej energii, co podnosi gęstość prądu jonowego na obrzeżach strumienia plazmy, zwiększając w ten sposób dywergencję wiązki. Kolizje CEX wpływają zwłaszcza na wiązkę plazmową tzw. bliskiego pola[3] [31, 34]. Analizy procesów zderzeniowych w strumieniu plazmy wskazują, że zderzenia między jonami wiązki a cząstkami obojętnymi z komory próżniowej dominują nad zderzeniami jonów z cząstkami neutralnymi pochodzącymi z silnika oraz ich oddziaływaniami kulombowskimi z elektronami i jonami [8].

Wiązka jonów zmienia się w czasie i w przestrzeni – zmianie ulegają rozkład energii jonów jak i poziomy jonizacji cząstek. Jony niskoenergetyczne pochodzące z wymiany ładunkowej przemieszczają się pod dużymi kątami w stosunku do osi silnika. Wraz z podwyższonym napięciem wyładowania, energia tych rozproszonych jonów może stać się znacząca [93]. Rozproszone jony poruszają się w lokalnych polach elektrycznych oraz mogą płynąć wstecznie do silnika lub przemieszczać się promieniowo pod dużymi kątami w stosunku do osi silnika i w przyszłości bombardować elementy statku kosmicznego znajdujące się w pobliżu. Ponadto jony wysokoenergetyczne również mogą być generowane pod dużymi kątami od osi silnika ze względu na duże gradienty gęstości na krawędzi obszaru przyspieszenia lub ze względu na rozpraszanie jonów wiązki z gazowym tłem resztkowym znajdującym się w komorze próżniowej.

Zatem przeprowadzając eksperyment należy zdawać sobie sprawę, że warunki panujące w komorze próżniowej będą wpływały zarówno na działanie silnika, jak i na powstającą wiązkę plazmową. Efekty takie jak występowanie cząstek neutralnych w tle, rozpylanie (ang. *sputtering*) z powierzchni komory próżniowej, pojawianie się gradientów ciśnienia spowodowanych konfiguracją samej komory próżniowej, jak i z powodu pompowania oraz uziemienie elektryczne obwodu silnika pozostają nieodłącznie związane z badaniami naziemnymi.

Chociaż kolektor sondy jest zwykle wykonany z materiału o niskiej wydajności emisji wtórnej elektronów SEE, obecność tej emisji wciąż ma znaczący wpływ na mierzony prąd jonowy. Elektrony pochodzące z emisji wtórnej powstałe na ujemnie spolaryzowanej powierzchni kolektora będą się przemieszczać w kierunku przeciwnym do sondy, co sztucznie zwiększy mierzony prąd. Brak korekty pomiarów może prowadzić do przeszacowania lokalnej gęstości prądu jonowego o 5 do 10 % [34]. Dobór materiałów ma kluczowe znaczenie, zwłaszcza w przypadku kolektora jonów i kolimatora. Poza niską wtórną emisją elektronów materiały te muszą także wytrzymywać bombardowanie szybkimi jonami, musi występować niskie prawdopodobieństwo odbicia jonu, a rekombinacja jonów (neutralizacja) na powierzchni musi być wysoka [166].

Prąd zebranych jonów należy zawsze poddać starannej ocenie, po pierwsze ze względu na otaczającą plazmę, a po drugie na warstwę powstającą na kolektorze. Prąd jonowy płynący do sondy może sztucznie wzrosnąć w przypadku podwyższonego ciśnienia tła (w ten sposób sonda mierzyłaby sztucznie wysoką gęstość prądu jonowego). Należy więc zadbać o to, aby ciśnienie w komorze próżniowej podczas pomiarów sondą było możliwie

[3]Pole bliskie, w odróżnieniu od dalekiego, definiuje się jako obszar, w którym odległość sondy od osi akceleratora jest mniejsza niż cztery średnice kanału wylotowego silnika.

jak najniższe [166]. Trzeba je też stale monitorować [58]. Chociaż podwyższone ciśnienie prowadzi do zwiększonego rozpraszania jonów na obrzeżu wiązki (od około 40° mierząc od linii środkowej) i zwiększenia rozbieżności wiązki plazmowej, działanie silnika i towarzyszące mu oscylacje nie zmieniają się znacząco wraz ze zmianami ciśnienia tła [34].

Silnik wydziela również swoje zanieczyszczenia związane ze zużyciem poszczególnych elementów. Może to być spowodowane rozpylaniem elektrod, degradacją materiałów tworzących katodę lub erozją kanału ceramicznego. Przy wysokiej eksploatacji silnika podczas testów laboratoryjnych przeprowadzanych w IFPiLM nastawionych na optymalizację warunków pracy, kanał wyładowania uległ znacznej degradacji. Podczas jednej z sesji pomiarowych Grupa Akceleratorów Plazmowych zaobserwowała pojawienie się iskier złożonych ze zdegradowanych elementów silnika. Część materiału pochodzącego z zanieczyszczeń niestety będzie w przyszłości osadzać się na powierzchni statku kosmicznego, co z czasem spowoduje zmianę właściwości powierzchni, takich jak emisyjność czy przezroczystość.

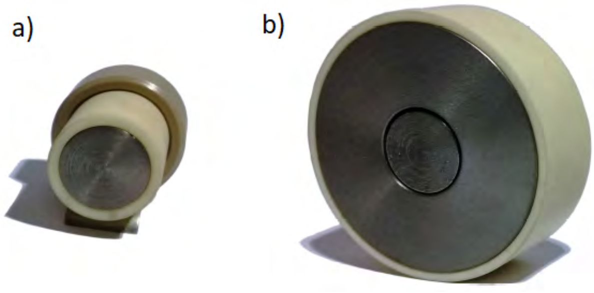
Z biegiem czasu na sondzie będą się osadzały różnego typu zanieczyszczenia pochodzące z materiałów użytych do budowy silnika, katody, oraz komory próżniowej i elementów w niej umieszczonych takich jak waga aerodynamiczna czy ramię diagnostyczne. Napylanie materiałów dielektrycznych lub przewodzących może wpływać na jakość zbierania jonów przez sondę. Może np. wystąpić upływ prądu z kolektora albo inne niepożądane zjawiska [34, 230, 256].

Preferowana jest duża komora próżniowa, to znaczy taka, w której średnica silnika będzie dużo mniejsza od promienia i długości komory. Ponadto ściany komory powinny być uziemione. Przed przystąpieniem do eksperymentów należy dokładnie sprawdzić ustawienie instrumentów pomiarowych względem położenia silnika. Wymagany jest też wysoki poziom czystości tych przyrządów. Izolację elektryczną należy zawsze sprawdzić przed i po przeprowadzonych pomiarach. Cały przewód elektryczny powinien być chroniony przed plazmą. Odpowiednia konstrukcja wspornika sondy i ramienia obrotowego ma kluczowe znaczenie: interakcje ze strumieniem plazmy muszą zostać zminimalizowane. Obrót sond wokół silnika powinien być dość szybki, aby zmniejszyć ekspozycję sondy na wiązkę szybkich jonów [166].

Podczas zbierania przebiegów prądowych silnik powinien pracować w stanie ustalonym (tzn. w stanie równowagi cieplnej głównych elementów, stabilnego prądu wyładowania i widma mocy) [166]. Tylko wtedy można przeprowadzić rzetelną analizę wydajności dla zadanych warunków operacyjnych pracy silnika.

1.2.2 Główne typy sond

W najprostszej postaci sonda przeznaczona do zbierania jonów składa się z elektrody, zwanej kolektorem, spolaryzowanej ujemnie w stosunku do potencjału plazmy. Na przestrzeni lat wprowadzano jednak liczne ulepszenia. Bogatsze konfiguracje wykorzystują kolimatory, pierścienie ochronne lub spolaryzowane siatki służące do filtrowania naładowanych cząstek. Modyfikacje mają np. na celu utworzenie jednolitej warstwy elektrostatycznej na kolektorze i uniknięcie zbierania jonów z tła, takich jak te pochodzące z wymiany ładunkowej [28, 115, 195].



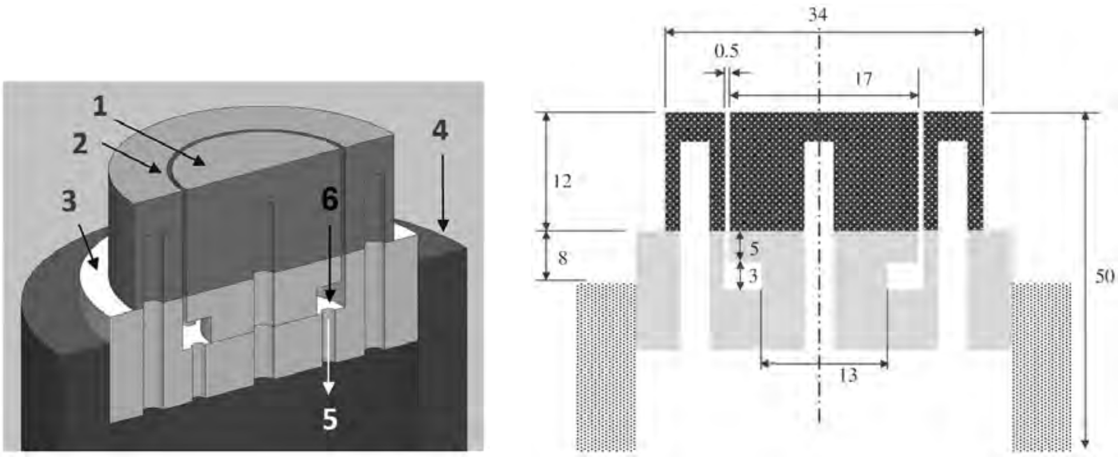
Rysunek 1.16: Porównanie konstrukcji dwóch sond: a) sonda płaska stanowiąca molibdenowy dysk o średnicy 15 mm i grubości 3 mm, zamknięty w cylindrze z tlenku glinu [166], b) sonda płaska z pierścieniem ochronnym o tej samej grubości i średnicy kolektora, rekomendowana przez Mazuffre'a i in. w artykule [166].

Sonda Płaska Jak przedstawiono na Rysunku 1.16 a) sonda płaska posiada nieskomplikowaną budowę – jest to zwyczajna płyta przewodząca, której grubość jest pomijalna w odniesieniu do długości i szerokości. Niemniej jednak podczas konstrukcji nawet takiej prostej sondy, należy trzymać się szeregu zaleceń. Przednia powierzchnia kolektora powinna być idealnie wyrównana z krawędziami otaczającego go cylindra ceramicznego, aby uniknąć gromadzenia się prądu po bokach kolektora, a tym samym zwiększenia powierzchni obszaru zbierania jonów. W celu zmniejszenia chropowatości powierzchni, wprowadzającej niepożądane zaburzenia, kolektor w postaci dysku należy wypolerować. Mimo tych zabiegów, okazuje się jednak, że sonda płaska nie jest odpowiednia do pomiaru gęstości prądu jonowego, ponieważ pozostaje wrażliwa na rozszerzanie się warstwy elektrostatycznej wytworzonej nad powierzchnią sondy [166].

Sonda Faraday'a (FP) Druga sonda jest bardziej skomplikowana, ponieważ oprócz kolektora jonów zawiera również otaczający go pierścień. Głównym celem pierścienia przewodzącego jest utrzymanie warstwy elektrostatycznej na kolektorze w taki sposób, aby obszar zbierania dokładnie odpowiadał obszarowi geometrycznemu kolektora, co nie ma miejsca w przypadku poprzedniej sondy ze względu na ekspansję warstwy elektrostatycznej [46, 94, 119, 154].

Typowa sonda Faraday'a, oprócz kolektora i pierścienia ochronnego, składa się z izolatora ceramicznego, obudowy oraz niezbędnych elementów mocujących i przewodów elektrycznych. Ważne jest, aby kolektor i pierścień ochronny były wykonane z metalu o niskiej podatności na rozpylanie i niskiej emisji wtórnej elektronów, takiego jak molibden, wolfram lub grafit [29, 252]. Przy tym, do ich budowy należy stosować surowce o wysokiej czystości ($\geq 99\%$). Ponadto kolektor i pierścień ochronny powinny być wykonane z tego samego surowca, aby zminimalizować różnice związane z właściwościami materiałowymi, takimi jak emisja SEE i emisja termoelektryczna [166].

Kolejną kwestią jest szerokość pierścienia ochronnego, która musi być zgodna z rozmiarami lokalnej warstwy elektrostatycznej, aby wyeliminować efekty krawędziowe. Poza tym kolektor powinien być jak najcieńszy, aby zapobiec gromadzeniu się prądu jono-



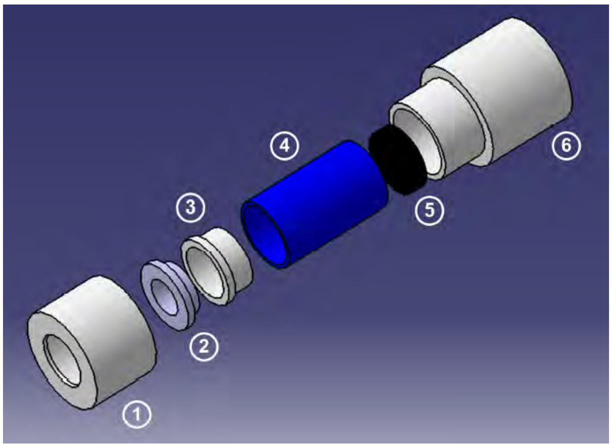
Rysunek 1.17: Jedna z rekomendowanych konstrukcji sondy Faraday'a zaproponowana przez Browna i in. [34]. Po lewej zaznaczono najważniejsze elementy sondy: 1 – kolektor, 2 – pierścień, 3 – izolator, 4 – obudowa, 5 – otwory wentylacyjne, 6 – komory u podstawy izolatora. Po prawej podano proponowane wymiary sondy w mm. (Szerokość szczeliny została ustawiona na 0.5 mm, co jest odpowiednie dla λ_D większej niż 0.05 mm.)

wego na jego bocznej powierzchni [30], a jego średnica powinna być określana w oparciu o oczekiwany zakres gęstości przestrzennej prądu jonowego, pamiętając również o tym, że mniejszy przekrój sondy zmniejsza jej nagrzewanie i mniej zakłóca pracę silnika [34]. Kolektor i pierścień nie mogą być ze sobą elektrycznie połączone (muszą posiadać swoje własne połączenia elektryczne do polaryzacji). Zastosowanie odpowiednio głębokiej szczeliny między kolektorem a pierścieniem ochronnym zmniejsza niebezpieczeństwo zwarcia między kolektorem a pierścieniem w wyniku napylania materiału [166]. Szerokość tej szczeliny powinna być mniejsza niż 5 do 10 długości Debye'a, aby utworzyć płaską, jednolitą warstwę elektrostatyczną na powierzchni kolektora [30]. Wartość λ_D jest najniższa dla najwyższego prądu jonowego docierającego do sondy, ta wartość powinna być używana do skalowania szerokości szczeliny [34].

Poza tym napięcie przykładane do sondy również musi zostać odpowiednio dobrane. Zbyt ujemna wartość zmodyfikowałaby rozkład potencjału w warstwie, co z kolei zmieniłoby trajektorie jonów w pobliżu sondy [236].

Projekt jednej z konfiguracji sondy płaskiej z pierścieniem ochronnym wzięty z artykułu Mazuffre i in. [166] został umieszczony na Rysunku 1.16 b). Tutaj kolektor w kształcie dysku o grubości 1 mm jest otoczony molibdenowym pierścieniem o szerokości 15 mm. Odstęp między tymi dwiema częściami wynosi 0.5 mm szerokości i 10 mm głębokości. Pierścień ochronny został zamknięty w cylindrze z tlenku glinu. Średnica zewnętrzna całej sondy wynosi 50 mm, a jej długość 18 mm.

Rysunek 1.17 przedstawia projekt sondy rekomendowany przez Browna i in. w [34]. W tym przypadku izolator dodatkowo posiada niewielkie komory połączone z otworami wentylacyjnymi, kórych celem jest zmniejszenie gromadzenia się osadzonego materiału, a tym samym zmniejszenie możliwości wystąpienia prądu upływowego spowodowanego



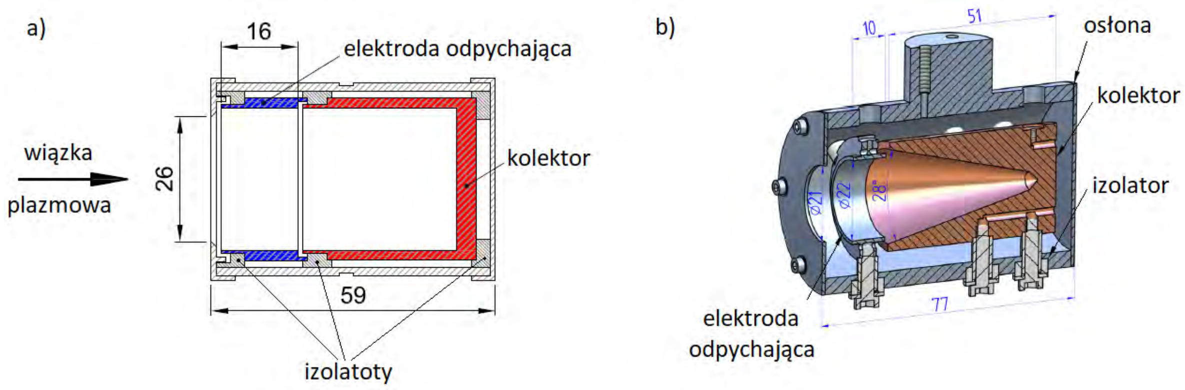
Rysunek 1.18: Rozłożony na części kubek Faraday'a. Numery oznaczają odpowiednio: 1 – izolator czołowy, 2 – elektroda tłumiąca, 3 – izolator między elektrodą a kolektorem, 4 – skolimowana część kolektora, 5 – kolektor płaski, 6 – izolator tylny [166].

powstaniem ścieżki przewodzącej między kolektorem a pierścieniem ochronnym. Izolator rozciąga się przed obudową sondy w celu zmniejszenia osadzania i możliwości powstania ścieżki prądowej w poprzek powierzchni izolatora między pierścieniem ochronnym a przewodzącą obudową sondy. Natomiast otwory wentylacyjne znajdujące się u podstawy izolatora ceramicznego zostały umieszczone w celu zmniejszenia gromadzenia się cząstek obojętnych w szczelinie.

Kubek Faraday'a (FC) Kubek Faraday'a jest sondą płaską zamkniętą w długiej tubie, co powoduje, że w przeciwieństwie do sondy Faraday'a FP, efekty krawędziowe spowodowane tworzeniem warstwy elektrostatycznej powinny być pomijalne. Ograniczenie strumienia jonów ma też dodatkową zaletę – pozwala uniknąć zjawiska nasycenia sygnału, mogącego wystąpić, gdy sonda jest umieszczona w środku wiązki plazmowej [166]. Poza tym mały rozmiar sondy zmniejszy ilość napylanego materiału pochodzącego z oddziaływania jonów z elementami znajdującymi się w komorze próżniowej. Posiadanie wąskiej apertury ma jednak niekorzystną konsekwencję: jony, które nie są współbieżne z osią sondy nie są zbierane, co oznacza, że lokalny prąd jonowy zostaje niedoszacowany. W praktyce średnica kolektora dobierana jest w zależności od wielkości badanego medium [166].

Długość kubka Faraday'a powinna być większa niż grubość przestrzennej warstwy ładunku wewnątrz sondy, by wyniki pomiarów były niewrażliwe na lokalne właściwości plazmy [166]. Ponadto głęboki kolektor charakteryzuje się najmniejszą emisją wtórną elektronów [184]: cylindryczna geometria pozwala na wychwycenie większości elektronów wtórnych emitowanych przez powierzchnię kolektora. Ponieważ kolimator jest pozostawiony na potencjale pływającym nie zaburza pomiarów prądu jonowego [166].

W artykule [166] umieszczono sugestię w jaki sposób powinien zostać zbudowany poprawnie działający kubek Faraday'a, co zostało zilustrowane na Rysunku 1.18. FC składa



Rysunek 1.19: Przykłady innych rozwiązań stosowanych w przypadku kubka Faraday'a: a) sonda wyposażona w elektrodę odpychającą ekektrony [42, 215], b) sonda z elektrodą odpychającą oraz kolektorem w kształcie stożka [61, 109].

się tutaj z sześciu różnych części. Przednia i tylna część zewnętrznego izolatora elektrycznego wykonana została z tworzywa PEEK (polieteroeteroketon, polimer kompatybilny z próżnią, co oznacza, że materiał ten uwalnia niewielkie ilości gazu w próżni). Kolimator służy do zmniejszenia ilości prądu jonowego wchodzącego do wnętrza kubka i do dokładnego określenia kąta widzenia sondy. Ze względu na niską wydajność rozpylania pod wpływem bombardowania jonami ksenonu i kryptonu użyto tutaj grafitu. Element dystansowy stanowi pierścień wytworzony z PEEK o długości 5 mm. Działa on jako izolator elektryczny. Jest to potrzebne, aby odseparować elektrycznie kubek od kolimatora, gdyż grafit jest materiałem przewodzącym. Kolimator pozostaje wtedy na potencjale pływającym. Rozmiar tego elementu powinien być dobrany w taki sposób, aby ograniczyć występowanie zwarcia między kolimatorem a kubkiem. Aktywna długość cylindra ze stali nierdzewnej wynosi 26 mm, co daje całkowitą objętość kubka równą 8.2 cm^3. Cylinder i kolektor powinny być utrzymywane na potencjale znacznie poniżej potencjału pływającego, aby umożliwić wychwytywanie dodatnio naładowanych cząstek. Molibdenowy kolektor jonów o średnicy 20 mm znajduje się na podstawce kubka i jest przymocowany mechanicznie tzn. bez zgrzewania części 4 z 5. Podczas pomiarów obudowa, służąca także do montażu sondy na ramieniu diagnostycznym, jest pozostawiona na potencjale pływającym w stosunku do lokalnego potencjału plazmy [166].

Ponieważ powstało wiele modyfikacji konstrukcji kubków Faraday'a, na potrzeby doktoratu postanowiono przetestować wybrane z nich. Pierwsza modyfikacja, przedstawiona na Rysunku 1.19 a), polegała na zastosowaniu dodatkowej elektrody w celu zapobiegnięcia utraty elektronów wtórnych [215]. Oba elementy elektryczne, elektroda odpychająca i kolektor, są odizolowane od siebie i ekranowane przed wpływem z zewnątrz. Aby jednak pokonać problem wtórnej emisji elektronów wywołanej kolizją wiązki z kolektorem, elektrodę tłumiącą należy silnie spolaryzować potencjałem ujemnym w stosunku do kolektora. Podczas projektowania sond na potrzeby rozprawy doktorskiej niestety zamiast w domyśle przyspieszyć elektrony chcące opuścić sondę, zastosowanie takiej elektrody poskutkowało powstaniem „dodatkowego kolektora” i zmniejszeniem ilości jonów trafiających do kolektora właściwego. Dlatego też ta elektroda odpychająca w końcu została pozostawiona na potencjale pływającym. Druga konstrukcja, przedstawiona na Rysunku 1.19 b), różni się od poprzedniej tym, że posiada cylindryczny kolektor ze stożkowym wycięciem [109, 170, 61]. Jednak w przypadku badań nad rozprawą doktorską zastosowanie nietypowego kształtu kolektora nie wniosło zauważalnych zmian w ilości rejestrowanego prądu jonowego w stosunku do geometrii płaskiej, więc w celu uproszczenia konstrukcji postanowiono zrezygnować z takiej modyfikacji kolektora. Opis konstrukcji sond użytych do zbierania prądu jonowego na potrzeby rozprawy doktorskiej znajduje się w rozdziale 3.2.

Sondy FP i FC opisane powyżej są rekomendowanymi i powszechnie stosowanymi diagnostykami w dziedzinie EP służącymi do pomiarów prądu jonowego oraz rozbieżności wiązki plazmowej, zatem takie właśnie konfiguracje zostały użyte podczas badań prowadzonych w ramach rozprawy doktorskiej.

Rozdział 2

Metody wykrywania chaosu

Pierwsza część rozdziału 2 zawiera krótki zarys historyczny związany z teorią chaosu oraz opis przykładów na obecność zachowań chaotycznych w układach i zjawiskach należących do różnych dziedzin. Główną część niniejszego rozdziału stanowi podrozdział 2.2, gdzie omówione zostały poszczególne wskaźniki chaosu, które można stosować w celu scharakteryzowania dynamiki danego układu. Na podstawie tych wskaźników zostanie przeprowadzona analiza przedstawiona w rozdziale 4. Ostatnia część rozdziału 2 przedstawia kilka scenariuszy, które mogą doprowadzić do tego, że dany układ przejdzie w stan chaotyczny oraz próby kontroli pojawiającego się chaosu.

2.1 Wstęp

Niniejszy rozdział rozpoczyna się krótkim wstępem historycznym dotyczącym teorii chaosu, gdzie pokrótce przedstawiono najważniejsze odkrycia. Następnie w podrozdziale 2.1.2 podano przykłady na obecność zjawisk chaotycznych w tym również badania związane z chaosem w silnikach Halla.

2.1.1 Aspekt historyczny

Większość znanych teorii fizycznych uzyskiwała nowy opis matematyczno-fizyczny w przeciągu lat, ale ich główne idee pozostały te same. Natomiast w przypadku teorii chaosu rozwój dziedziny doprowadził do ważnych zmian fundamentalnych różnych zagadnień i pojęć fizycznych. Dzięki tej teorii nastąpił ogromny postęp w poznawaniu samej przyrody; przyczyniła się też ona do rozwoju rozmaitych gałęzi nauki [227].

Rewolucja związana z teorią chaosu odróżniała się od innych rewolucji występujących w fizyce (kwantowej i relatywistycznej) tym, że dotyczyła zjawisk bliskich codziennemu doświadczeniu i od dawna znanych (takich jak przepływ cieczy, ruch wahadła, zderzenie się ciał czy ruch planet). Nowa teoria zobrazowała spójny sposób funkcjonowania różnych układów, które wcześniej uważano za wyraźnie odmienne. Chociaż z jednej strony, odkrycie złożonych struktur w prostych układach skomplikowało ich rozumienie, to z drugiej, teoria chaosu dała w końcu nadzieję na zrozumienie układów złożonych [226].

Do znacznego rozwoju teorii chaosu przyczynił się Edward Lorenz, który badał ruch warstw powietrza w atmosferze. Analizowany przez niego model składał się z trzech nieliniowych równań różniczkowych zwyczajnych w postaci[1]:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \gamma(y - x) \\[2ex] \dfrac{dy}{dt} = rx - y - xz \\[2ex] \dfrac{dz}{dt} = xy - bz \end{cases} \tag{2.1}$$

gdzie x, y, z to rzeczywiste funcje czasu, a γ i b bezwymiarowe stałe dodatnie dotyczące fizycznych własności powietrza w atmosferze. Funkcja x opisuje zmienną proporcjonalną do prędkości prądu cyrkulacji powietrza, y to różnica temperatur pomiędzy komórkami wznoszącymi się i opadającymi, natomiast z stanowi odstępstwo pionowego rozkładu temperatury od zmian liniowych charakterystycznych dla stanu równowagi. Ostatnim parametrem jest r, czyli parametr kontrolny, od którego zależy przebieg procesu konwekcji, proporcjonalny do różnicy temperatur pomiędzy dolną a górną warstwą powietrza. Dla małych wartości r proces przebiega stacjonarnie, natomiast po przekroczeniu pewnej wartości krytycznej konwekcja staje się niestabilna [126, 180].

W celu graficznego przedstawienia danych Lorenz umieścił wyniki rozwiązań x, y i z dla różnych wartości t na dwuwymiarowym przekroju i śledził trajektorię badanego układu. Gdyby tor prowadził do jednego punktu, to układ przeszedłby w stan stacjonarny, natomiast gdyby tworzył zamkniętą pętlę to układ byłby okresowy. Trajektoria Lorenza jednak nie przejawiała żadnego z dwóch wymienionych zachowań. Co prawda tor ruchu pozostawał ograniczony w pewnym obszarze, ale nigdy się nie powtarzał, kreśląc schemat podwójnej spirali. Ten dziwny kształt sygnalizował zupełnie nowy rodzaj porządku – w 1963 r. Lorenz odkrył istnienie struktury atraktora.

Ponieważ matematyka jest głównym narzędziem dla większości teorii nauk przyrodniczych, więc jej ograniczenia nie pozostają bez wpływu na ich rozwój. Tak też się stało w przypadku układu równań Lorenza, które musiały poczekać na swoją matematyczną interpretację ponad 10 lat [227].

W 1957 r. Benoît Mandelbrot pracując w IBM (*International Business Machines Corporation*) analizował szumy w liniach telefonicznych, które w owym czasie służyły do transmisji informacji pomiędzy komputerami i zauważył, że bez względu na skalę proporcja okresów będących wolnymi od błędów a tych z błędami pozostaje stała. Wbrew intuicji, nie sposób znaleźć odcinka czasu, w którym błędy byłyby rozproszone w sposób równomierny. Powyżej opisane zachowanie stanowi przykład układu fraktalnego, czyli nieregularnej, nieskończenie skomplikowanej i samopodobnej struktury posiadającej zdolność powtarzania się wewnątrz niej samej [89].

[1] Układ Lorenza jest zredukowaną wersją układu badanego przez Barry'ego Saltzmana składającego się z 12 równań [197].

Mandelbrot, po zapoznaniu się ze sprzecznościami literaturowymi odnośnie długości linii brzegowej Wielkiej Brytanii, chciał się dowiedzieć jaka jest jej rzeczywista długość. Odkrył, że długość ta zależy od użytego liniału. Oznaczało to, że gdy skala pomiarów staje się coraz mniejsza, długość linii brzegowej rośnie w nieskończoność. To właśnie dzięki temu odkryciu Mandelbrot zdołał wyjść poza wymiary naturalne do wymiaru ułamkowego zwanego fraktalnym (patrz rozdział 2.2.5). Tylko taki wyrafinowany wymiar mógł oddać stopień nieregularności i nierówności badanego obiektu [89].

Obecnie fraktale, stanowiące nieodłączny element teorii chaosu, znalazły szerokie zastosowania. Ponieważ cyfrowy zapis równań układów fraktalnych zajmuje znacznie mniej pamięci niż gotowe rozwiązania, powszechnie zaczęto stosować je w grafice komputerowej. Za ich pomocą tworzy się efekty specjalne w grach i w filmach oraz sztuczne krajobrazy [257]. Fraktale posłużyły też jako narzędzie służące do opisu różnego typu wybrzuszeń oraz bardziej rzeczywistego opisu stykających się chropowatych powierzchni. Natomiast sam wymiar fraktalny został wykorzystany między innymi przez metalurgów do oceny wytrzymałości danego metalu [89].

Innym aspektem teorii chaosu zajmował się w 1978 r. Mitchell Feigenbaum [72], który badał odwzorowanie logistyczne (patrz wzór 2.2) i wykazał, że zachowanie się układu, działającego zgodnie z prostym równaniem kwadratowym dla odpowiednio wysokiej wartości parametru kontrolnego, może być wysoce skomplikowane [227]. Szukając obszarów przyciągania rozwiązań odwzorowania logistycznego, rozwiązywał je bardzo wiele razy dla różnych wartości parametru. W wyniku tego na tzw. diagramie bifurkacyjnym (patrz rozdział 2.2.2) najpierw linia reprezentująca rozwiązania rozdzielała się na dwie części, następnie każda z tych dwóch części znów się rozwidlała itd. Ponieważ przy dowolnym powiększeniu otrzymany diagram przypominał swój pierwotny kształt, odstępy między kolejnymi rozgałęzieniami powinny pozostawać w podobnym stosunku. Feigenbaum obliczył graniczną wartość stosunków tych odcinków i otrzymał szybkość zagęszczania się wykresu. Odwrotność tej liczby σ w przybliżeniu równa 4.6692, nazwana później stałą Feigenbauma, okazała się być uniwersalna. Badając różne funkcje ściśle wklęsłe, posiadające jedno maksimum na danym przedziale i odwzorowujące ten przedział w siebie, otrzyma się zawsze tą samą wartość σ [226].

W 1984 r. Robert Shaw postanowił przetestować stosunkowo prosty układ eksperymentalny w postaci kapiącego kranu. Bardzo cenna okazała się pewna nowatorska technika użyta do analizy danych pomiarowych, która polegała na specyficznym sposobie rekonstrukcji przestrzeni fazowej [210]. Mianowicie na jednej osi Shaw umieszczał odstęp czasu jaki upłynął między dwoma sąsiednimi kroplami, a na drugiej osi kolejny taki odstęp. Jeśli czasy te były równe, a działo się tak dla niskiej wartości przepływu wody, na wykresie powstawał pojedynczy punkt. Jednak gdy przepływ się zwiększał zaczynały pojawiać się tzw. bifurkacje podwajania okresu, polegające na tym, że układ zaczynał oscylować pomiędzy kilkoma wartościami dla dowolnego doboru warunków początkowych. To odkrycie oznaczało nic innego jak to, że porządek jest w jakimś stopniu wpisany w nieporządek, że potrafi ujawnić się już przy badaniu pojedynczej zmiennej. Skomentował to Doyne Farmer: *Na ewolucję zmiennej wpływa każda inna zmienna, na którą ona oddziałuje. Ich wartości muszą się jakoś zawierać w historii tej ewolucji. W jakiś sposób pozostawiają tam* *swoje ślady*[2] [89]. Najistotniejsze było to, że technika zastosowana przez Shawa okazała się uniwersalna – można ją stosować praktycznie do każdej serii danych [182].

Idea dotycząca powyżej opisanej rekonstrukcji przestrzeni fazowej została po raz pierwszy zilustrowana przez Shawa, natomiast podwaliny matematyczne dali niezależnie od siebie Takens [224] oraz Ruelle [69]. Obecnie teorii tej powszechnie używa się do analizy danych pod względem chaosu [180].

2.1.2 Przykłady na obecność chaosu

Obecnie zachowanie chaotyczne obserwuje się w bardzo wielu dziedzinach. Rozpoczynając od płynów, plazmy, laserów, reakcji chemicznych, poprzez układy elektroniczne, urządzenia mechaniczne i biologiczne, akustykę czy mechanikę ciał niebieskich, a kończąc na smudze dymu z papierosa, kroplach kapiących z kranu, ruchu samochodów na autostradzie, czy ropie płynącej w rurociągach [13, 89, 180].

Na podstawie obserwacji niekontrolowanego zachowania się plazmy w silnikach Halla również można się spodziewać wystąpienia chaosu podczas badania jej parametrów. Chociaż poszukiwanie chaosu w silnikach Halla pozostaje nowatorskie, pojawiły się już pierwsze wyniki takich badań.

W roku 2016 Zbigniew Peradzyński i in. przeanalizowali model płynowy plazmy. Stwierdzili, że istnieje duże prawdopodobieństwo iż równanie transportu, które rządzi amplitudami fal w plazmie, posiada rozwiązania chaotyczne (turbulentne) zarówno w swojej wersji liniowej, jak i nieliniowej [185].

Samuel Marini i Renato Pakter w pracy z 2017 r. [161] określili warunki uwięzienia pojedynczego elektronu w kanale wyładowania silnika Halla i przy pomocy prostego modelu badali jego dynamikę. Z przeprowadzonych symulacji wynikało, że wraz ze zmianą parametru kontrolnego, stanowiącego w ich przypadku natężenia pola magnetycznego, trajektoria elektronu przechodziła z regularnej do chaotycznej. Ponadto autorzy artykułu [161] badali objętość obszaru jonizacji i stwierdzili, że istnieje związek między częstością występowania trajektorii chaotycznych elektronu, a wielkością tej objętości, co nasuwa wniosek, że manipulując parametrem kontrolnym można zwiększyć zdolność elektronu do jonizacji.

Z kolei Debraj Mandal w artykule z 2020 r. [158] przedstawił swoje wyniki dotyczące chaotycznego transportu elektronów spowodowanego niestabilnością ich dryfu cyklotronowego. Stworzony przez niego model anomalnego ruchu elektronów w kierunku prostopadłym do pola magnetycznego pokazał, że ze względu na silne oddziaływanie z polem tła, ruch ten staje się chaotyczny, co zwiększa niepożądany transport elektronów wzdłuż kierunku osiowego silnika.

Jak dotąd nie powstała praca zajmująca się szukaniem chaosu w rzeczywistych przebiegach prądowych zarejestrowanych podczas pracy silnika Halla. Niemniej jednak badania nad chaosem podobne pod względem użytych technik do tych zawartych w tej rozprawie doktorskiej, ale dotyczące innego obiektu badań (a mianowicie fluktuacji plazmy induko-

[2] Tłumaczenie słów Farmera według Piotra Jaśkowskiego [89].

wanej podczas spawania za pomocą lasera) zostały przeprowadzone przez Jacka Kurzynę w 1998 r. W pracy [143] zastosował on standardowe procedury analizy nieliniowych szeregów czasowych, takie jak technika zanurzeniowa Takensa (patrz wzór 2.9) służąca do rekonstrukcji atraktora, redukcja szumów (patrz rozdział 4.3.1), obliczenie wymiaru korelacyjnego (patrz wzór 2.15) oraz poszukiwanie największego wykładnika Lapunowa (patrz rozdział 2.2.6).

Portrety fazowe zrekonstruowane z oczyszczonych szeregów czasowych ukazały struktury przypominające atraktor (patrz rozdział 2.2.3), co stanowiło mocny argument na rzecz hipotezy o istnieniu zachowań chaotycznych w tym układzie. Ponadto niska i niecałkowita wartość obliczonego wymiaru korelacjyjnego była dodatkowym i równie mocnym argumentem za niskowymiarową dynamiką chaotyczną. Co więcej, dość wysoka wartość uzyskanego największego wykładnika Lapunowa (w porównaniu z charakterystyczną częstotliwością oscylacji) wskazywała, że układ jest wysoce nieprzewidywalny.

Z faktu, że w układzie wykryto dziwny atraktor i dodatni wykładnik Lapunowa, wywnioskowano, że fluktuacje plazmy indukowanej laserowo reprezentują chaos deterministyczny, co sugeruje użycie podobnych technik w celu potwierdzenia istnienia chaosu w danych eksperymentalnych dotyczących silnika Halla.

2.2 Identyfikacja zachowań chaotycznych

Ponieważ kształty chaotycznych trajektorii w przestrzeni fazowej często są z pozoru bardzo podobne do przebiegów stochastycznych lub quasi-okresowych, niezwykle ważne jest, aby stosować odpowiednie miary, pozwalające na odróżnienie tych procesów [20]. Wskaźniki chaosu, opisane w tym rozdziale, służą pomocą przy próbie określenia czy dany układ przejawia zachowanie chaotyczne czy też nie.

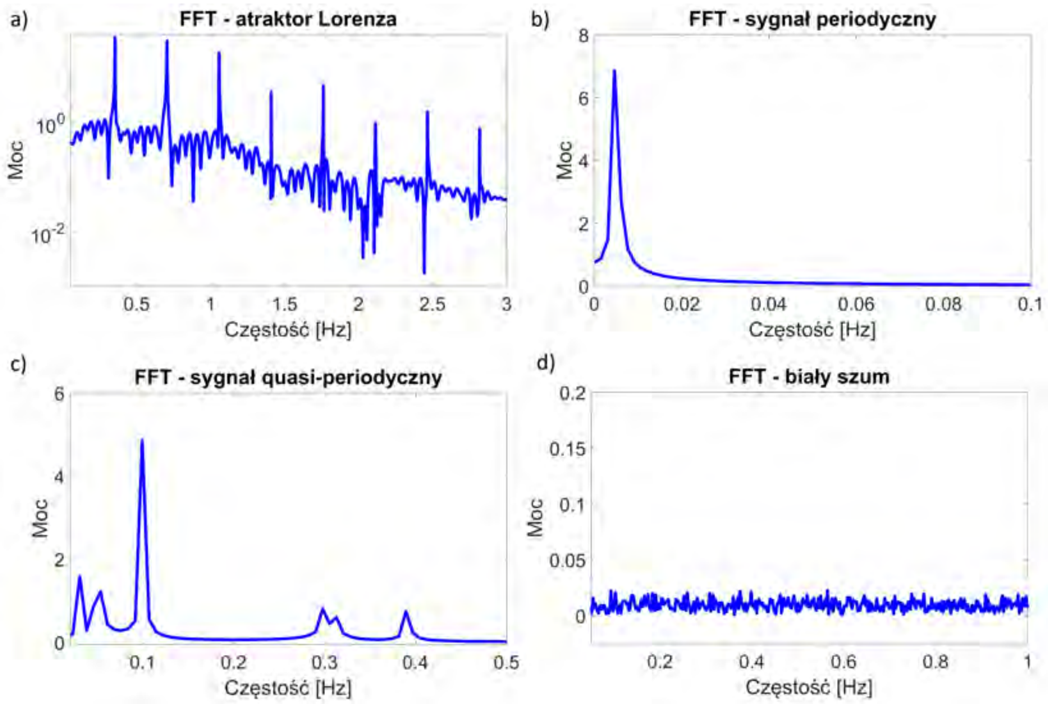
Jedną z cech dynamiki chaotycznej jest gęsty rozkład punktów okresowych znajdujących się w przestrzeni fazowej, co ma związek z występowaniem regularności i gwarantuje spełnienie założeń układu zdeterminowanego. Ponadto taka przestrzeń fazowa powinna być zintegrowana, co oznacza, że nie da się jej rozłożyć na oddzielne, niepowiązane części [227]. Sposób budowania właściwej przestrzeni fazowej oraz związany z nią proces rekonstrukcji atraktora zostały opisane w rozdziale 2.2.3.

Kolejną cechą dynamiki chaotycznej jest wrażliwość na warunki początkowe, która prowadzi do powstania niestabilności oraz decyduje o nieprzewidywalności układu. Wrażliwość tę można w pewnym stopniu przetestować przy pomocy przekroji Poincarégo (patrz rozdział 2.2.4) lub wykładników Lapunowa (patrz rozdział 2.2.6).

Teoria chaosu wprowadziła nowy język matematyczny zawierający takie pojęcia jak bifurkacje, fraktale czy intermitencje[3] okresowości [226], które również służą pomocą w rozstrzyganiu charakteru badanego układu. Terminy te zostały omówione odpowiednio w rozdziałach 2.2.2, 2.2.5 oraz 2.2.9.

Ponadto istnieją również graficzne metody służące rozpoznaniu cech badanego układu.

[3]Słowo *intermitencja* pochodzi od angielskiego słowa *intermittency* [202], które można przetłumaczyć jako *sporadyczne przerywanie*.



Rysunek 2.1: Widma mocy dla przykładowych sygnałów: a) chaotycznego, b) periodycznego, c) quasi-periodycznego i d) stochastycznego. Dane użyte do stworzenia widm zostały wygenerowane przy pomocy programu *Matlab*.

Należy do nich wykres rekurencyjny (patrz podrozdział 2.2.7) i symetryzowany wzór kropkowy (podrozdział 2.2.8). Pierwsza z tych metod pozwala również na przeprowadzenie analizy ilościowej kilku parametrów.

Podsumowując rozdział 2.2 stanowi opis wszystkich metod, którymi posłużono się w niniejszej rozprawie w celu dokonania analizy danych pod względem zachowań chaotycznych.

2.2.1 Widmo mocy

W widmie mocy występują pewne przesłanki, które mogą pomóc w interpretacji charakteru danego procesu. W widmie takim dla danych, gdzie obecny jest chaos, istnieją maksima dla podstawowych częstości własnych danego układu oraz występuje szeroka składowa ciągła malejąca w sposób liniowy wraz ze wzrostem częstości, większa od poziomu szumu. Dodatkowo zastosowanie skali logarytmicznej uwydatnia składowe o niskim poziomie mocy, które stanowią ważną cechę widm układów chaotycznych. Szerokopasmowość co prawda nie gwarantuje wrażliwości na warunki początkowe, ale stanowi symptom chaosu [20].

Do obliczania widm mocy zastosowano kwadrat modułu transformaty Fouriera, która służy uwidocznieniu częstości składowych zależnych od czasu. Dodatkowo zadanie ułatwił algorytm zwany szybką transformatą Fouriera FFT (ang. *Fast Fourier Transform*), który wykorzystuje pewne własności funkcji trygonometrycznych w celu znacznego przyspieszenia czasu trwania prowadzonych obliczeń [13] (funkcja **fft**[4] pakietu *Matlab*).

Na Rysunku 2.1 przedstawiono widma mocy sygnałów o odmiennym zachowaniu. Przykład a) dotyczy atraktora Lorenza (wzór 2.1), gdzie do generacji danych posłużono się algorytem Rungego-Kutty [40], zawartym w funkcji **ode** pakietu *Matlab*, służącym do iteracyjnego rozwiązywania równań różniczkowych zwyczajnych. Szereg czasowy danych związanych z układem Lorenza został w tej rozprawie wygenerowany dla następujących parametrów: $\gamma = 10$, $b = 8/3$ i $r = 28$, przy warunkach początkowych: $x(0) = 1$, $y(0) = 1$, $z(0) = 1$ [20].

Na Rysunku 2.1 b) przedstawiono widmo mocy sygnału periodycznego. Jako sygnał periodyczny została w tej pracy doktorskiej przyjęta funkcja sinusoidalna $f(x) = \sin(x)$ wygenerowana w programie *Matlab*. W widmie dotyczącym tego sygnału występuje jeden wyraźny pik. Natomiast gdy w widmie widoczne są tylko dyskretne składowe i są one gęste ma się do czynienia z atraktorem quasi-okresowym, czyli z ruchem stanowiącym złożenie kilku ruchów okresowych posiadających różne podstawowe częstości [13, 20, 83, 180]. W całej rozprawie jako przykład funkcji quasi-periodycznej użyta została funkcja o wzorze $f(x) = \sin(x/0.987) + 5\cos(x/0.3)\sin(x/0.7)$, której widmo mocy przedstawia Rysunek 2.1 c).

Ostatni przykład przedstawiony na Rysunku 2.1 – biały szum, charakteryzuje się tym, że jego widmo jest ciągłe i względnie stabilne, bez dyskretnych struktur. Biały szum został wygenerowany dzięki funkcji **rand** dostępnej w programie *Matlab*.

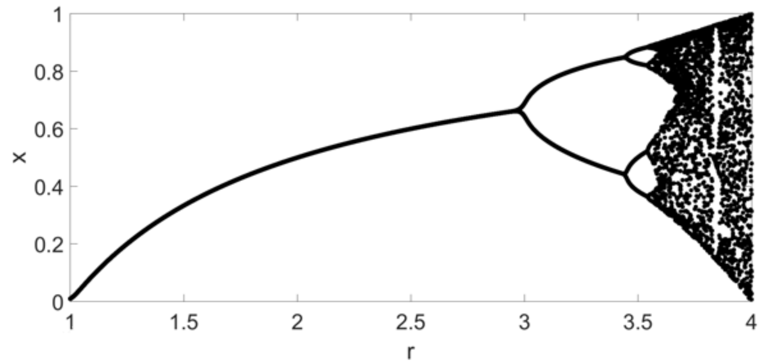
2.2.2 Diagram bifurkacyjny

Bifurkacja oznacza jakościową zmianę dynamiki układu, pod wpływem niewielkich zmian wartości parametru kontrolnego [126, 227]. Inaczej mówiąc jest to zmiana liczby rozwiązań równania różniczkowego pod wpływem zmian wartości tego parametru [13]. Diagram bifurkacyjny obrazuje zmiany jakościowe.

Zagadnienie bifurkacji polegającej na podwajaniu okresu danego sygnału omówiono poniżej na przykładzie odwzorowania logistycznego, które można użyć jako bardzo uproszczony model ekologiczny, opisujący roczne zmiany populacji pewnego gatunku [180]. Niech przedmiotem badań będzie populacja ryb znajdująca się w ograniczonym środowisku. Należy spodziewać się, że na początku, przy niewielkiej populacji będzie ona gwałtownie rosła. Natomiast gdy ryby zdołają się za bardzo rozmnożyć, zabraknie dla wszystkich pożywienia i populacja zacznie się kurczyć [89]. Zakładając, że względna liczba osobników w kolejnym pokoleniu x_{n+1} (znormalizowana do maksymalnej pojemności środowiska) jest proporcjonalna do liczby x_n osobników w poprzednim pokoleniu i do liczby wolnych miejsc $(1 - x_n)$, ewolucją kolonii będzie rządziło równanie:

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n), \tag{2.2}$$

[4] https://www.mathworks.com



Rysunek 2.2: Diagram bifurkacyjny odwzorowania logistycznego.

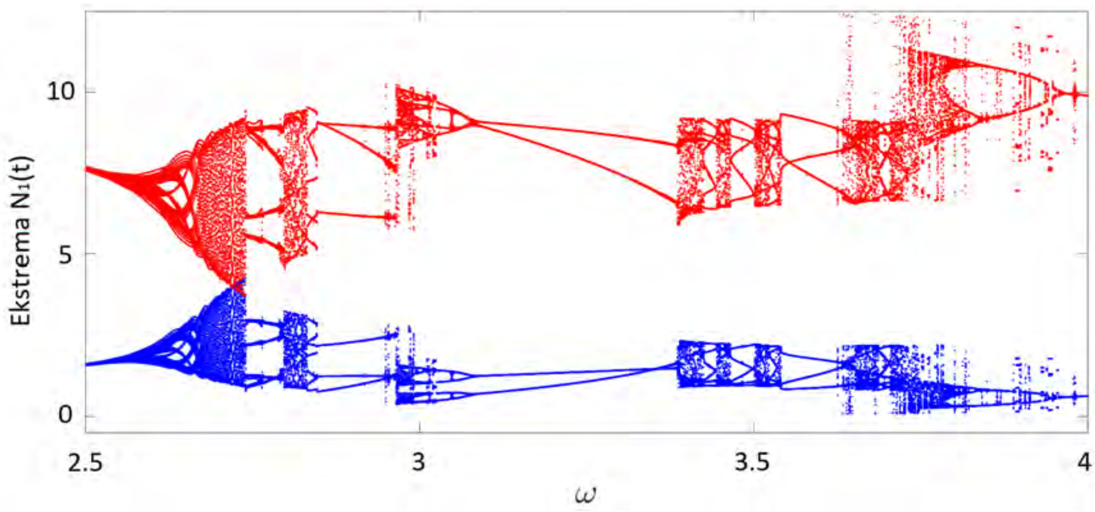
gdzie x_n stanowi liczebność populacji ryb w n-tym roku, r oznacza współczynnik rozrodczości (który w tym przypadku pełni rolę parametru kontrolnego), a człon $(1-x_n)$ opisuje działanie ograniczeń środowiskowych [142].

Wyniki kolejnych iteracji x_1, x_2, ..., x_n dla różnych wartości parametru kontrolnego r stworzą wykres bifurkacyjny, którego przykład ilustruje Rysunek 2.2. W tym układzie chaotycznym dla rosnącego r nastąpi kaskada podwojeń okresu, która w pierwszej fazie oznacza oscylację układu między dwiema wartościami dla dowolnego wyboru warunków początkowych, a w drugiej fazie oscylację między czterema wartościami itd. Populacja oscyluje między stabilnymi wartościami, których liczba podwaja się dążąc do nieskończoności. Dla pewnych odpowiednio dużych wartości parametru r będą pojawiały się obszary, w którym okna okresowe (czyli przedziały gdzie pojawiają się tylko rozwiązania okresowe) i chaos (gdzie nie ma rozwiązań czysto okresowych) będą przemieszane [180]. Będzie się tak działo dla skończonej wartości parametru kontrolnego [13, 202].

Model oparty o odwzorowanie logistyczne może dobrze wyjaśnić obserwowane zjawisko nasycenia populacji ekosystemu, takiego jak populacja ryb w jeziorze lub kolonia bakterii w probówce [120]. Jednak w przypadku układu złożonego z drapieżników i ofiar, który ma wiele wspólnego z procesem jonizacji w silniku Halla (rozdział 1.1.5), oba gatunki będą silnie wpływać na swoją liczebność i odwzorowanie opisane powyżej nie zdoła opisać całego procesu. Przy małej liczbie drapieżników ofiary mogą się łatwo namnażać, co będzie oznaczało wzrost dostępnego pożywienia dla drapieżników i spowoduje z kolei wzrost ich liczebności. Gdy drapieżników zacznie być zbyt wiele, to ograniczą liczebność swoich ofiar aż w końcu zaczną przymierać głodem zmniejszając swoją liczbę, co ponownie da ofiarom możliwość namnażania itd. [226]. Sytuację taką można opisać za pomocą układu równań Lotki-Volterry, które zostały zaproponowane właśnie do interpretacji okresowych oscylacji dwóch populacji w ekosystemie drapieżnik-ofiara [120]. Oryginalna wersja modelu składa się z następującej pary równań:

$$\frac{dN_1}{dt} = \alpha_1 N_1 - \beta_1 N_1 N_2, \quad \frac{dN_2}{dt} = -\alpha_2 N_2 + \beta_2 N_1 N_2, \tag{2.3}$$

gdzie α_1 to wskaźnik namnażania ofiar, α_2 – wskaźnik wymierania drapieżników, a N_1



Rysunek 2.3: Diagram bifurkacyjny wzbudzanego modelu Lotki-Volterry. Na czerwono zaznaczono maksima, a na niebiesko minima jakie przyjmuje populacja ofiar $N_1(t)$. Częstotliwość oscylacji siły zewnętrznej ω ze wzoru 2.5 pełni funkcję parametru kontrolnego.

i N_2 to odpowiednio liczebność populacji ofiar i drapieżników; człon $-\beta_1 N_1 N_2$ reprezentuje tempo redukcji liczby ofiar w wyniku spotkań z drapieżnikiem, a $\beta_2 N_1 N_2$ reprezentuje tempo wzrostu populacji drapieżników w wyniku tych samych spotkań. Powyższy model daje rozwiązanie okresowe, ale jego okres i amplituda zależą od stanu początkowego. Dlatego zaczęto proponować różne modyfikacje powyższego modelu. Na przykład Gause [120] wprowadził człon kolizji gatunków (w sensie ich wzajemnych spotkań) proporcjonalny do $\sqrt{N_1}$, co zmodyfikowało równania 2.3 do postaci:

$$\frac{dN_1}{dt} = \alpha_1 N_1 - \beta_1 \sqrt{N_1} N_2 - \gamma_1 N_1^2, \quad \frac{dN_2}{dt} = -\alpha_2 N_2 + \beta_2 \sqrt{N_1} N_2, \tag{2.4}$$

gdzie wprowadzony został również człon logistyczny $\gamma_1 N_1^2$. Liczby spotkań są teraz proporcjonalne do $\sqrt{N_1}$, a nie do N_1 co zapewnia efekt pojawienia się maksymalnej granicznej liczby kolizji gatunków, natomiast gdyby do równania nie został dodany człon logistyczny, to nastąpiłaby eksplozja populacji ofiar. Przy tak wprowadzonych zmianach rozwiązanie cyklu granicznego daje prostą, oscylacyjną ewolucję dwóch populacji.

Próbując jeszcze bardziej urealnić model ekosystemu Inoue i Kamifukumoto zaproponowali aby tempo mnożenia się ofiar α_1 zależało od czasu, tzn. było napędzane przez okresową zależną od czasu siłę zewnętrzną:

$$\alpha_1(t) = 2[a - b\cos(\omega t)], \tag{2.5}$$

gdzie a jest stałą większą od zera, a b i ω są odpowiednio amplitudą i częstością siły zewnętrznej. Posiada to swoje odzwierciedlenie w prawdziwym systemie, gdzie opóźnienie czasowe spowodowane regeneracją trawy wywołuje okresowe wahania populacji zwierząt się nią żywiących (czyli w tym przypadku ofiar N_1) [120]. Ze względu na związek między opisem oscylacji w silniku Halla z modelem drapieżnik-ofiara (rozdział 1.1.5), powyższy zmodyfikowany model Lotki-Volterry został w tej rozprawie doktorskiej w skrócie nazwany *modelem L-V* i będzie służył jako jeden z układów porównawczych.

Po rozwiązaniu numerycznym powyższych równań przy użyciu algorytmu Rungego-Kutty [40], zgodnie z sugestią Inoue i Kamifukumoto przyjmując następujące wartości parametrów: $\alpha_2 = 3.0$, $\beta_1 = 3.0$, $\beta_2 = 1.5$, $\gamma_1 = 0.48$ oraz $a = 3.0$ i $b = 0.17$, na Rysunku 2.3 wykreślono diagram bifurkacyjny ukazujący przejście do chaosu w takim układzie. Jak widać wyraźnie klarują się obszary, w których ma się do czynienia ze stanem chaotycznym, z bardzo dużą liczbą rozwiązań. Są one poprzeplatane z obszarami, gdzie liczba rozwiązań pozostaje niewielka.

2.2.3 Przestrzeń fazowa i rekonstrukcja atraktora

Rozwiązanie układu równań w przestrzeni fazowej nosi nazwę trajektorii lub orbity [126]. Zarówno takie trajektorie jak i tradycyjne szeregi czasowe są powszechnymi sposobami przedstawiania danych w celu uzyskania obrazu długofalowego zachowania się danego układu [89].

W przestrzeni fazowej, tworzącej abstrakcyjną przestrzeń o ortogonalnych osiach, współrzędne stanowią zbiór wszystkich wielkości, za pomocą których można opisać trajektorię w sposób jednoznaczny, czyli współrzędne powinny przedstawiać tylko zmienne niezbędne do określenia stanu badanego układu. Punkt przestrzeni fazowej odpowiada chwilowemu stanowi dynamicznemu. Zatem pojedynczy punkt w przestrzeni fazowej zawiera pełną informację o badanym układzie w danej chwili.

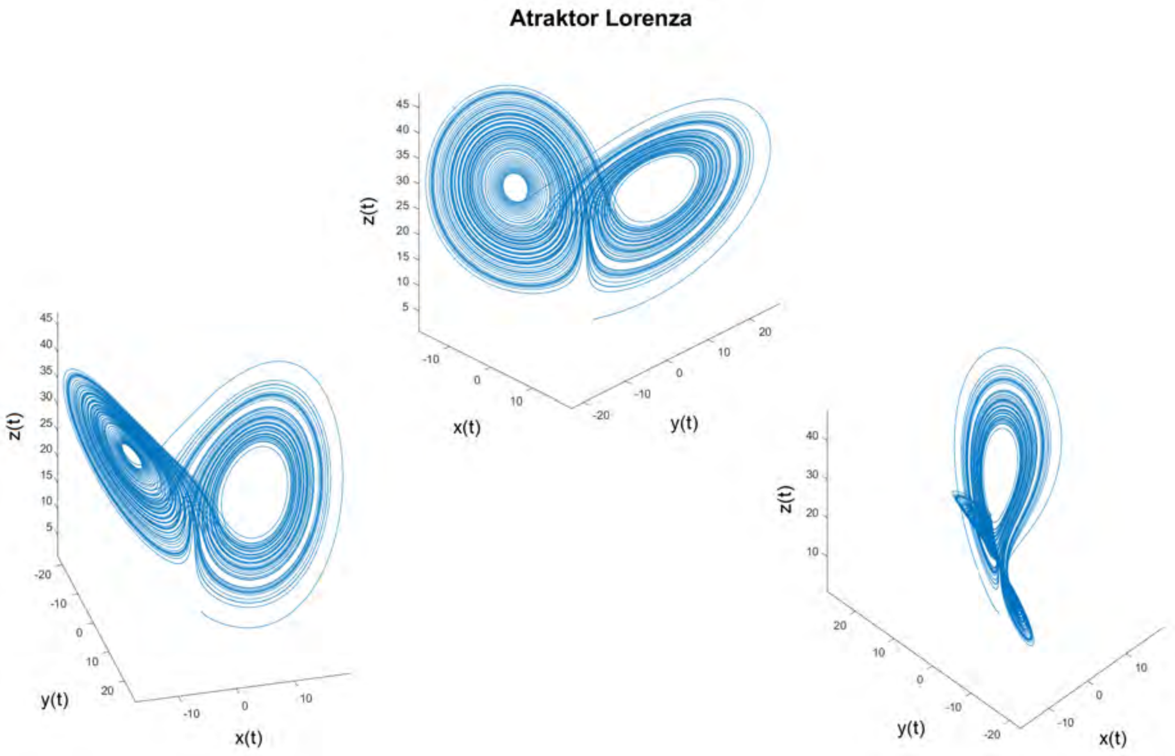
Każdemu możliwemu ruchowi ciała odpowiada jednoznaczna trajektoria związana z historią ruchu dla pewnego przedziału czasu. Z jednoznaczności równań ruchu (a dokładniej z jednoznaczności rozwiązań równań różniczkowych) wynika, że trajektorie te nie mogą się przecinać – determinizm ruchu mechanicznego polega na tym, że tylko przy doborze dokładnie tych samych warunków początkowych i ciał o identycznych własnościach będą się one poruszały w jednakowy sposób.

Twierdzenie Liouville'a o zachowaniu miary mówi, że objętość przestrzeni fazowej pozostaje stała, gdy energia układu jest zachowana, natomiast dla układu dyssypatywnego będzie się ona kurczyć [126, 227]. Z punktu widzenia teorii chaosu ważne jest to, że obserwując zmiany objętości przestrzeni fazowej można wyciągnąć pewne wnioski dotyczące danego ruchu [226].

Atraktor[5] to pewien podzbiór przestrzeni fazowej (może to być jakaś zawiła trajektoria lub pojedynczy punkt), do którego w miarę upływu czasu będą zmierzały wszystkie rozwiązania równań danego modelu. Odznacza go zatem stabilność oraz fakt, że każdy początkowy stan układu będzie z czasem zmierzał do stanu wyróżnionego.

Cechą procesów nieliniowych niespełniających zasady zachowania energii jest występowanie atraktorów o złożonej budowie, a poszukiwanie atraktorów ma na celu sformułowanie pewnych przewidywań i wpłynięcie na przebieg danego procesu. Atraktory o skomplikowanej budowie stanowią raczej regułę, a nie wyjątek [126, 227].

[5]Słowo *atraktor* wzięło się od angielskiego słowa *atract* oznaczającego *przyciągać*.



Rysunek 2.4: Atraktor Lorenza. Poszczególne panele pokazują widok tego samego atraktora pod różnymi kątami.

W dwuwymiarowej przestrzeni fazowej mogą istnieć tylko dwa najprostsze rodzaje atraktorów: punkty stałe i cykle graniczne, które reprezentują odpowiednio zachowanie dążące do stanu stacjonarnego oraz zachowanie cykliczne. W pierwszym przypadku czas dojścia układu do pojedynczego punktu jest nieskończony (gdyby tak nie było, punkt stanowiłby przecięcie trajektorii, co jest sprzeczne z jednoznacznością rozwiązań równań różniczkowych). W drugim przypadku sytuacja jest podobna – krzywa zamknięta, po której układ porusza się w sposób okresowy stanowi granicę gdzie zbiegają się trajektorie i mogą do niej dotrzeć tylko po nieskończonym czasie [89, 126].

Pojęcie atraktora oraz sposób jego rekonstrukcji zostanie teraz omówione na przykładzie modelu Lorenza, który można nazwać archetypem zachowania chaotycznego. Równania nieliniowe 2.1 opisujące ten układ nie spełniają zasady zachowania energii, tzn. występują w nich człony rozpraszające tą energię (rozpraszana jest energia cieplna podnosząca temperaturę dolnych warstw atmosfery) [226]. Ponieważ atraktor pojawia się tylko dla pewnych przedziałów wartości parametrów, Lorenz przyjął wartości zaproponowane przez Saltzmana, które były stosowane w bardziej rozbudowanym modelu: $\gamma = 10$ i $b = 8/3$, natomiast za r przyjął wartość 28 [226].

Po rozwiązaniu numerycznym równań 2.1 przy użyciu algorytmu Rungego-Kutty otrzymano atraktor Lorenza z charakterystycznymi skrzydłami przedstawiony na Rysunku 2.4.

Pomimo, że nie da się ustalić liczby obiegów na jednym skrzydle ani momentu przeskoku na drugie, widać, że w ruchu panuje duża regularność. Bez względu na to, w którym miejscu trajektoria wystartowała, cała przestrzeń fazowa skupiła się w dwa niewielkie dwuwymiarowe obszary [226]. Powstałe trajektorie nigdy się nie przetną, bo gdyby to uczyniły atraktor musiałby od tego momentu powtarzać swoje zachowanie [89].

Atraktor Lorenza składa się z nieskończonej liczby nieskończenie cienkich płatów położonych blisko siebie [227] i stanowi przykład tzw. dziwnego atraktora. Dziwne atraktory posiadają niecałkowity wymiar (patrz rozdział 2.2.5) i strukturę fraktalną [13, 89]. Słowo „dziwny" odnosi się do geometrii lub kształtu obszaru przyciągającego, natomiast słowo „chaotyczny" do dynamiki orbit na atraktorze, a w szczególności wykładniczego rozbiegania się pobliskich trajektorii [101].

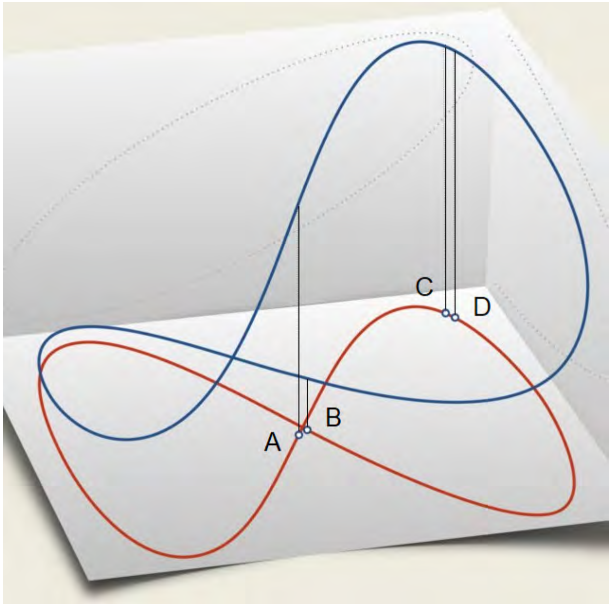
Wspomniany we wstępie Floris Takens (rozdział 2.1.1) opracował metodę odtwarzania kształtu atraktora zanurzonego w d-wymiarowej przestrzeni fazowej przy pomocy tylko jednego wektora opisującego badany układ [224]. Metoda polega na budowaniu przestrzeni fazowej z wektorów przesuniętych w czasie o krotność pewego interwału τ, zwanego opóźnieniem czasowym. Te przesunięte wartości noszą nazwę współrzędnych z opóźnieniem, a ich liczba zależy ściśle od wymiaru przestrzeni fazowej. W praktyce w przypadku danych doświadczalnych zazwyczaj dysponuje się tylko jednym szeregiem danych i nie jest znany wymiar przestrzeni fazowej. Należy zatem po kolei badać opóźnione szeregi czasowe zwiększając wymiar przestrzeni, aż do otrzymania regularności [227].

Ponieważ ważne jest aby zbiór rozwiązań był zanurzony w przestrzeni o dostatecznej liczbie wymiarów, Takens poszukiwał wystarczającego wymiaru przestrzeni fazowej, aby uniknąć przecięć trajektorii (powodujących złamanie zasady determinizmu). Zdołał udowodnić, że wystarczy aby wymiar przestrzeni zanurzenia d był większy od wymiaru fraktalnego atraktora D_A wedle relacji [13, 180]:

$$d \geq 2D_A + 1. \tag{2.6}$$

Podstawową metodą, która pozwala na określenie minimalnego wymiaru zanurzenia jest poszukiwanie fałszywych najbliższych sąsiadów FNN (ang. *False Nearest Neighbors*). Mianowicie fałszywym sąsiadem będzie ten punkt trajektorii, który znajduje się w otoczeniu wybranego punktu odniesienia tylko dlatego, że poprzez dobranie zbyt małego rozmiaru przestrzeni zbadano tylko część współrzędnych sąsiada i został on zrzutowany w jego pobliże. Po odpowiednim zwiększeniu rozmiaru przestrzeni taki punkt przestanie być sąsiadem, jeśli kolejna współrzędna będzie miała wartość znacznie różniącą się od wartości punktu odniesienia. (Sytuację taką obrazuje Rysunek 2.5.) Wybiera się zatem pewną stałą R_O określającą długość promienia hiperkuli i oblicza zmianę odległości między punktami przy zmianie wymiaru przestrzeni fazowej z d na $d+1$. Jeśli zmiana ta jest większa niż ustalona wartość uznaje się sąsiada za fałszywego. Minimalny wymiar przestrzeni d zostanie osiągnięty, kiedy liczba sąsiadów przestanie się zmieniać [43, 124, 130].

Do eliminacji fałszywych najbliższych sąsiadów można wykorzystać dwa następujące warunki, badając cechy sąsiadów przy przejściu od niższego wymiaru przestrzeni fazowej d do wyższego $d + 1$ [130]:
- **I warunek**: odległość między punktami $x(i)$ i $x(j)$ nie powinna się zwiększać o stosunek



Rysunek 2.5: Wizualizacja dotycząca fałszywych sąsiadów reprodukowana z artykułu [44]. Pomimo, że para punktów A i B leży bardzo blisko siebie w wymiarze d (kolor czerwony), to w wymiarze $d+1$ (kolor niebieski) może je dzielić znaczna odległość. Natomiast punkty C i D pokazują przykład prawdziwych sąsiadów.

większy niż zadana wartość progowa R_O:

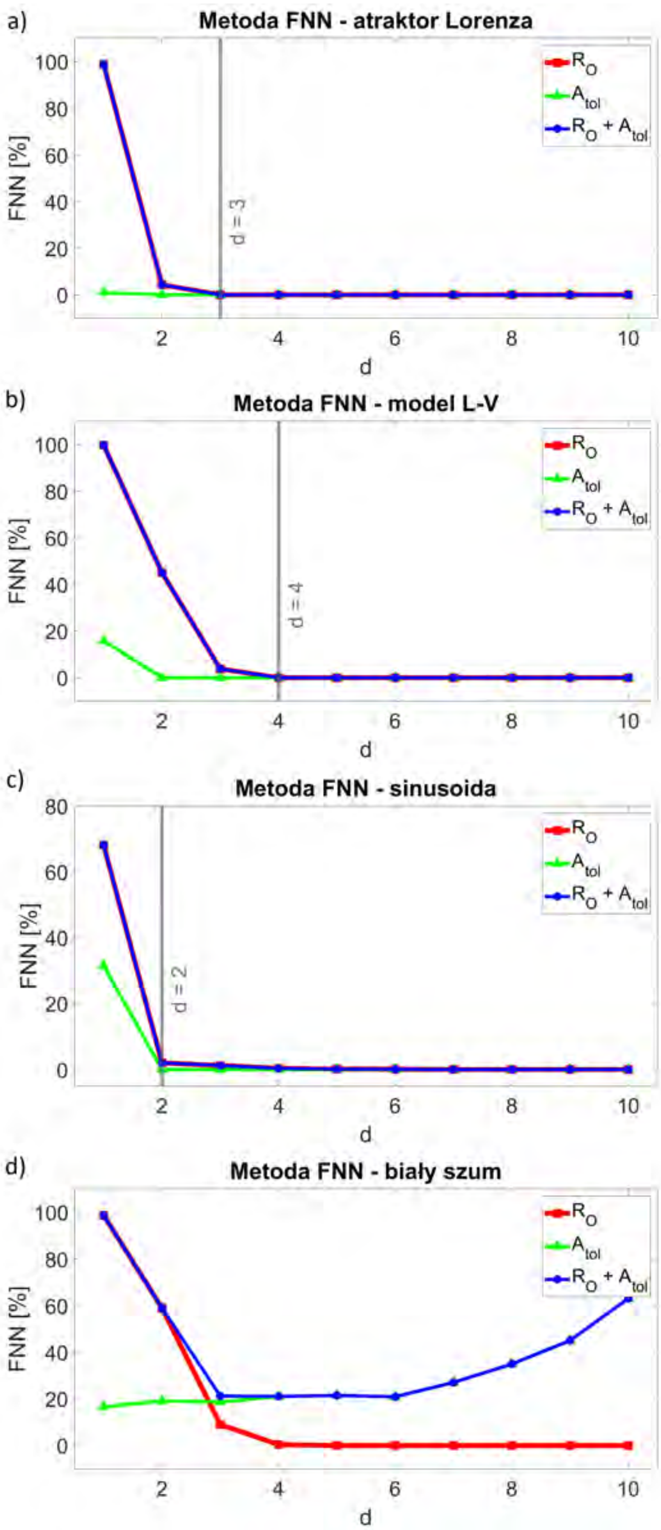
$$\frac{R_{d+1}^2(i,j) - R_d^2(i,j)}{R_d^2(i,j)} \leq R_O^2, \tag{2.7}$$

- **II warunek**: w przypadku punktów, których odległość jest bliska średniej odległości wszystkich badanych punktów od środka atraktora R_A (środek atraktora jest przybliżany przez środek ciężkości wszystkich punktów dla danego wymiaru d), wprowadza się dodatkowe ograniczenie:

$$R_{d+1}(i,j) < A_{tol} R_A, \tag{2.8}$$

gdzie współczynnik A_{tol} dobiera się w zależności od cech badanego układu (np. w artykule [123] dotyczącym przebiegów prądu wyładowania użyto wartości 2).

Na Rysunku 2.6 przedstawiono wyniki dotyczące wyznaczenia wymiaru zanurzenia metodą fałszywych najbliższych sąsiadów dla kilku sygnałów referencyjnych. W przypadku atraktora Lorenza widać, że po przejściu od $d = 1$ do $d = 2$ liczba FNN raptownie maleje, a od $d = 3$ praktycznie spada do zera, więc taki wymiar przestrzeni można uznać za dostateczny. Podobnie dzieje się w przypadku wzbudzanego modelu Lotki-Volterry oraz sinusoidy, gdzie po przekroczeniu wartości d równych odpowiednio 4 i 2 następuje zanik liczby fałszywych sąsiadów. Natomiast dla białego szumu liczba fałszywych sąsiadów wciąż rośnie wraz ze wzrostem wymiaru d (bierze się to z faktu, że wymiar przestrzeni fazowej szumu jest nieskończony). Na tym przykładzie widać również, że pominięcie kryterium związanego z rozmiarem atraktora R_A prowadziłoby do błędnego wyniku.



Rysunek 2.6: Przykłady zastosowania metody FNN do wyznaczenia odpowiedniego wymiaru zanurzenia w przypadku: a) atraktora Lorenza, b) wzbudanego modelu Lotki-Volterry ($\omega = 2.7$), c) sygnału sinusoidalnego oraz d) białego szumu, gdzie przyjęto wartości $A_{tol} = 2$ i $R_O = 15$. Kolorem czerwonym i zielonym zostały zaznaczone wyniki dotyczące I i II warunku, kolorem niebieskim wynik zbiorczy.

Według metody Takensa w ogólnej postaci d-wymiarowy wektor współrzędnych z opóźnieniem służący do rekonstrukcji atraktora przybiera postać [180]:

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ x(t+\tau) \\ x(t+2\tau) \\ \cdots \\ x(t+(d-1)\tau) \end{bmatrix} \tag{2.9}$$

gdzie x oznacza badaną wielkość szeregu czasowego (np. N_1 w przypadku modelu L-V), a τ jest wartością opóźnienia czasowgo podawanego w przypadku układów referencyjnych w jednostkach próbkowania (wtedy odpowiada różnicy indeksów dwóch punktów szeregu czasowego).

Zazwyczaj przedział doboru wartości opóźnienia czasowego jest dość szeroki, tym niemniej dla całkiem przypadkowej wartości τ nie zaobserwuje się regularności wynikających z istnienia atraktora [227]. Gdyby τ było zbyt małe, to punkty badanego szeregu leżałyby zbyt blisko siebie i nie otrzymano by informacji o długofalowej dynamice badanego układu. Z drugiej strony, wrażliwość na warunki początkowe powoduje, że korelacje między punktami są krótkoczasowe.

Analizując zachowanie się szeregu $x(t)$ można badać korelację między parami punktów o liczebności N w funkcji ich odstępu w czasie przy pomocy funkcji autokorelacji $C(\tau)$ zdefiniowanej jako:

$$C(\tau) = \lim_{N\to\infty} \left[\frac{1}{N-\tau} \sum_{t=1}^{N-\tau} x(t)x(t+\tau) \right], \tag{2.10}$$

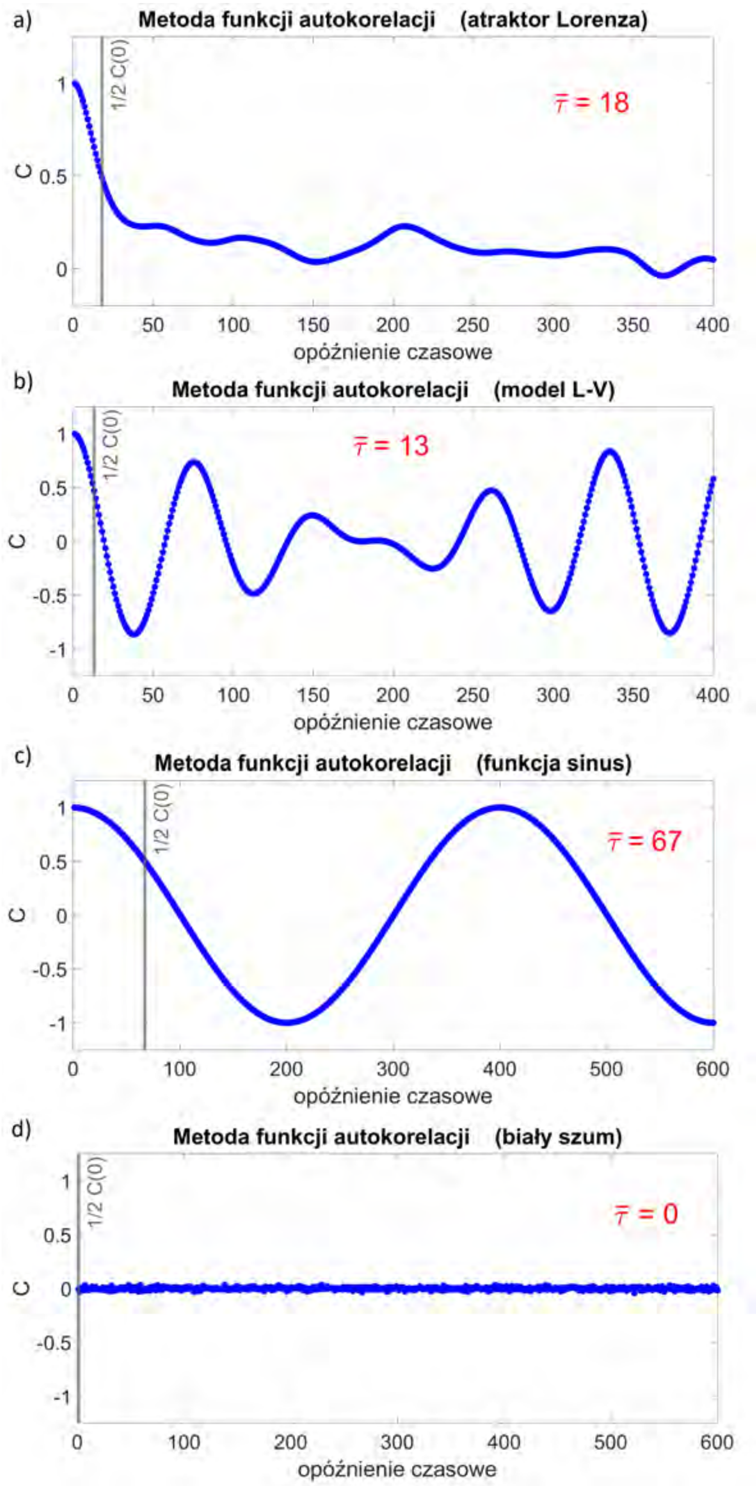
gdzie szereg $x(t)$ został znormalizowany do zerowej średniej i jednostkowej wariancji.

Korelacja własna sygnału charakteryzuje związek pomiędzy wartościami sygnału w danej chwili a wartościami tego sygnału w kolejnych odstępach czasu. Dlatego też maksymalną wartość funkcja ta przyjjmuje dla zerowej wartości opóźnienia [99]. Zgodnie z sugestią Heinza Schustera z artykułu [202] za kryterium wyznaczania opóźnienia czasowego można przyjąć warunek:

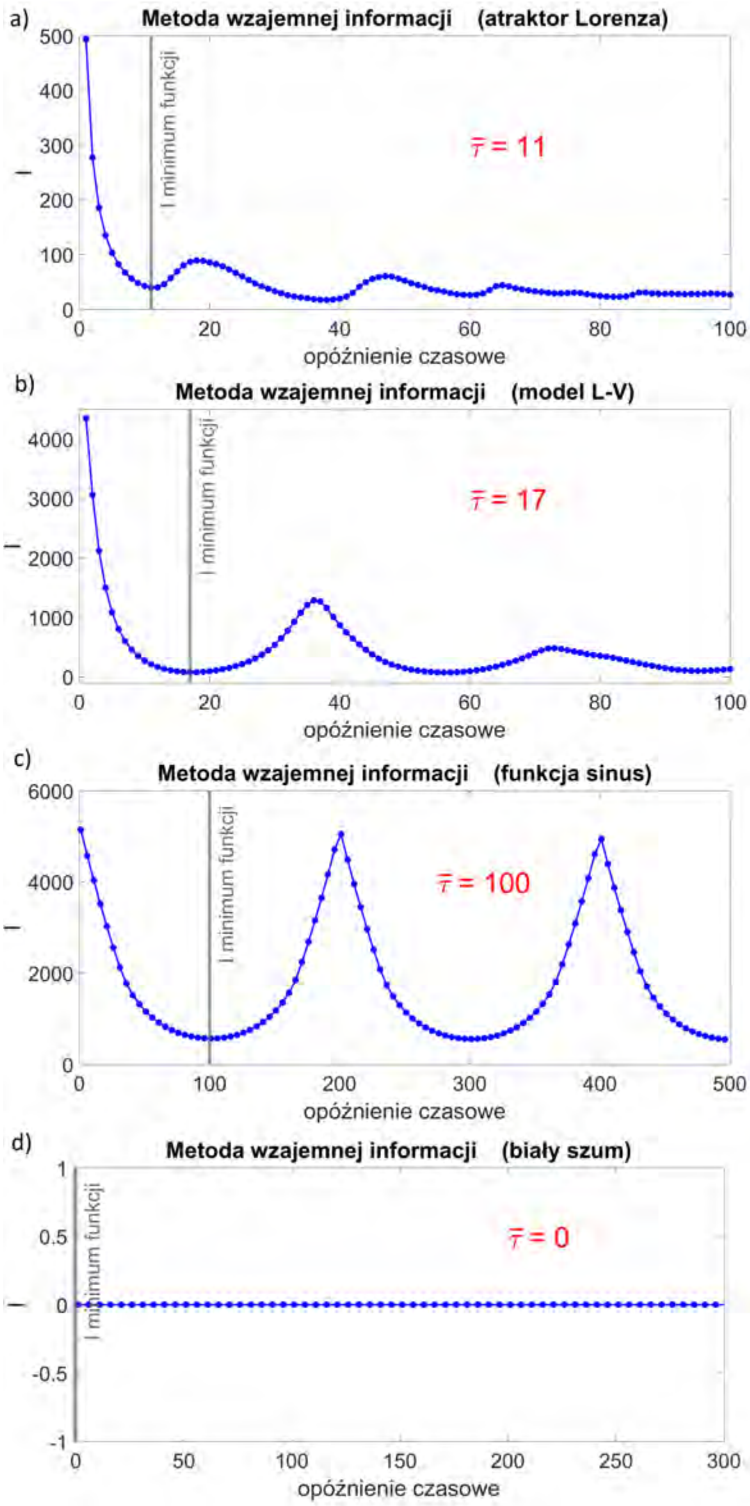
$$C(\tau) \approx \frac{1}{2} C(0). \tag{2.11}$$

Na potrzeby rozprawy doktorskiej przetestowano też inne wartości, a w tym $C(\tau) \approx \frac{2}{5}C(0)$ sugerowane przez Gregory'ego Bakera i in. w [13]. Jednak ostatecznie wyznaczono wartość τ na podstawie warunku 2.11.

Dzięki funkcji autokorelacji uzyskuje się informację o wpływie sygnałów znajdujących się w różnych fazach na siebie. W przypadku ruchu okresowego wyrazy będą ze soba skorelowane i funkcja $C(\tau)$ będzie oscylować, a w przypadku chaotycznym amplituda funkcji będzie zanikać w sposób wykładniczy, gdyż stosunkowo bliskie punkty powinny się stać dość szybko nieskorelowane [20]. Zatem kształt funkcji autokorelacji może pomóc w odróżnieniu procesu chaotycznego od innych zachowań [143]. Na Rysunku 2.7 można zauważyć, że dla białego szumu funkcja $C(\tau)$ ma wartości zbliżone do zera, podczas gdy dla procesów okresowych (lub quasi-okresowych) ma ona charakter oscylacyjny. Natomiast w przypadku ruchu chaotycznego amplituda funkcji ma tendencję spadku.



Rysunek 2.7: Przykłady zastosowania metody funkcji autokorelacji do wyznaczenia odpowiedniego opóźnienia czasowego τ w przypadku: a) atraktora Lorenza, b) modelu L-V oraz c) sygnału sinusoidalnego i d) białego szumu. Pionowe szare linie pokazują wybraną wartość τ na podstawie kryterium 2.11.



Rysunek 2.8: Przykłady zastosowania metody informacji wzajemnej do wyznaczenia odpowiedniego opóźnienia czasowego τ w przypadku: a) atraktora Lorenza, b) modelu L-V, c) sygnału sinusoidalnego i d) białego szumu. Pionowe szare linie pokazują wybraną wartość τ, dla którego wzajemna informacja osiąga pierwsze minimum.

Druga metoda wyznaczenia poprawnej wartości opóźnienia czasowego τ, którą zastosowano w tej rozprawie doktorskiej, opiera się na tzw. informacji wzajemnej w odniesieniu do dwóch wyników pomiarów, wykonanych w różnycm czasie. Średnia informacja wzajemna dla $N-\tau$ par informacji o opóźnieniu τ wynosi [1, 77]:

$$I(\tau)=\sum_{t=1}^{N-\tau} P(x(t),x(t+\tau))\log_2\left[\frac{P(x(t),x(t+\tau))}{P(x(t))P(x(t+\tau))}\right], \tag{2.12}$$

gdzie $P(x(t))$ i $P(x(t+\tau))$ to odpowiednio prawdopodobieństwa wystąpienia w sygnale wartości $x(t)$ i $x(t+\tau)$, a $P(x(t),x(t+\tau))$ to łączne prawodpodobieństawo wystąpienia tych dwóch wartości. Jak widać $I(\tau)\geq 0$, a wartość 0 osiąga tylko gdy wszystkie wyniki pomiarów są parami niezależne.

Fraser w artykule [77] zasugerował wybór τ, przy którym występuje pierwsze minimum funkcji $I(\tau)$, a jeżeli informacja wzajemna $I(\tau)$ zbyt długo nie osiąga minimum lub w ogóle go nie posiada sugeruje, żeby τ spełniało warunek: $I(\tau)\approx 0.1I(0)$. W przypadku analizowanych układów referencyjnych zastosowaneo kryterium oparte o pierwsze minumum funkcji $I(\tau)$.

Na Rysunkach 2.7 i 2.8 przedstawiono odpowiednio wyniki wyznaczania opóźnienia τ przy pomocy funkcji autokorelacji i informacji wzajemnej. Wyniki uzyskane dwoma metodami zestawiono w Tabeli 2.1. Ponieważ wartości te różnią się, ostatecznego wyboru dokonano na podstawie wyników rekonstrukcji atraktorów.

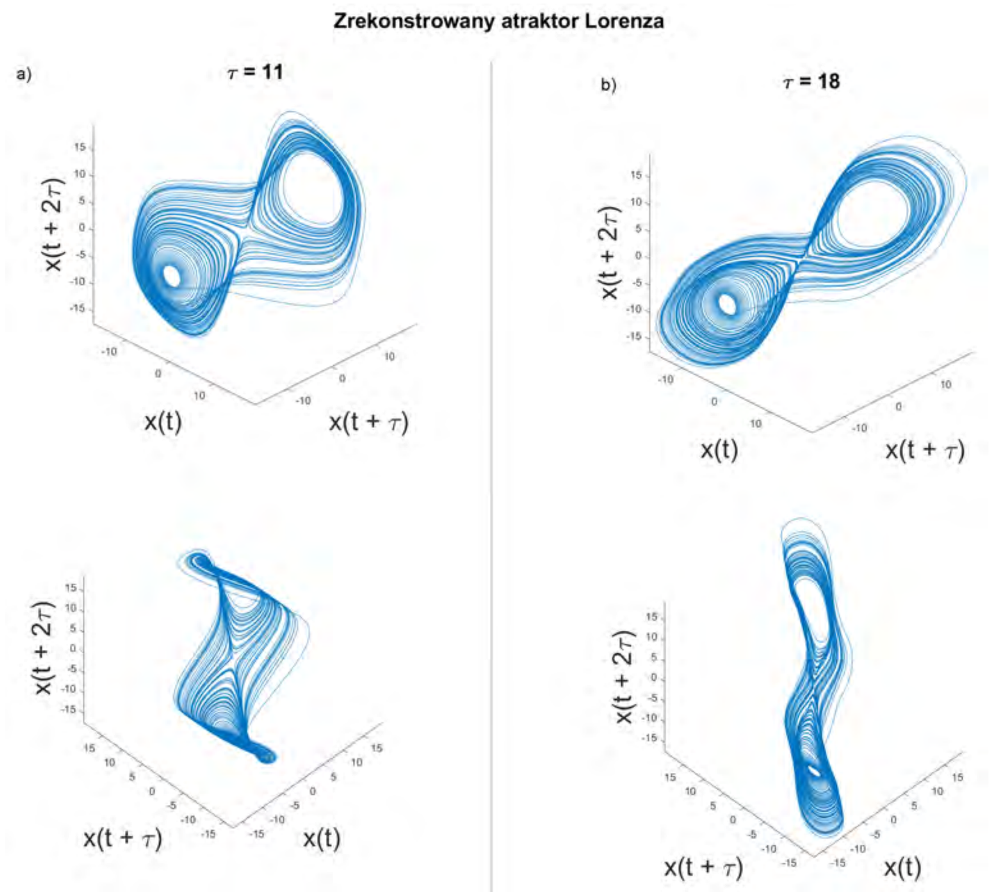
	atraktor Lorenza	model L-V	sygnał periodyczny	biały szum
funkcja autokorelacji	$\tau=18$	$\tau=13$	$\tau=67$	$\tau=0$
informacja wzajemna	$\tau=11$	$\tau=17$	$\tau=100$	$\tau=0$

Tabela 2.1: Wyniki oszacowań opóźnienia czasowego otrzymane za pomocą obydwu metod dyskutowanych w tym rozdziale.

Jak pokazano wcześniej za pomocą metody FNN (Rysunek 2.6) dla atraktora Lorenza wymiar przestrzeni zanurzenia powinien być równy 3, dlatego zgodnie z teorią zanurzeniową Takensa (wzór 2.9) zbudowano 3-wymiarowy wektor $[x(t),x(t+\tau),x(t+2\tau)]$, posługując się opóźnieniem otrzymanym po zastosowaniu metody informacji wzajemnej. Zrekonstruowany kształt atraktora przedstawiono na Rysunku 2.9 a). Dla wartości τ uzyskanej metodą funkcji autokorelacji nie odtworzono poprawnego kształtu atraktora, co pokazano na panelu b).

Po porównaniu atraktorów z Rysunku 2.4 i 2.9 a) można stwierdzić, że cały zabieg przebiegł poprawnie. Geometryczne podobieństwo jest widoczne – podstawowa struktura prawdziwego atraktora jest podobna do struktury uzyskanej przy pomocy współrzędnych z opóźnieniem. Zrekonstruowany atraktor powinien być topologicznie równoważny pierwowzorowi, tzn. jego wymiar obliczony na podstawie wzoru 2.15 oraz wykładniki Lapunowa omówione w rozdziale 2.2.6 powinny być zbliżone.

W analogiczny sposób została również zrekonstruowana przestrzeń fazowa wzbudzanego modelu Lotki-Volterry (patrz Rysunek 2.10). Opóźnienie czasowe przyjęte do dal-



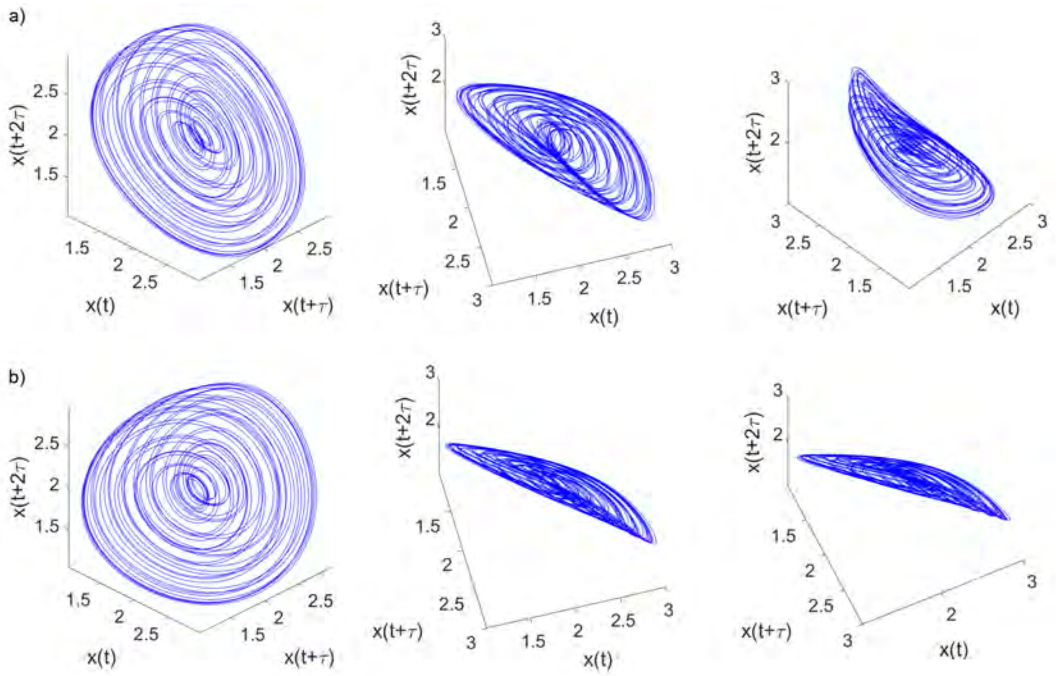
Rysunek 2.9: Atraktor Lorenza zrekonstruowany przy użyciu metody Takensa dla: a) $\tau = 11$, b) $\tau = 18$. Górne i dolne rekonstrukcje przedstawiono pod różnym kątem.

szych badań wynosiło 17, gdyż i tym razem metoda informacji wzajemnej służąca wyznaczeniu τ okazała się skuteczniejsza (dla $\tau = 13$ atraktor pozostawał sztucznie spłaszczony).

2.2.4 Odwzorowanie Poincarégo

Aby uzyskać informacje z często dość zagmatwanej i skomplikowanej struktury pojawiającej się w przestrzeni fazowej można posłużyć się metodą map Poincarégo (zwaną również odwzorowaniem powrotu lub przekrojem Poincarégo). Metoda Poincarégo polega na zastąpieniu analizy trajektorii przestrzeni fazowych w n-wymiarowej przestrzeni, analizą $(n-1)$-wymiarowego układu dyskretnego [126]. Oznacza to, że zamiast badania całych trajektorii bierze się pod uwagę punkty przecięcia tej trajektorii z wybraną płaszczyzną odniesienia tworząc w ten sposób mapę. Płaszczyznę tę należy dobrać w ten sposób, aby uzyskać jak najwięcej informacji o badanym ruchu. Ważne jest zatem aby trajektorie przebijały ją na wylot, czyli aby wybrany płat nie był styczny w żadnym z punktów do trajektorii fazowych [180, 227].

W przypadku atraktora trójwymiarowego, metoda ta będzie polegać zatem na wyję-



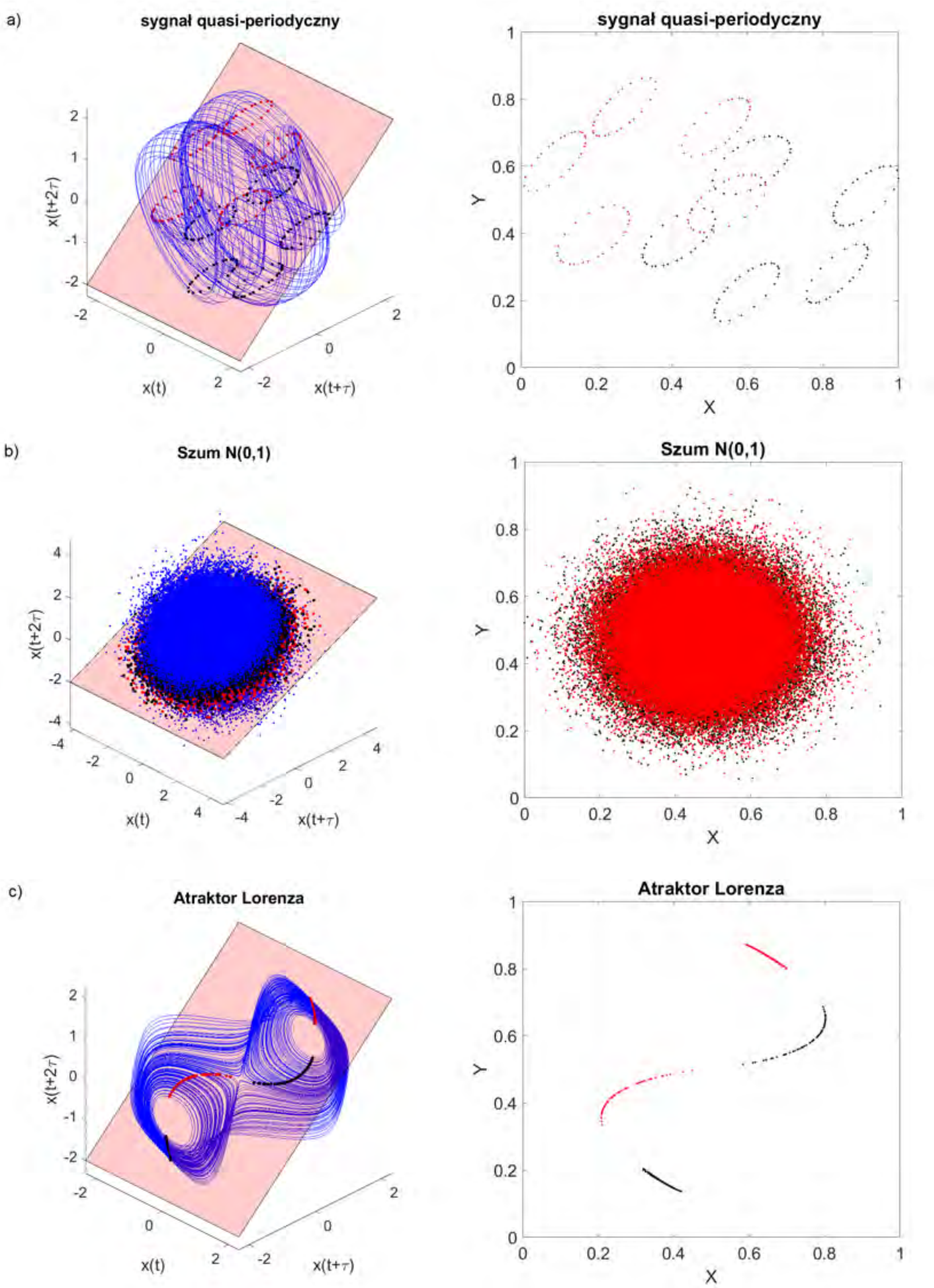
Rysunek 2.10: Atraktor modelu L-V zrekonstruowany za pomocą metody Takensa dla parametru kontrolnego $\omega = 2.7$, gdzie w przypadku a) użyto opóźnienia $\tau = 17$, a b) $\tau = 13$. Poszczególne panele obrazują ten sam atraktor widziany pod różnymi kątami.

ciu dwuwymiarowego plastra z jego wnętrza, co zmniejszy wymiar o jeden, przekształcając ciągłą linię w zbiór punktów. Za każdym razem gdy trajektoria atraktora przetnie wybraną płaszczyznę wskaże na niej pojedynczy punkt, z czego stopniowo zacznie się wyłaniać pewna struktura [5, 20, 89, 187, 233].

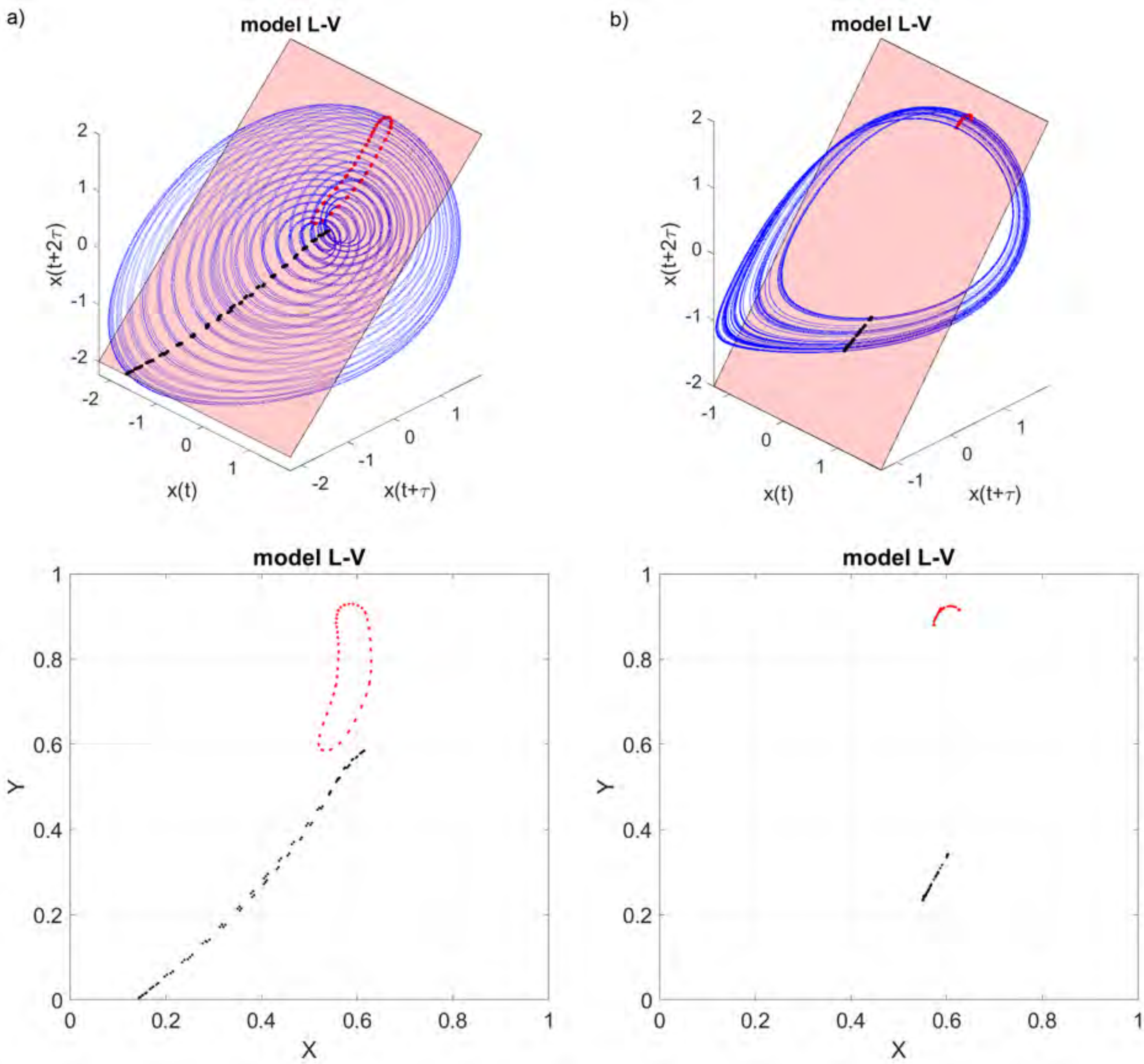
Przy pomocy odwzorowania Poincarégo można ocenić charakter badanego układu. Dla układu quasi-periodycznego (patrz Rysunek 2.11 a)) na mapie otrzymuje się skończoną liczbę punktów, które układają się wzdłuż krzywych zamkniętych. W przypadku szumu o rozkładzie normalnym wygenerowanym dzięki funkcji **randn** programu *Matlab* (przykład b)) na mapie pojawia się losowy rozkład punktów. Natomiast dla ruchu chaotycznego (przykład c)) trajektoria przecina płaszczyznę przekroju w coraz to nowych punktach, leżących zwykle bardzo blisko odpowiednich punktów z poprzedniego przecięcia, co pokazuje, że w przypadku pojawienia się atraktora chaotycznego punkty będą się skupiały w pewnych obszarach i uwidoczni się pewna regularność [227].

Na Rysunku 2.12 przedstawiono różnicę pomiędzy wyglądem map Poincarégo dla dwóch różnych przypadków modelu L-V z odmienną wartością częstotliwości wymuszającej ω. W przypadku niechaotycznym, dla którego $\omega = 2.7$, punkty przecinające płaszczyznę tworzą kształty zdeformowanych elips. W przypadku chaotycznym, gdzie $\omega = 3.766$, punkty grupują się w bardziej zwartych strukturach nie tworząc krzywych zamkniętych, co przypomina skupienie punktów jakie powstaje na przekroju dla atraktora Lorenza.

Gdy równania opisujące ewolucję są znane oraz znana jest częstość własna układu,

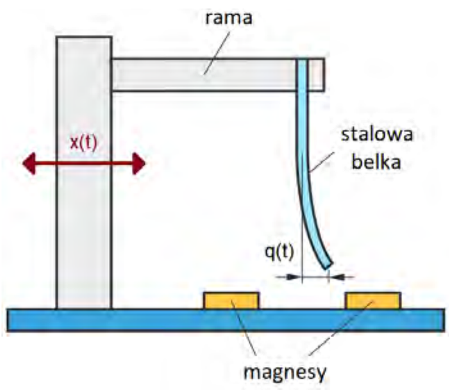


Rysunek 2.11: Mapy Poincarégo dla: a) sygnału quasi-periodycznego, b) szumu o rozkładzie normalnym, c) atraktora Lorenza. Po lewej kolorem niebieskim wykreślono zrekonstruowane atraktory, a kolor różowy reprezentuje płaszczyznę przecięcia. Kolorami czerwonym i czarnym odróżniono miejsca przecięcia płaszczyzny przekroju odpowiednio od góry i od dołu.



Rysunek 2.12: Mapy Poincarégo dla modelu L-V dla parametru kontrolnego o następujących wartościach: a) $\omega = 2.7$, b) $\omega = 3.766$. Na górnym panelu kolorem niebieskim wykreślono zrekonstruowane atraktory, a kolor różowy reprezentuje płaszczyznę przecięcia. Kolorami czerwonym i czarnym odróżniono miejsca przecięcia płaszczyzny przekroju odpowiednio od góry i od dołu.

konstrukcję opartą o przecięcie wybraną płaszczyznę odniesienia można zastąpić zabiegiem stroboskopowym [79]. Metoda ta polega na tym, że bierze się odpowiedni okres przesunięcia równy odwrotności częstości własnej układu, a następnie wykreśla mapę Poincarégo dla punktów przesuniętych o krotność tego okresu. Posiadając jednak szeregi czasowe pochodzące z rzeczywistych pomiarów przeważnie nie dysponuje się wystarczającą wiedzą na temat częstości własnej układu. Z pomocą przychodzi jednak pewna procedura, związana z poszukiwaniami minimum entropii Shannona (patrz wzór 2.39), która pozwala oszacować właściwy okres.



Rysunek 2.13: Układ belki jako przykład układu, do którego można użyć metody stroboskopowej tworzenia przekroju Poincarégo opartej na entropii Shannona. Rysunek reprodukowany z [79].

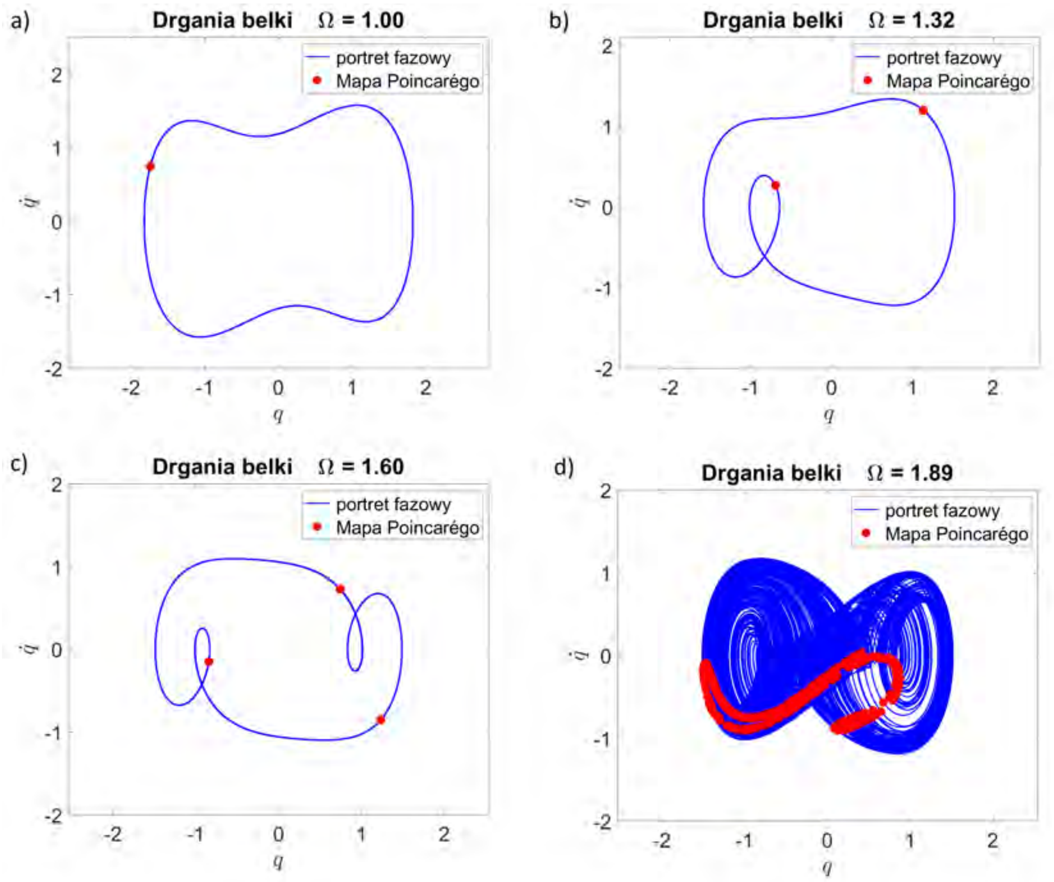
Aby znaleźć odpowiedni okres, który ma posłużyć do stworzenia przekroju, należy wziąć pod uwagę częstotliwości podstawowe układu zidentyfikowane podczas analizy widmowej. Następnie należy przeskanować wartości entropii w pobliżu częstości podstawowej i znaleźć minimum, które odpowiada najmniejszej liczbie punktów przekroju w obszarze o zadanym promieniu. Następnie wykonuje się dokładniejszy skan wokół tej wartości. Postępowanie należy kontynuować do czasu aż zmiany wartości entropii staną się zaniedbywalne.

W celu demonstracji uzyskania przekroju Poincarégo metodą stroboskopową wybrano układ, który składa się ze stabilnej i sztywnej ramy oraz przymocowanej do niej stalowej belki, gdzie belka ta została przymocowana w taki sposób, aby jej swobodny koniec leżał między dwoma magnesami, co ukazuje Rysunek 2.13. Cała rama jest poruszana tam i z powrotem wzdłuż kierunku x. Taki układ z drganiami harmonicznymi można opisać równaniem w bezwymiarowej postaci:

$$\ddot{q} + c\dot{q} - q + q^3 = A\sin(\Omega t), \tag{2.13}$$

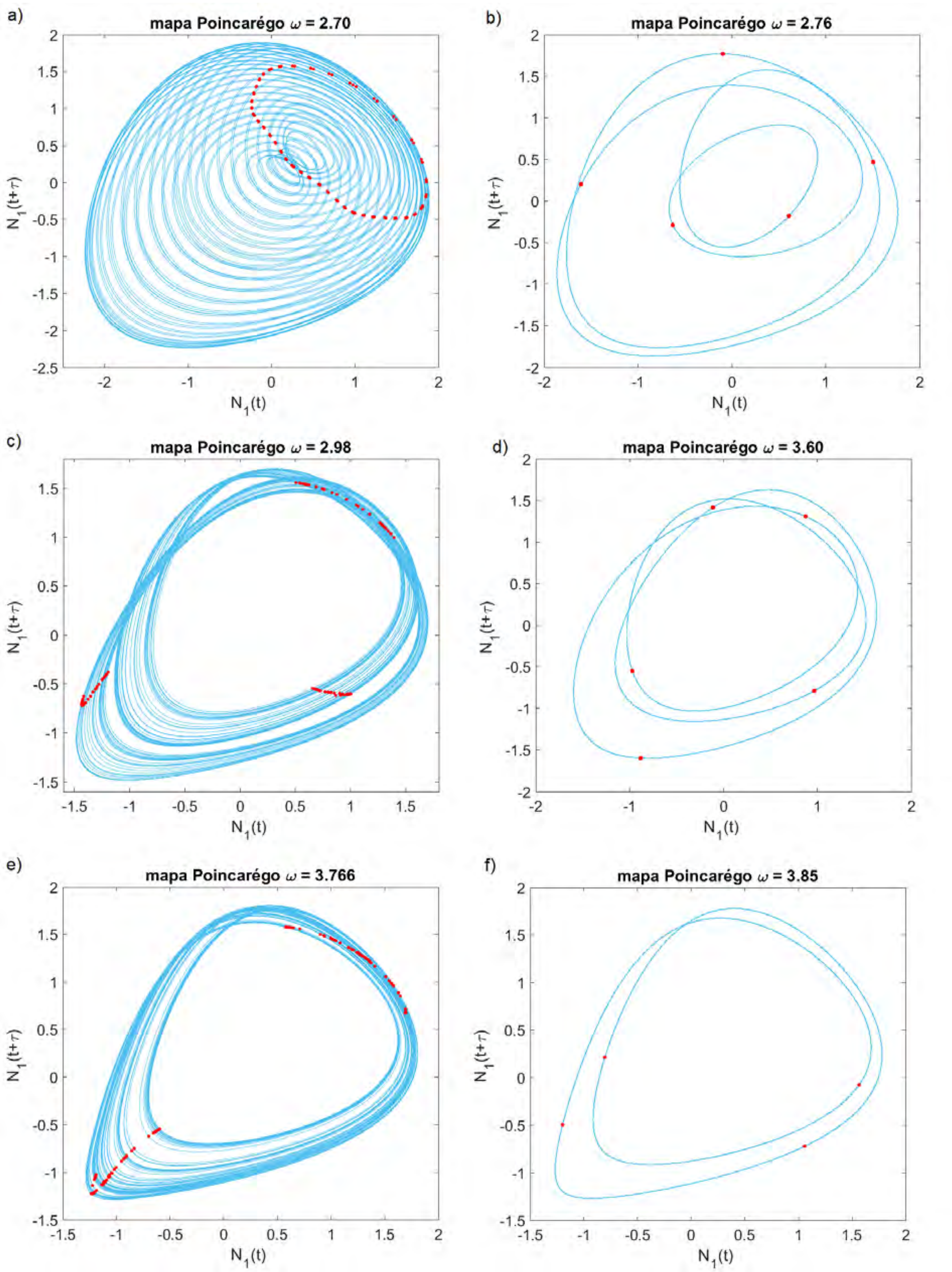
gdzie $q(t)$ opisuje wychylenie belki, c to współczynnik tłumienia, A i Ω to amplituda i częstość wymuszenia [79, 172].

Na Rysunku 2.14 pokazane zostały przykładowe portrety fazowe oraz przekroje Poincarégo dla kilku wybranych wartości wymuszenia Ω, przy których jej ruch reprezentuje odmienne zachowanie. Przypadek a) reprezentuje drgania okresowe, co manifestuje się pojedynczym punktem na przekroju Poincarégo, w przypadku b) okres ruchu końca belki jest dwukrotnie dłuższy od okresu drgań ramy, co powoduje bifurkację i pojawienie się drugiej składowej drgań. W przypadku c) wciąż ma się do czynienia z ruchem okresowym, czyli portret fazowy tworzy krzywą zamkniętą, a na mapie Poincarégo pojawiają się trzy punkty. Dalszy wzrost parametru kontrolnego sprawia, że rośnie liczba rozwiązań równania 2.13. Dla $\Omega = 1.89$ (przypadek d)) układ zachowuje się chaotycznie – ruch belki pozbawiony jest regularności, wciąż kreśli nowe trajektorie w przestrzeni fazowej. Na mapie Poincarégo manifestuje się to tym, że cały czas powstają nowe punkty. Ich rozkład nie jest jednak losowy, lecz tworzy pewną zwartą strukturę [79].



Rysunek 2.14: Portrety fazowe i mapy Poincarégo dla rozwiązań równania drgań belki (wzór 2.13) w przypadku różnych wartości częstości wymuszenia: a) $\Omega = 1$, b) $\Omega = 1.32$, c) $\Omega = 1.60$, d) $\Omega = 1.89$. Przyjęto wartość amplitudy wymuszenia A równą 1, a współczynnik tłumienia c równy 0.5. Warunki początkowe były natomiast następujące: $q(0) = 1$ i $\dot{q}(1) = 0$.

Na Rysunku 2.15 przedstawiono mapy Poincarégo wzbudzonego modelu Lotki-Volterry powstałe przy użyciu metody stroboskopowej. W zależności od wartości parametru kontrolnego ω punkty tworzące mapę grupują się w odmienny sposób. W przypadku a), gdzie $\omega = 2.7$, punkty na mapie układają się w kształt zdeformowanej elipsoidy. Dla przedziałów częstości ω, dla których obserwowany jest chaos i które można zidentyfikować obserwując diagram bifurkacyjny przedstawiony na Rysunku 2.3, na mapie Poincarégo punkty układają się w specyficzny sposób tworząc zwarte struktury – patrz Rysunek 2.15 c) i e). Natomiast gdy parametr kontrolny trafia na okno (przypadki b), d) i f)) punkty układają się w odmienny sposób niż w pozostałych przypadkach. Po pierwsze ich ilość jest niewielka, a po drugie pozostają one bardziej rozproszone. Poza tym ich portrety fazowe, które również zostały przedstawione na tym rysunku, tworzą krzywą zamkniętą.



Rysunek 2.15: Mapy Poincarégo (kolor czerwony) nałożone na portrety fazowe (kolor błękitny) dla modelu L-V uzyskane dla różnych wartości częstości siły zewnętrznej: a) $\omega = 2.65$, b) $\omega = 2.7$, c) $\omega = 2.73$, d) $\omega = 2.76$, e) $\omega = 2.8$, f) $\omega = 2.97$.

2.2.5 Wymiar fraktalny

Geometria fraktalna, zainicjowana przez Mandelbrota, doskonale nadaje się do opisu dziwnych atraktorów, które posiadają niezwykle skomplikowaną i subtelną budowę. Dlatego też teoria chaosu często wykorzystuje fraktale jako narzędzie formalne [226]. Fraktale odróżniają się od klasycznych konstrukcji geometrycznych tym, że nie posiadają najniższego poziomu złożoności – każda ich część jest tak samo skomplikowana jak ogół; biorąc kawałek konstrukcji na dowolnie niskim poziomie jego budowy, otrzyma się budowę dokładnie przypominającą całość [227].

W atraktorze Lorenza trajektoria w przestrzeni fazowej układa się każdorazowo nieco inaczej nigdy się nie przecinając. Atraktor ten jest zbudowany z nieskończonej ilości cieniutkich płatków położonych blisko siebie, czyli posiada strukturę fraktalną (Rysunek 2.4) [227]. Wymiar fraktalny tego atraktora jest równy około 2.05, co jest spowodowane tym, że trajektoria przebiega częściowo pomiędzy dwuwymiarową powierzchnią a trójwymiarową objętością [6, 27]. Graficzne przedstawienie w przestrzeni fazowej trajektorii będących rozwiązaniami modeli procesów nieliniowych zwykle prowadzi do ekstremalnie złożonych struktur [226, 227].

Jedną z bardziej znanych metod szukania wymiaru fraktalnego jest obserwacja zmian tzw. wymiaru korelacyjnego D_G podczas stopniowego zwiększania wymiaru przestrzeni zanurzenia. Wymiar korelacyjny ma związek z całką korelacyjną stanowiącą średni ułamek punktów wewnątrz kuli o promieniu R [64, 69]:

$$C(R) = \lim_{N\to\infty}\left[\frac{1}{N^2}\sum_{i,j=1}^{N} H(R - \|x(i) - x(j)\|)\right], \tag{2.14}$$

gdzie $x(i)$ i $x(j)$ są punktami szeregu czasowego tworzącymi badaną próbę, N jest liczebnością próby, $\|.\|$ miarą odległości (normą), a $H(k)$ funkcją skokową Heaviside'a przyjmującą wartość 1 dla $k \geq 0$ i 0 dla $k < 0$, zatem dla danego i wybierane są tylko punkty znajdujące się wewnątrz hiperkuli o promieniu R i środku w punkcie $x(i)$.

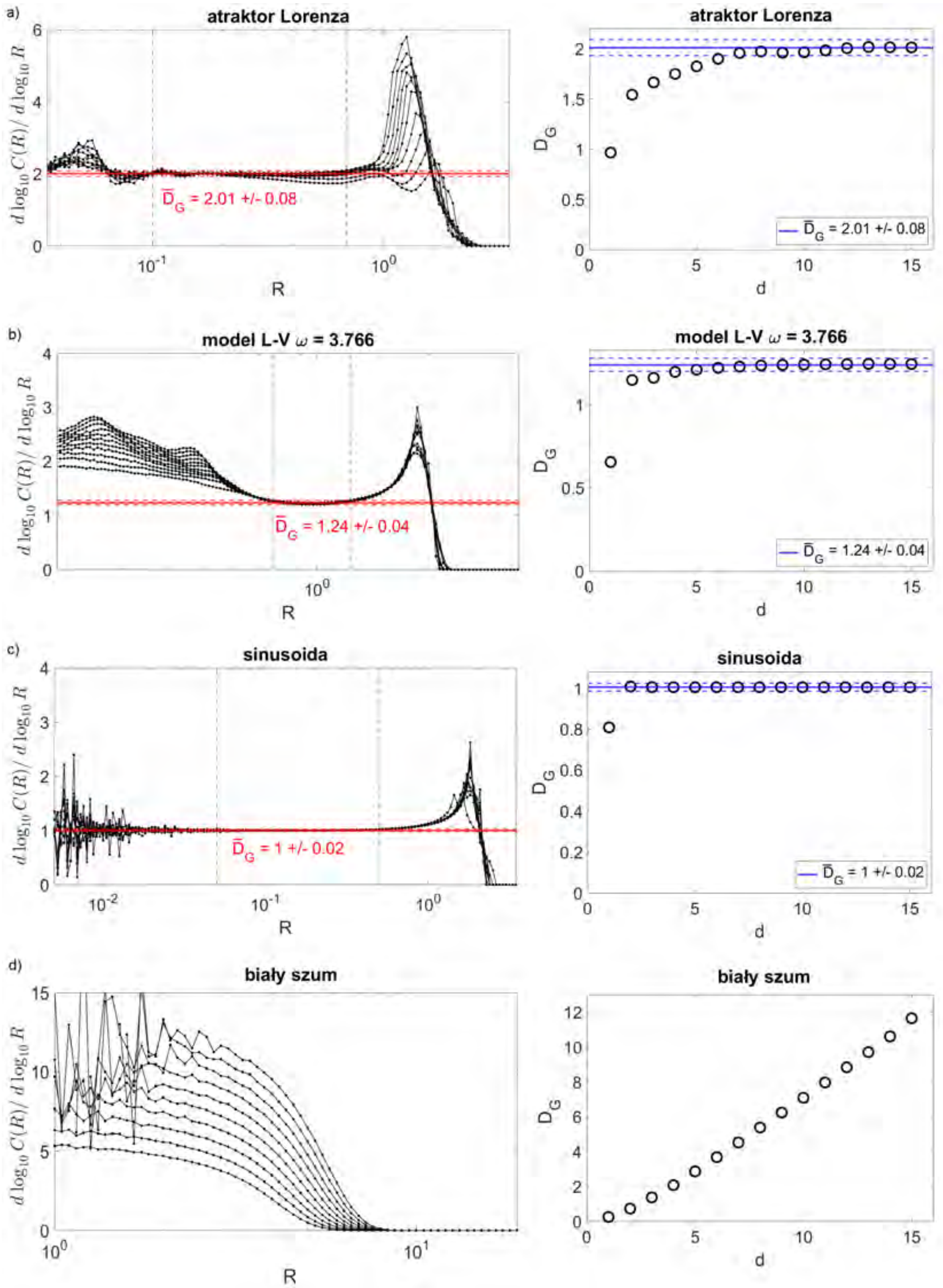
Liczba punktów znajdujących się w sąsiedztwie wybranego punktu atraktora będzie się zmieniać wraz ze wzrostem promienia R, a zmiana liczby sąsiadów będzie tym szybsza im wyższy będzie wymiar zbioru. Wymiar korelacyjny D_G wiąże się z całką $C(R)$ przy $R \to 0$ za pomocą relacji [13]:

$$C(R) \sim R^{D_G} \tag{2.15}$$

i można go wyznaczać obliczając współczynnik nachylenia funkcji $\log_{10} C(R)$ względem wartości $\log_{10} R$ [13].

Ze względu na to, że w praktyce dane doświadczalne podlegają statystycznym fluktuacjom i zawierają szum, będą one wpływać na całkę korelacyjną przy małych wartościach promienia R, dlatego należy zaniedbać ten zakres podczas badania przebiegu funkcji, pomijając obszar z silnymi oscylacjami [13].

Jeśli wymiar zanurzenia d jest wyższy niż wymiar atraktora D_A można uzyskać pełną informację o strukturze obiektu i poprawnie oszacować wymiar korelacyjny $\bar{D}_G$, gdyż dla zakresu gdzie d jest większe od wymiaru atraktora, krzywa $d\log_{10} C(R)/d\log_{10} R$ osiągnie



Rysunek 2.16: Wyniki wyznaczenia wymiaru zanurzenia metodą całki korelacyjnej w przypadku: a) atraktora Lorenza, b) wzbudzanego modelu Lotki-Volterry ($\omega = 3.766$), c) sygnału sinusoidalnego oraz d) białego szumu. Po lewej stronie pokazane zostało jak zmienia się $d\log_{10} C(R)/d\log_{10} R$ wraz ze wzrostem promienia R przy rosnącym wymiarze zanurzenia d, gdzie każda czarna krzywa ospowiada osobnej wartości d. Granice obszaru skalowania, dla którego wyznaczano D_G, zaznaczono pionowymi liniami przerywanymi. Po prawej stronie umieszczono wyniki dopasowań liniowych dla kolejnych wartości wymiaru d.

plateau. Jeśli natomiast to wymiar atraktora jest wyższy, atraktor zostaje zrzutowany na hiperpłaszczyznę i informacje o prawdziwej strukturze zostaną utracone. Dlatego szukając wymiaru fraktalnego zaczyna się od małego wymiaru zanurzenia i stopniowo zwiększa się jego wartość. W miarę zwiększania wymiaru zanurzenia rekonstrukcja atraktora prowadzi do tego, że unaocznia się coraz bardziej złożona struktura, związana z „rozprostowywaniem” trajektorii. Później, gdy struktura zostanie już całkowicie rozprostowana, wartość wymiaru korelacyjnego się stabilizuje i taki wymiar fraktalny można uznać za ostateczny. Najczęściej niezbędne jest jednak oczyszczenie danych eksperymentalnych z zawartego w nich szumu. Procedura taka została opisana w rozdziale 4.3.1 i Dodatku B.

Zakres R, dla którego funkcja $d\log_{10} C(R)/d\log_{10} R$ osiąga mniej więcej stały poziom, nazywa się obszarem skalowania, a jego wartość jest powszechnie przyjmowana jako oszacowanie wymiaru fraktalnego bazowego atraktora chaotycznego. Znalezienie najdłuższego możliwego regionu skalowania jest kluczem do oszacowania wymiaru korelacyjnego [64, 125].

Wyniki dotyczące poszukiwania wymiaru zanurzenia przy pomocy całki korelacyjnej dla kilku układów referencyjnych przedstawiono na Rysunku 2.16. W przypadkach a), b) i c) odnoszących się do atraktora Lorenza, wzbudzanego modelu Lotki-Volterry oraz sygnału periodycznego, funkcja $d\log_{10} C(R)/d\log_{10} R$ osiąga plateau, wymiar D_G wyraźnie się stabilizuje dając wyniki odpowiednio równe 2.01 ± 0.08, 1.24 ± 0.04 oraz 1 ± 0.02, gdzie różnice między wymiarami podawanymi w literaturze a oszacowanymi w tym rozdziale wynikają z ograniczeń numerycznych. Natomiast dla białego szumu wymiar D_G rośnie bez ograniczeń wraz ze wzrostem wartości wymiaru zanurzenia.

Chociaż wyznaczenie wymiaru fraktalnego metodą opisaną powyżej bywa często niedokładne, może ona posłużyć jako sprawdzian właściwego doboru opóźnienia czasowego, ponieważ tylko wtedy dla układu deterministycznego następuje ustalenie się wymiaru D_G wraz ze wzrostem wymiaru zanurzenia d [249].

2.2.6 Wykładniki Lapunowa

Wykładniki Lapunowa określają tempo zmian separacji punktów, leżących początkowo blisko siebie, która to separacja zmienia się na skutek ewolucji czasowej układu [202]. W przypadku układów chaotycznych niewielka zmiana warunków początkowych powoduje, że odległość między punktami będzie rosła wykładniczo, natomiast w przypadku układów niechaotycznych odległość ta będzie zmieniać się w czasie liniowo [13]. Przy pomocy wykładników Lapunowa można stwierdzić czy ma się do czynienia z zachowaniem chaotycznym czy też nie, co więcej można tego dokonać w sposób jednoznaczny [227]. Okażą się one zatem niezmiernie użyteczne szczególnie w przypadku danych empirycznych, gdy nie posiada się matematycznego modelu ruchu układu.

Dla n-wymiarowego odwzorowania w przestrzeni fazowej otrzymuje się co najwyżej n różnych wykładników Lapunowa, których wartości są związane z orientacją w przestrzeni fazowej (wzór 2.9), ponieważ rozciąganie trajektorii może zachodzić w dowolnym jej kierunku [180]. Zbiór wykładników zwykło nazywać się widmem [126], a widmo takie daje się obliczyć ze zrekonstruowanego atraktora [13]. Gdy wykładnik w którymś kierunku jest dodatni ma się do czynienia z rozciąganiem, czyli inaczej mówiąc oddalaniem się pobliskich punktów trajektorii. Gdy jest on ujemny obserwuje się natomiast ściskanie, czyli zbliżanie trajektorii. Praktycznie już na podstawie znaków wartości liczbowych w widmie można wnioskować o rodzaju zachowania [20].

W celu wyprowadzenia wzoru na wykładnik Lapunowa λ w przypadku jedno-wymiarowym wzięto dwa punkty leżące blisko siebie x_0 i $(x_0+\epsilon)$, gdzie ϵ to niewielka wartość. Model ewolucji tych współrzędnych w czasie opisuje funkcja f taka, że $x_{n+1}=f(x_n)$. Po N krokach odległość między punktami przy założeniu wykładniczego charakteru zmian, jest równa:

$$\left|f^N(x_0+\epsilon)-f^N(x_0)\right| \approx \epsilon e^{N\lambda}, \tag{2.16}$$

gdzie f^N oznacza funkcję f po wykonaniu N kroków. Po podzieleniu obu stron równania 2.16 przez ϵ i zlogarytmowaniu go otrzyma się następującą zależność:

$$\ln\left[\frac{\left|f^N(x_0+\epsilon)-f^N(x_0)\right|}{\epsilon}\right] \approx N\lambda. \tag{2.17}$$

Ponieważ założono, że ϵ jest niewielkie można teraz zapisać:

$$\lambda \approx \frac{1}{N}\ln\left|\frac{df^N}{dx}\right|. \tag{2.18}$$

Wartość λ wyznacza się traktując pochodną df^N/dx jako pochodną funkcji złożonej i przechodząc do granicy z N dążącym do nieskończoności:

$$\lambda = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1}\ln\left|f'(x_i)\right|. \tag{2.19}$$

Ze wzorów 2.18 i 2.19 widać, że λ pozwala mierzyć szybkość z jaką wprowadzone zaburzenie ϵ zmniejsza się lub zwiększa w czasie [13, 83].

Dla układu dysypatywnego suma wykładników Lapunowa jest ujemna [126]:

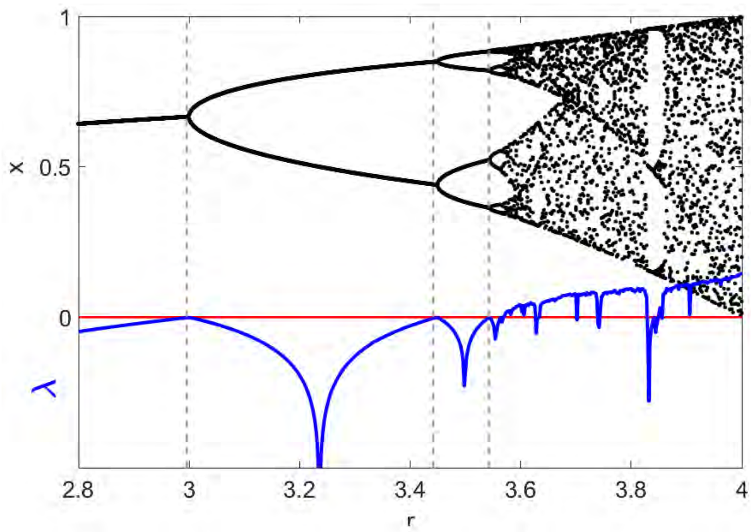
$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i < 0. \tag{2.20}$$

Wykładniki Lapunowa są też powiązane z objętością przestrzeni fazowej, a mianowicie będzie ona ewoluować według zależności [13]:

$$V = V_0 e^{(\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n)N}, \tag{2.21}$$

gdzie V_0 oznacza początkową wartość objętości przestrzeni fazowej, a $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ widmo wykładników Lapunowa.

Wykładniki Lapunowa można ściśle powiązać z typem atraktora [83]. W przypadku atraktora jednopunktowego wszystkie wykładniki będą ujemne, co oznacza, że układ ewoluuje do końcowego stanu równowagi. Dla atraktora okresowego (reprezentowanego w przestrzeni fazowej przez okrąg) jeden z wykładników będzie równy zeru, a pozostałe



Rysunek 2.17: Porównanie równoczesnej ewolucji diagramu bifurkacyjnego (kolor czarny) i największego wykładnika Lapunowa (kolor niebieski) w funkcji parametru kontrolnego r dla odwzorowania logistycznego. Pionowe szare linie reprezentują wartości parametru kontrolnego, w których dochodzi do trzech pierwszych bifurkacji.

będą ujemne. Dla atraktora prawie okresowego (reprezentowanego w przestrzeni fazowej przez torus) dwa wykładniki będą równe zero, a pozostałe będą ujemne. Zaś w przypadku dziwnego atraktora (reprezentowanego w przestrzeni fazowej przez fraktal) co najmniej jeden wykładnik będzie dodatni [20, 89]. W celu uzyskania lepszej przejrzystości wszystkie te informacje zebrano w Tabeli 2.2.

Typ atraktora	I warunek	II warunek	III warunek	IV warunek
punkt stały	$0 > \lambda_1 \geq ... \geq \lambda_n$			
okresowy	$\lambda_1 = 0$	$0 > \lambda_2 \geq ... \geq \lambda_n$		
quasi-okresowy	$\lambda_1 = 0$	$\lambda_2 = 0$	$0 > \lambda_3 \geq ... \geq \lambda_n$	
chaotyczny	$\lambda_1 > 0$	$\lambda_2 = 0$	$0 > \lambda_3 \geq ... \geq \lambda_n$	$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i < 0$

Tabela 2.2: Klasyfikacja atraktorów ze względu na wartości wykładników Lapunowa [20].

Jak pokazano na diagramie bifurkacyjnym odwzorowania logistycznego (Rysunek 2.2) obserwuje się pojawienie okien okresowych. Liczba takich okien dąży do nieskończoności [142], a ich położenie można ustalić obliczając wykładniki Lapunowa [126], co zostało zaprezentowane na Rysunku 2.17. Na diagramie odznaczają się dwa rodzaje obszarów: ten, gdzie pojawiają się tylko rozwiązania okresowe, w którym największy wykładnik Lapunowa pozostaje zawsze niedodatni oraz chaotyczny, gdzie λ przyjmuje wartości dodatnie [202].

2.2.7 Wykres rekurencyjny

Metoda wykresów rekurencyjnych RP (ang. *Recurrence Plot*) jest graficzną metodą analizy danych, służącą do pomiaru zmienności czasowej, zaproponowaną przez Eckmana i in. w 1987 r. [68]. Bazuje ona na elementarnej własności deterministycznych systemów dynamicznych jaką jest powtarzalność, która oznacza, że po pewnym czasie trajektoria powróci w pobliże punktu przestrzeni fazowej, który odwiedziła poprzednio. Jest to typowa cecha deterministycznych układów dynamicznych [177].

Mimo, że przestrzeń fazowa bywa często ponad 3-wymiarowa, technika zaproponowana przez Eckmana wciąż pozwala na wizualizację tej przestrzeni. Polega to na utworzeniu dwuwymiarej quasi-przestrzeni, do której zostaje sprowadzony rzeczywisty wymiar układu. Analiza wizualna ma na celu ocenę jakościową złożonej struktury pojawiającej się na wykresie RP, analiza ilościowa pozwala natomiast na obliczenie kilku szczególnych wskaźników. Wskaźniki te służą do wykrywania subtelnych konstrukcji niosących informacje o badanym układzie i opisują stopień złożoności badanych procesów.

Metoda RP pozwala na odróżnienie szeregu czasowego od losowego szumu, określenie stopnia rekurencji, determinizmu czy stacjonarności. Oprócz tego, za pomocą wykresów rekurencyjnych, można wykryć chaos deterministyczny w badanym układzie [99, 177]. Informacje uzyskane z diagramów są często zaskakujące i niełatwe do uzyskania innymi metodami [68].

Wykres rekurencyjny to $N \times N$ wymiarowy diagram złożony z punktów o współrzędnych (i, j). Element diagramu jest zdefiniowany jako [99]:

$$RP^d_{i,j} = H(R - \|x(i) - x(j)\|), \tag{2.22}$$

gdzie $x(i)$ oznacza i-ty punkt orbity opisujący stan układu w d-wymiarowej przestrzeni, $x(j)$ punkt położony wystarczająco blisko punktu $x(i)$, $i, j = 1, 2, ..., N$, N – długość serii danych, R to odległość graniczna oznaczająca wartość progową promienia lub rozmiar sąsiedztwa, $\|.\|$ – norma, a $H(k)$ – funkcja Heaviside'a.

Aby otrzymać diagram rekurencyjny należy najpierw wybrać wymiar zanurzenia i skonstruować d-wymiarowy zbiór z wartościami opóźnionymi (metoda Takensa). Następnie wybiera się promień R i tworzy hiperkulę (tzn. kulę w wymiarze d) o środku w punkcie $x(i)$. W kuli tej powinna znaleźć się odpowiednia liczba punktów $x(j)$. Aby móc poprawnie zinterpretować powstałe struktury, należy wybrać możliwie jak najmniejszą wartość promienia R – wtedy otrzyma się diagram rekurencyjny z niezbyt gęsto rozłożonymi punktami [243]. Ponieważ w danych eksperymentalnych występuje szum, który zniekształca trajektorie, przyjęło się przyjmować promień kuli równy kilku procentom średnicy zajmowanej przestrzeni fazowej $L_{śr}$ [1]:

$$R = \epsilon L_{śr}, \tag{2.23}$$

gdzie ϵ oznacza wielkość progu. Można także zwiększać rozmiar promienia osobno dla każdego punktu $x(i)$ tak, by znaleźć co najmniej kilkudziesięciu sąsiadów, podobnie jak postepował Eckmann w [68]. Do badań układów referencyjnych opisanych w tej rozprawie przyjęto właśnie to kryterium, poszukując najbliższych 50-ciu sąsiadów.

Próg ϵ jest kluczowym parametrem RP. Jeśli jego wartość będzie zbyt mała wykres nie będzie zawierał wystarczającej liczby punktów rekurencyjnych i nie będzie można się wiele dowiedzieć o badanym układzie. Z drugiej strony, jeśli wartość progu będzie za duża, zbyt wiele punktów będzie sąsiadowało ze sobą, przez co na szukaną strukturę diagramu nałoży się rozkład punktów odpowiadający przypadkowym korelacjom punktów przestrzeni fazowej. Dlatego ważny jest kompromis przy wyborze progu [163].

Po wybraniu odpowiedniego promienia można stworzyć diagram rekurencyjny, tzn. w punkcie o współrzędnych (i, j) wstawić kropkę jeśli $x(j)$ leży wewnątrz hiperkuli o promieniu R i środku $x(i)$ [99]. Wykres RP będzie często zachowywał symetrię wzdłuż przekątnej $i = j$, gdyż z założenia elementy $x(i)$ i $x(j)$ powinny leżeć blisko siebie. Pełna symetria jednak nie wystąpi, bo nie wymaga się aby promienie sąsiedztwa w przypadku $x(i)$ i $x(j)$ były sobie równe [68, 99].

Wykres rekurencyjny obrazuje momenty, w których stany danego układu powtarzają się, czyli gdy trajektoria przestrzeni fazowej powraca w sąsiedztwo danego obszaru [99]. Zatem dostarcza on pewnego rodzaju informacji o korelacji czasowej [68]. Po wykreśleniu diagramu rekurencyjnego można zacząć analizę od interpretacji wizualnej, która pozostaje jednak subiektywna, więc wskazane jest dodatkowo wykonanie analizy ilościowej (RQA, ang. *Recurrence Quantification Analysis*). Analizę taką zaproponowali Webber i Zbilut w latach 90-tych XX wieku [241, 242].

Na Rysunku 2.18 przedstawiono wykresy RP stworzone dla kilku układów referencyjnych. Pierwszy z nich, dotyczący białego szumu, zawiera jednorodny rozkład pojedynczo ułożonych punktów, ponieważ nie istnieje koherencja między nimi [99]. Dla układu Lorenza (przypadek b)) na diagramie obserwuje się teksturę szachownicy. Odpowiada to faktowi, że w tym układzie trajektoria kreśli spirale wokół dwóch stałych punktów układu [99]. Liczne, krótkie odcinki równoległe do przekątnej $i = j$, które tworzą teksturę w postaci wąskich pasów, stanowią potwierdzenie deterministycznej i chaotycznej natury badanego szeregu [249]. Na RP dla wzbudzanego modelu Lotki-Volterry (przypadek c)) występują odcinki[6] równoległe do przekątnej $i = j$ związane z oscylującą ewolucją populacji ofiar.

Występowanie na diagramie obszarów o niskiej gęstości punktów może sygnalizować np. nagłe zmiany lub wystąpienie ekstremalnych wartości w badanym układzie [99, 249]. Pojawienie się rozległych obszarów o niskiej gęstości punktów jest cechą układów niestacjonarnych. Również koncentracja struktury wzdłuż przekątnej $i = j$ świadczy o niestacjonarności badanego szeregu. Zostało to pokazane na Rysunku 2.18 d), gdzie układ niestacjonarny reprezentuje funkcja: $f(x) = \sin(x/0.987)\exp(-x/1000)$.

Na RP dotyczącym układu okresowego (przypadek e)) lub quasi-periodycznego (przypadek f)) pojawiają się poszerzone odcinki równoległe do przekątnej $i = j$, złożone z wielu krótkich odcinków pionowych, oddalone o te same odległości. Odległości między pogrubionymi odcinkami odpowiadają okresowi oscylacji układu. Natomiast występowanie różnych odległości ujawnia istnienie procesów quasi-okresowych [163].

Sygnały okresowe (np. sinusoidalne pokazane na przykładach d), e) i f)) powodują

[6] Długości odcinków na RP są wyrażane przez liczbę sąsiadujących ze sobą punktów.

powstawanie na RP bardzo długich odcinków ukośnych, sygnał chaotyczny (przykład b)) bardzo krótkich odcinków ukośnych, a sygnały stochastyczne (takie jak biały szum z przykładu a)) w ogóle nie powodują powstania odcinków ukośnych (chyba że parametr R byłby wybrany niepoprawnie i przyjmowałby zbyt wysoką wartość) [243].

Na Rysunku 2.19 przedstawiono dwa diagramy RP modelu L-V w przypadku gdy parametr kontrolny został dobrany w taki sposób, aby układ był w stanie chaotycznym. Powstałe struktury różnią się od struktur widocznych na Rysunku 2.18 c), gdzie układ nie znajduje się w stanie chaotycznym, tym, że ukośne odcinki są na nich zdecydowanie krótsze oraz następuje zagęszczenie punktów w pewnych regionach wykresu.

Odcinki prostopadłe do przekątnej $i = j$ mogą świadczyć o źle dobranym wymiarze zanurzenia d. Natomiast odcinki poziome lub pionowe sygnalizują okresy, w których stan układu praktycznie się nie zmienia. Jeśli wokół takich odcinów pojawiają się obszary pozbawione punktów może to oznaczać istnienie w układzie intermitencji opisanych w podrozdziale 2.2.9. Pionowe i poziome odcinki lub klastry odpowiadają sekwencjom stanów układu o powolnych zmianach (tzw. stanów laminarnych) [163].

Ruch chaotyczny różni się od stochastycznego tym, że występują w nim korelacje krótkoczasowe [13], co odzwierciedla istnienie krótkich odcinków rówoległych do przekątnej $i = j$ na wykresach RP. Jak można się spodziewać, im krótsze odcinki równoległe do przekątnej, tym mniej przewidywalny jest system. W wyidealizowanym pozbawionym szumu układzie, odwrotność długości najdłuższego odcinka (poza przekątną $i = j$) jest proporcjonalna do największego wykładnika Lapunowa [163].

Analiza ilościowa wykresów rekurencyjnych przy pomocy różnych parametrów jest bardzo ważna, gdyż eliminuje subiektywność przedstawionej powyżej identyfikacji tekstur [243]. Pierwszy z tych parametrów, współczynnik powrotu RR (ang. *Recurrence Rate*) lub inaczej stopień rekurencji, jest wyrażany w procentach i określony poprzez stosunek liczby punktów znajdujących się na wykresie RP do liczby wszystkich możliwych punktów [99]:

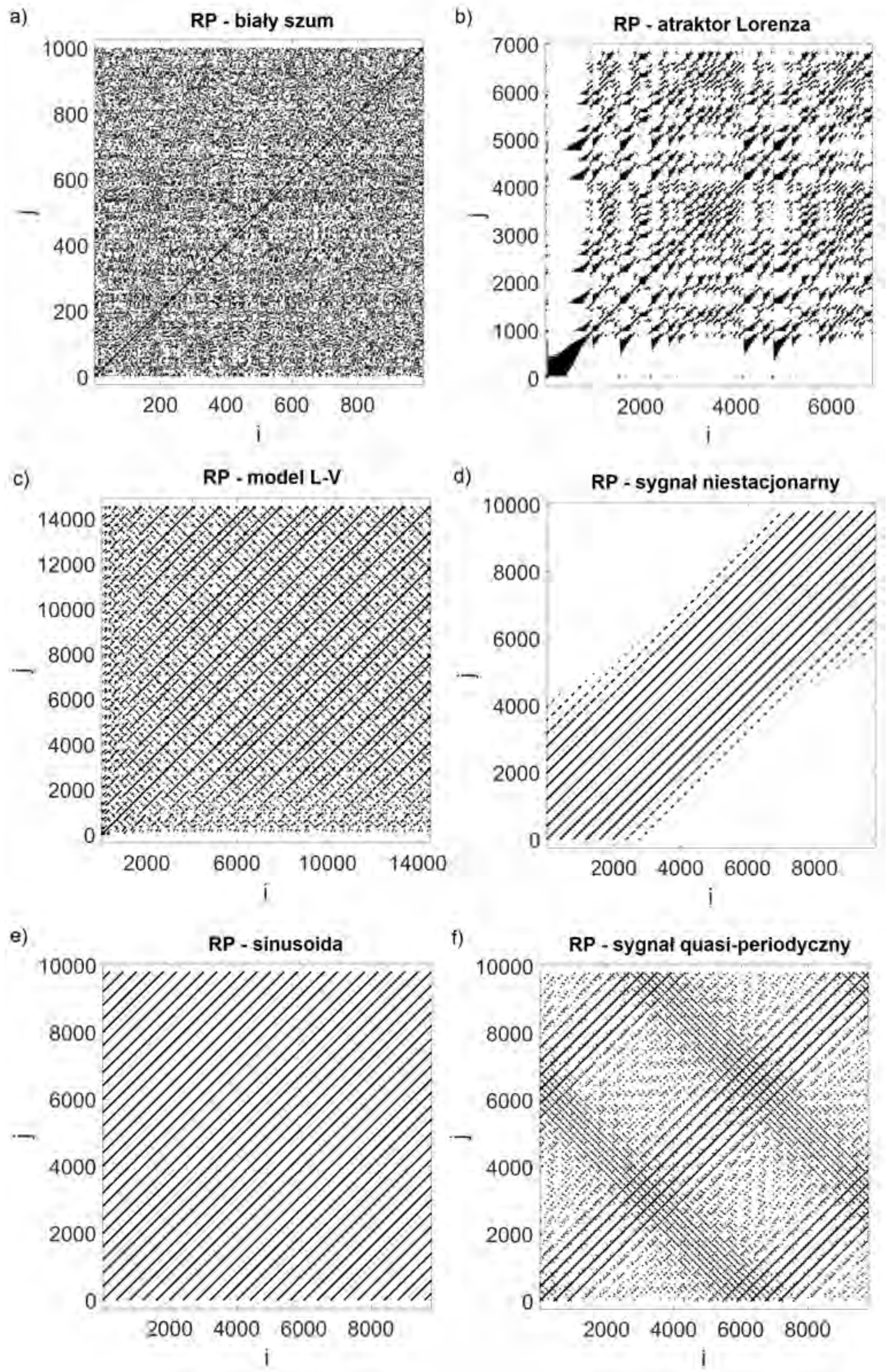
$$RR = \frac{1}{N^2} \sum_{i,j=1}^{N} RP_{i,j}^{d} \cdot 100\%. \tag{2.24}$$

Zatem ta zmienna rekurencyjna określa ilościowo procent punktów powracających do obszaru o określonym promieniu. Współczynnik powrotu mieści się w zakresie od 0% (brak powracających punktów) do 100% (wszystkie punkty powracają) [243].

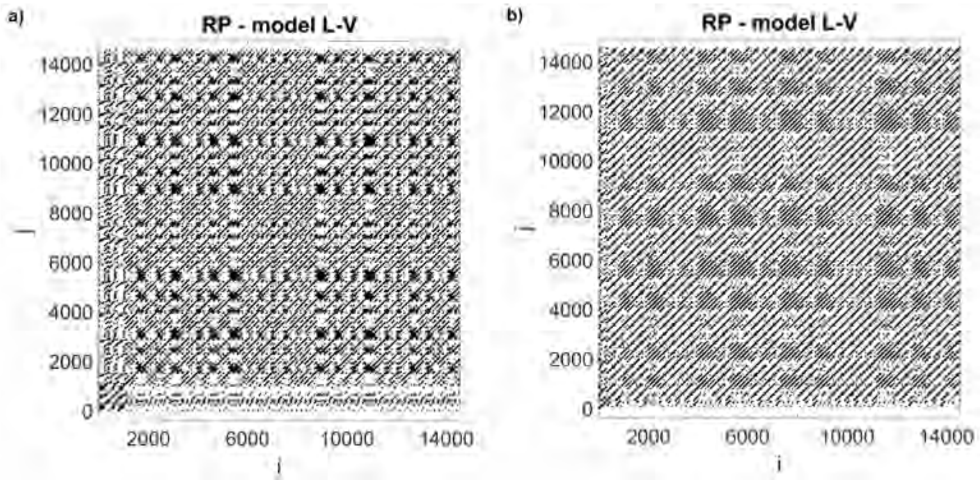
Odcinki ukośne równoległe do przekątnej $i = j$ pojawiają się na RP wtedy, gdy trajektoria odwiedza ten sam obszar przestrzeni fazowej, czyli wskazują istnienie zachowań rekurencyjnych. Natomiast ich długość wiąże się z prawdopodobieństwem wystąpienia chaosu deterministycznego. Oznaczając przez L_{max} maksymalną długość odcinka ukośnego (poza przekątną), można wprowadzić wskaźnik DIV zdefiniowany jako [163]:

$$DIV = \frac{1}{L_{max}}, \tag{2.25}$$

który ma związek z wykładniczym rozbieganiem się (dywergencją) trajektorii przestrzeni fazowej, a więc z sumą dodatnich wykładników Lapunowa. Im szybciej odcinki sąsiednich



Rysunek 2.18: Wykresy rekurencyjne dla: a) białego szumu, b) atraktora Lorenza, c) wzbudzanego modelu Lotki-Volterry ($\omega = 2.7$), d) sygnału niestacjonarnego, e) sygnału periodycznego na przykładzie sinusoidy i e) sygnału quasi-periodycznego.



Rysunek 2.19: Wykresy rekurencyjne dla wzbudzanego modelu Lotki-Volterry dla: a) $\omega = 3.766$, b) $\omega = 2.98$. Przy obydwu wartościach parametru kontrolnego występuje zachowanie chaotyczne w układzie.

trajektorii rozchodzą się, tym krótsze są odcinki ukośne na RP i tym większa jest miara DIV [163, 164]. Natomiast krótkie odcinki odpowiadające sekwencjom: $(i,j),(i+1,j+1),...,(i+k,j+k)$ takim, że fragment trajektorii: $x(j),x(j+1),...,x(j+k)$ jest dla maksymalnego k bliski fragmentowi: $x(i),x(i+1),...,x(i+k)$ mają związek z największym dodatnim wykładnikiem Lapunowa (jeśli taki występuje w rozpatrywanym układzie) [163]. Gdyby wartości tworzące d-wymiarowy wektor $x(i)$ odpowiadały losowemu przebiegowi odcinki takie w ogóle by nie występowały.

W pracy Marwana [163] pokazano, że L_{max} może służyć jako estymator dla dolnej granicy sumy dodatnich wykładników Lapunowa. Ponieważ dodatnie wykładniki Lapunowa mierzą tempo, w jakim trajektorie się rozchodzą, i są znakiem rozpoznawczym dynamicznego chaosu, zatem im krótszy L_{max}, tym bardziej chaotyczny (mniej stabilny) sygnał [163, 243].

Dla układów z ewolucją czasową z dryfem, czyli układów dynamicznych, które nie są w pełni jednorodne, bo charakteryzują się powolnymi zmianami parametrów, diagram RP będzie manifestował się koncentracją punktów wokół przekątnej $i = j$ podczas, gdy nastąpi zanik punktów wraz z oddalaniem się od niej. Stanie się tak, ponieważ w takim układzie występuje postępująca dekorelacja [68, 99]. Zatem można zdefiniować kolejny parametr, którym jest $TREND$ utożsamiany z powolną zmianą parametrów układu:

$$TREND = \frac{\sum_{k=1}^{N}\left(k - \frac{N}{2}\right)\left(RR_k - \langle RR_k \rangle\right)}{\sum_{k=1}^{N}\left(k - \frac{N}{2}\right)^2}, \tag{2.26}$$

gdzie $\langle\rangle$ oznacza średnią po wszystkich k, a RR_k jest współczynnikiem powrotu liczonym dla danego odcinka ukośnego k równoległego do przekatnej $i = j$:

$$RR_k = \frac{1}{N-k}\sum_{j-i=k}^{N-k} RP_{i,j}^{d}. \tag{2.27}$$

Zdefiniowany w powyższy sposób trend określa w sposób ilościowy stopień stacjonarności systemu. Dla diagramu RP zawierającego równomiernie rozłożone punkty, wartości wskaźnika $TREND$ będą bliskie zeru [243].

Następny wskaźnik, DET, pokazuje procentowy udział powracających punktów, które tworzą na wykresie odcinki ukośne o długości l równoległe do przekątnej $i = j$ [240]:

$$DET = \frac{\sum_{l=l_{min}}^{N} lP(l)}{\sum_{i,j=1}^{N} RP_{i,j}^{d}} \cdot 100\%, \tag{2.28}$$

gdzie l_{min} jest minimalną długością odcinka ukośnego, a wartość $P(l)$ jest rozkładem długości odcinków ukośnych:

$$P(l) = \sum_{i,j=1}^{N} (1 - RP_{i-1,j-1}^{d})(1 - RP_{i+l,j+l}^{d}) \prod_{k=0}^{l-1} RP_{i+k,j+k}^{d}. \tag{2.29}$$

Rozpatrując wzór 2.28 można zauważyć, że jeśli na wykresie będą istniały tylko nieprzerywane odcinki ukośne równoległe do przekątej $i = j$, wartość DET wyniesie 100 %, a jeśli nie będzie żadnych takich odcinków, tylko punkty rozproszone, to wartość DET będzie wynosiła 0 %. Analizując dane należy zwrócić uwagę, że duże wartości DET mogą również wynikać z przyjęcia zbyt dużej wartości promienia R.

Pojawienie się na RP odcinka ukośnego o długości l oznacza, iż odcinek trajektorii pozostaje w pobliżu innego odcinka trajektorii powstałego w innym czasie podczas l kroków czasowych; zatem te odcinki ukośne są związane z rozbieżnością (dywergencją) segmentów trajektorii. Zrozumiałe jest zatem, że jako miarę determinizmu (przewidywalności) systemu wprowadza się stosunek punktów rekurencji, które tworzą struktury równoległe do przekątnej $i = j$ (o długości co najmniej l_{min}) do wszystkich punktów rekurencji. Dla $l_{min} = 1$ stosunek ten wyniesie jeden.

Średnia długość odcinków ukośnych L to średni czas, w którym dwa odcinki trajektorii znajdują się blisko siebie i można ją zinterpretować jako średni czas przewidywania:

$$L = \frac{\sum_{l=l_{min}}^{N} lP(l)}{\sum_{l=l_{min}}^{N} P(l)}. \tag{2.30}$$

Następny parametr, $ENTR$, to entropia informacyjna Shannona:

$$ENTR = -\sum_{l=l_{min}}^{N} p(l) ln[p(l)], \tag{2.31}$$

gdzie prawdopodobieństwo $p(l)$ definiuje się jako:

$$p(l) = \frac{P(l)}{\sum_{l=l_{min}}^{N} P(l)}, \tag{2.32}$$

a $P(l)$ jest rozkładem długości odcinków ukośnych równoległych do przekątnej $i = j$.

Ponieważ $ENTR$ stanowi miarę złożoności struktury diagramu w odniesieniu do odcinków ukośnych, w przypadku prostych układów okresowych, w których wszystkie linie ukośne mają jednakową długość, entropia wynosi 0 [163, 243]. Procesy chaotyczne będą się charakteryzowały dość niskim poziomem entropii i wysokim wskaźnikiem rekurencji.

Długości odcinków ukośnych równoległych do przekątnej $i = j$ są bezpośrednio związane z jeszcze innym wskaźnikiem chaosu – entropią Kołmogorowa h_K [163]. Dolną granicę tej entropii, oznaczoną jako K_2, można obliczyć badając rozkład długości odcinków ukośnych z nakładaniem. Do pewnego zakresu długości l będzie on liniowy. W tym zakresie należy znaleźć nachylenie [240]:

$$\alpha_K \propto \frac{-\ln P(l)}{l}, \tag{2.33}$$

a następnie wyznaczyć K_2 z relacji:

$$K_2 \cong \frac{\alpha_K}{\tau}, \tag{2.34}$$

gdzie τ jest opóźnieniem czasowym wybranym do konstrukcji wykresu RP. Oszacowana w ten sposób wartość K_2 stanowi dolny estymator największego wykładnika Lapunowa λ_{max}.

Następny parametr, laminarność LAM, wyraża procentowy udział stanów laminarnych wśród wszystkich stanów układu; określa on udział punktów tworzących na wykresie odcinki pionowe:

$$LAM = \frac{\sum_{\nu=\nu_{min}}^{N} \nu P(\nu)}{\sum_{i,j=1}^{N} RP_{i,j}^{d}} \cdot 100\%, \tag{2.35}$$

gdzie rozkład występowania odcinków pionowych o długości ν przybiera postać:

$$P(\nu) = \sum_{i,j=1}^{N} (1 - RP_{i,j-1}^{d})(1 - RP_{i,j+\nu}^{d}) \prod_{k=0}^{\nu-1} RP_{i,j+k}^{d}. \tag{2.36}$$

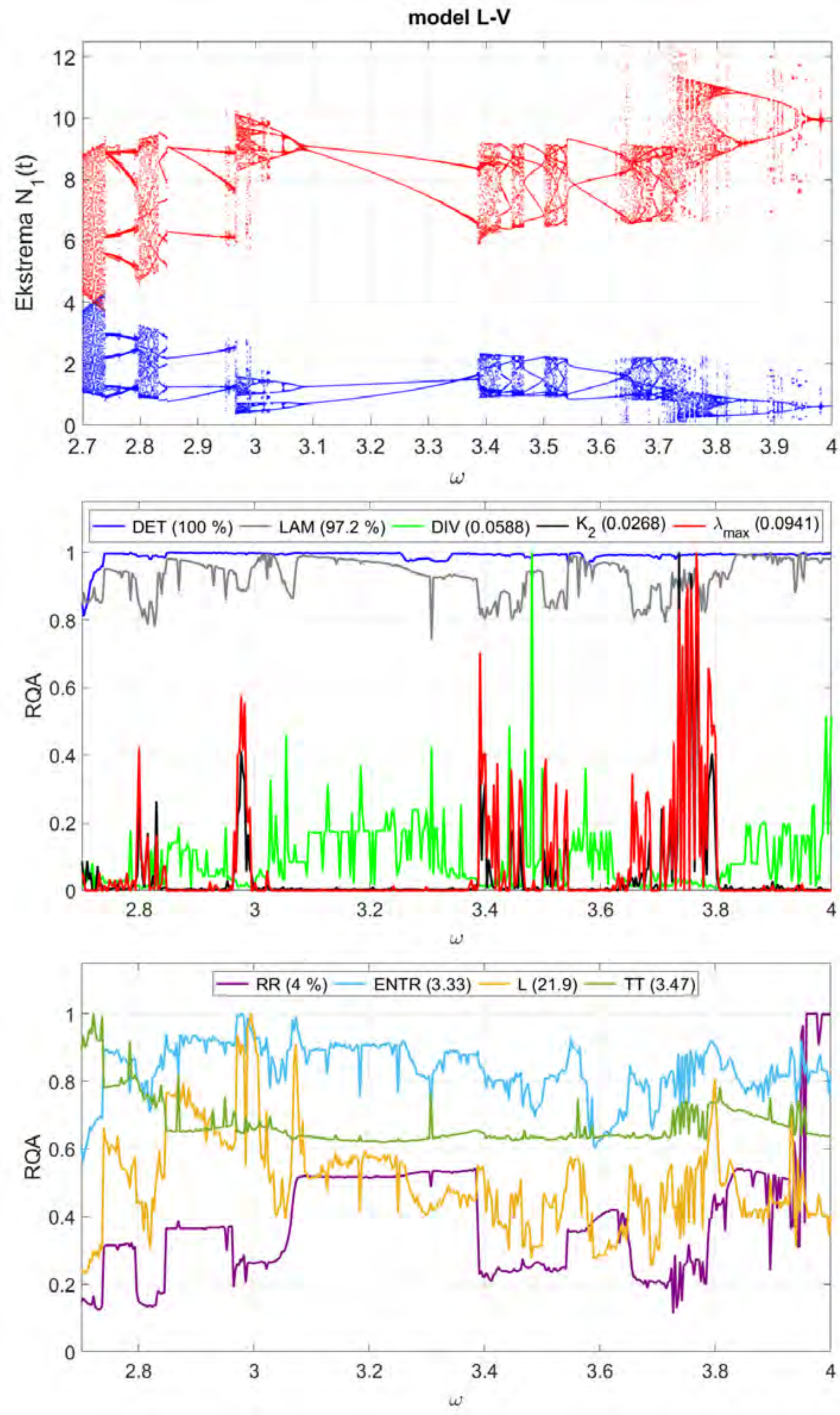
Wartość LAM zmniejszy się, jeśli RP będzie się składać z większej liczby pojedynczych punktów niż struktur pionowych. Gdy na wykresie nie będą występowały odcinki pionowe, co będzie oznaczać, że układ nie będzie wykazywał stabilnych zachowań nawet w krótkich skalach czasowych, to wartość LAM będzie równa 0 %.

Średnia długość struktur pionowych jest nazywana czasem pułapkowania (TT ang. *Trapping Time*):

$$TT = \frac{\sum_{\nu=\nu_{min}}^{N} vP(\nu)}{\sum_{v=v_{min}}^{N} P(\nu)}, \tag{2.37}$$

ponieważ szacuje ona średni czas, przez który system pozostaje w określonym stanie [163].

Na Rysunku 2.20 przedstawiono zmiany wartości omówionych w tym rozdziale parametrów analizy rekurencyjnej RQA w odniesieniu do zmian parametru kontrolnego wzbudzanego układu Lotki-Volterry. Dodatkowo na tym rysunku umieszczono również diagram bifurkacyjny oraz największy wykładnik Lapunowa, aby zaznaczyć przedziały, w których układ pozostaje w stanie chaotycznym. Można wywnioskować, że wartości parametru RR



Rysunek 2.20: a) Diagram bifurkacyjny modelu L-V. b) Wyniki analizy RQA obejmujące: determinizm (DET), laminarność (LAM) i dywergencję (DIV), entropię (K_2) oraz największy wykładnik Lapunowa (λ_{max}). c) Wyniki analizy RQA obejmujące: stopień rekurencji (RR), entropię Shannona ($ENTR$), średnią długość odcinków ukośnych (L) oraz średnią długość konstrukcji pionowych (TT).

pozostają stabilne dla tych wartości ω dla których na diagramie bifurkacyjnym występują okna (obszary niechaotyczne). Wartości zmiennych DIV, L oraz $ENTR$ pozostają dość zaszumione w całym zakresie badanych wartości parametru kontrolnego ($2.7 \leq \omega \leq 4$), a wartość TT od $\omega = 2.85$ aż do 3.74 poza pojawiającymi się pikami pozostaje na mniej więcej stałym poziomie. Obserwując zachowanie wszkaźnika DET można stwierdzić, że układ w postaci wzbudzanego modelu Lotki-Volterry jest deterministyczny, a analizując wskaźnik LAM, że występują w nim stany lamianarne. Na wykresie b) widać, że wartości największego wykładnika Lapunowa wykazują podobny trend wraz z rosnącą wartością parametru kontrolnego jak wartości wskaźnika K_2, co potwierdza, że zostały one wyznaczone prawidłowo. Obydwa parametry λ_{max} i K_2 przyjmują dodatnie wartości, gdy w układzie obserwowany jest chaos.

2.2.8 Symetryzowany wzór kropkowy (SDP)

Oprócz opisanego w poprzednim rozdziale diagramu RP istnieją też inne graficzne metody przedstawiania danych w celu uwydatnienia pewnych ich cech. Jedną z nich jest symetryzowany wzór kropkowy SDP (ang. *Symmetrized Dot-Pattern*) zaproponowany przez Pickovera w 1990 r. [186], który pozwala zbadać bieżące oraz przyszłe stany badanego procesu i między innymi może być wykorzystany do wykrywania procesów zawierających elementy zachowań chaotycznych.

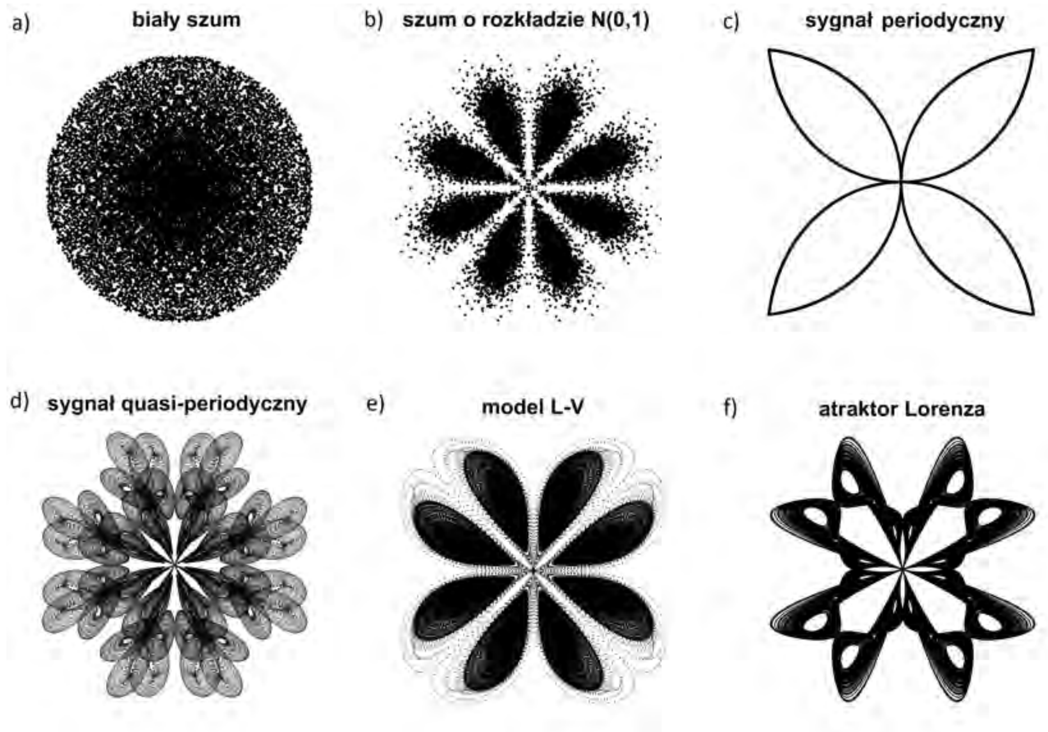
SDP to metoda obrazowania zmian amplitudy i częstotliwości sygnału w łatwej do zrozumienia reprezentacji wizualnej, która odwzorowuje znormalizowany przebieg czasowy w symetryczne wzory na wykresie biegunowym. W tym odwzorowaniu punktowi przebiegu czasowego $x(i)$ przypisuje się składową radialną $r(i)$, a sąsiedniemu punktowi $x(i+\tau)$ dwie składowe kątowe $\theta(i)$ oraz $\phi(i)$. Transformacja biegunowa przyjmuje postać:

$$\begin{cases} r(i) = \frac{x(i)-x_{min}}{x_{max}-x_{min}}\zeta \\ \\ \theta(i) = \Theta + \frac{x(i+\tau)-x_{min}}{x_{max}-x_{min}}\zeta \\ \\ \phi(i) = \Theta - \frac{x(i+\tau)-x_{min}}{x_{max}-x_{min}}\zeta \end{cases} \tag{2.38}$$

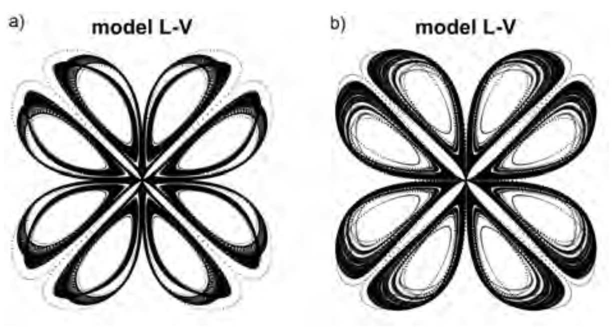
gdzie τ jest opóźnieniem czasowym wyrażonym w jednostkach okresu próbkowania (odowiadającym indeksowi punktu szeregu), Θ kątem obrotu od wybranej linii odniesienia, ζ tzw. przyrostem wykresu, a x_{max} i x_{min} najwyższą i najniższą wartością szeregu czasowego. Po tej transformacji otrzymuje się tzw. podstawowy wzór, który następnie obraca się m-krotnie aby stworzyć w pełni symetryczny diagram [165, 250].

Diagram SDP dla procesów deterministycznych będzie mieć zwarty kształt, a punkty będą rozproszone w niewielkim stopniu. Jednakże gdy (tak jak to ma miejsce w danych uzyskanych z eksperymentu) występuje szum, krawędzie będą rozmazane [177].

Rysunek 2.21 przedstawia przykładowe diagramy SDP dla kilku układów referencyjnych. We wszystkich przedstawionych w tym rozdziale wykresów przyjęto następujące wartości: $m = 4$, $\Theta = 2\pi$ i $\zeta = \pi/4$. W przypadku a) dotyczącym SPD dla białego

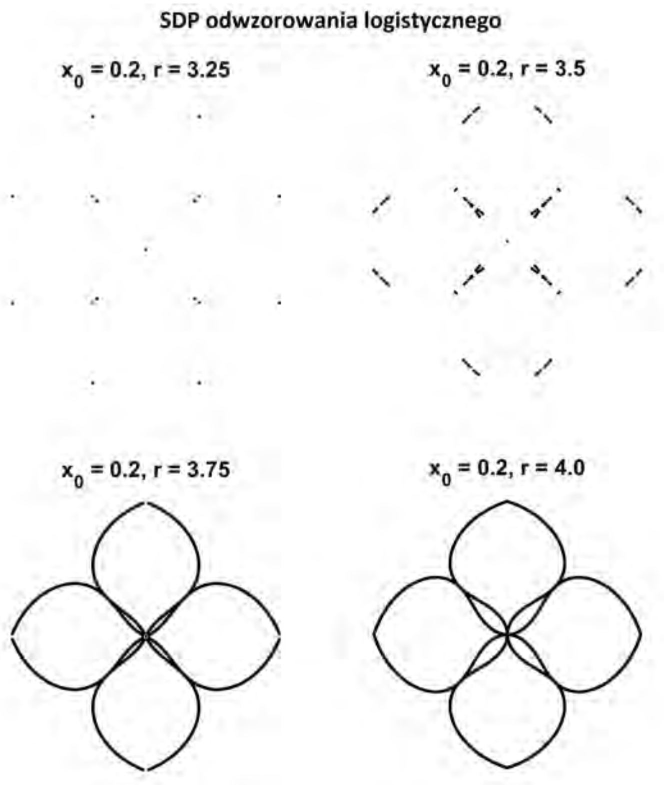


Rysunek 2.21: Wykresy SDP dla: a) białego szumu, b) szumu o rozkładzie normalnym, c) sygnału periodycznego na przykładzie sinusoidy, d) sygnału quasi-periodycznego, e) wzbudzanego modelu Lotki-Volterry ($\omega = 2.7$) i f) atraktora Lorenza.



Rysunek 2.22: Wykresy SDP wzbudzanego modelu Lotki-Volterry dla: a) $\omega = 3.766$, b) $\omega = 2.98$. Przy obydwu wartościach parametru kontrolnego występuje zachowanie chaotyczne w układzie.

szumu punkty układają się niemal równomiernie nie tworząc żadnych charakterystycznych wzorów, ponieważ w procesie całkowicie losowym nie występują żadne składowe deterministyczne. Dla szumu o rozkładzie normalnym (przypadek b)) na diagramie kontury są rozmazane, punkty koncentrują się w środkach wzorów i rzadziej występują na obrzeżach. Natomiast wykresy dotyczące procesów zawierających więcej składowych deterministycznych powinny kumulować się w określonych obszarach i charakteryzować małym rozproszeniem punktów (na Rysunku 2.21 c) pokazano to na skrajnym przypadku

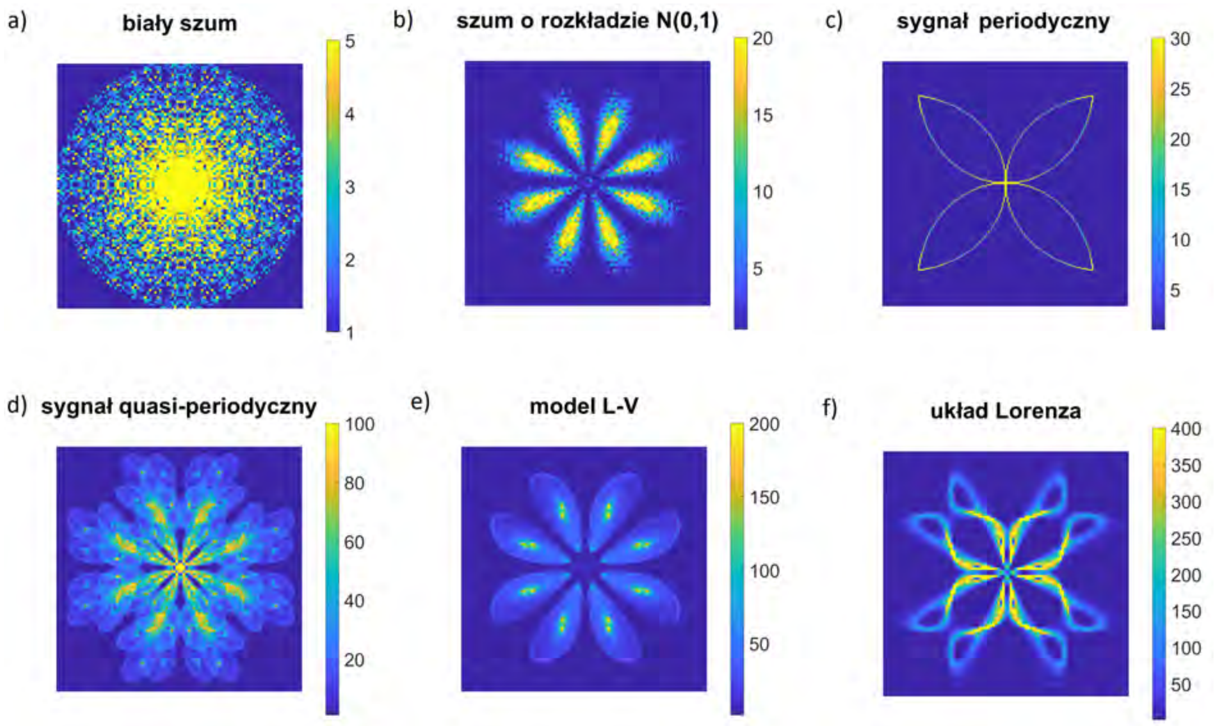


Rysunek 2.23: Wykresy SDP dla rozwiązania równania logistycznego dla czterech różnych wartości parametru kontrolnego r.

funkcji sinusoidalnej). Na tym samym rysunku w przypadku d) umieszczono SDP sygnału quasi-periodycznego, którego struktura jest bardzo złożona i uporządkowana w charakterystyczny sposób, nieco podobny, ale bardziej złożony do struktury modelu L-V widocznej na Rysniku 2.21 e). Specyficzne struktury są widoczne dla atraktora Lorenza (przypadek f)). Charakteryzują się one skupieniem punktów w pewnych obszarach, co wynika z zagęszczenia punktów trajektorii fazowych na skrzydłach atraktora.

Na Rysunku 2.22 umieszczono SDP dla modelu L-V, gdzie wybrane wartości parametru kontrolnego powodują, że układ jest w stanie chaotycznym. Powstałe struktury znacznie odbiegają od przypadku niechaotycznego (Rysunek 2.21 e)). Punkty układają się w kształt płatków bez wypełnienia ich wewnętrznych powierzchni.

Rysunek 2.23 ilustruje ewolucję diagramu SDP wraz ze zmianą wartości parametru kontrolnego w przypadku odwzorowania logistycznego. Poszczególne kształty można porównać z Rysunkiem 2.2, na którym znajduje się diagram bifurkacyjny tego odwzorowania, dzięki któremu można zidentyfikować przedziały występowania zachowania chaotycznego. Wraz ze wzrostem parametru r, a zarazem wraz ze wzrostem liczby rozwiazań równania logistycznego, pojawia się coraz więcej punktów i obraz staje się bardziej złożony. Wyraźnie widać, że wraz ze wzrostem liczby bifurkacji wzrasta liczba nienakładających się punktów, a gwałtowny wzrost pojawia się wraz z dojściem układu do chaosu ($r = 3.75$



Rysunek 2.24: Gęstościowe wykresy SDP dla: a) białego szumu, b) szumu o rozkładzie normalnym, c) sygnału periodycznego na przykładzie sinusoidy, d) sygnału quasi-periodycznego, e) wzbudzanego modelu Lotki-Volterry ($\omega = 2.7$) i f) atraktora Lorenza.

i $r = 4.0$).

Można również analizować gęstość punktów na diagramie SDP [249], co zostało przedstawione na Rysunku 2.24, gdzie użyto tych samych przykładów, które zaprezentowano na Rysunku 2.21. Taki sposób reprezentacji danych wnosi dodatkową informację o badanym układzie. Gęstość punktów na wykresie SDP będzie malała wraz ze wzrostem promienia $r(i)$, ponieważ ta sama liczba punktów przypada na coraz większy obszar. Biorąc to pod uwagę można stwierdzić, że dla białego szumu (przypadek a)) punkty rozkładały się mniej więcej równomiernie, natomiast dla sinusoidy (przypadek c)) lub atraktora Lorenza (przypadek f)) na diagramie gęstościowym istnieją wyraźnie uprzywilejowane miejsca. Na wykresie dotyczącym modelu L-V (przypadek e)) punkty grupują się w pewnych obszarach i pojawiają się pewne zagęszczenia punktów wewnątrz nich. Dla szumu o rozkładzie normalnym (przypadek b)) punkty skupiają się najbardziej we wnętrzach powstałych kształtów. Natomiast dla sygnału quasi-periodycznego (przypadek d)) widoczny jest efekt nakładania się przesuniętych struktur.

Metoda SDP może zostać wzbogacona o analizę ilościową opierającą się na mierze gęstości i rozrzutu punktów. Podobnie jak dla RP można wyliczyć entropię Shannona:

$$ENTR_{SDP} = -\sum_{p_i>0} p_i log_2(p_i). \tag{2.39}$$

By wyznaczyć wartość $ENTR_{SDP}$ należy podzielić wykres na N^2 kwadratów i wyznaczyć liczbę punktów w każdym z nich określając prawdopodobieństwo p_i znalezienia punktu w każdym kwadracie. W kolejnych iteracjach zwiększa się liczbę kwadratów 4-krotnie. Procedurę wykonuje się aż do uzyskania pomijalnych zmian wartości entropii. Jak można się spodziewać dla procesów deterministycznych liczba kwadratów niezawierających żadnego punktu będzie rosła szybciej niż dla procesów losowych. Duże wartości $ENTR_{SDP}$ oznaczają zatem układy losowe, a mniejsze deterministyczne.

2.2.9 Zachowania intermitentne

Gdy regularne zachowanie układu zostaje przerwane okresami zachowań chaotycznych ma się do czynienia ze zjawiskiem intermitencji [227]. Badania prowadzone nad tym zagadnieniem wskazują, że dla wartości parametru kontrolnego r nieprzekraczającej wartości krytycznej r_{kr} układ posiada atraktor okresowy i zachowuje się w regularny sposób. Tuż po przekroczeniu tej wartości układ działa w sposób uporządkowany, ale pojawiają się również okresy chaotyczne zwane wybuchami. Rozkład czasu trwania tych wybuchów jest zbliżony do rozkładu Gaussa, a średni czas między wybuchami zależy od różnicy wartości parametru kontrolnego oraz wartości krytycznej i maleje on w miarę wzrostu tej różnicy, aż ruch stanie się całkowicie chaotyczny [227].

W doświadczeniach dotyczących wielu różnych układów fizycznych obserwuje się, że ich widmo w zakresie wysokich częstości można przybliżyć zależnością $1/f^k$, gdzie f jest częstotliwością, a k parametrem zazwyczaj bliskim jedności. To powszechne zjawisko nazywane jest szumem typu $1/f$, a intermitencja stanowi uniwersalny mechanizm prowadzący do występowania takiego szumu [202].

W latach 1979-1980 dzięki pracy Pomeau i Manneville powstał teoretyczny model intermitencji, z którego wynika, że mogą istnieć trzy jej typy w zależności od tego w jaki sposób orbita okresowa utraciła swoją stabilność. Najczęściej spotykany jest typ I, który pojawia się np. w odwzorowaniu logistycznym czy modelu Lorenza. Intermitencja typu II jest związana z bifurkacją Hopfa, a typu III z odwrotną bifurkacją podwajania okresu [227], lecz te intermitencje nie będą tu omawiane.

Zjawisko intemitencji powszechnie obserwuje się w plazmie brzegowej tokamaków lub stelleratorów. Np. w sferycznym tokamaku SUNIST (ang. *Sino-UNIted Spherical Tokamak*) korzystając z sondy Langmuira zaobserwowano intermitencje polegającą na pojawianiu się stanu turbulentnego o okresie trwania 30 μs. Natężenie intermitencji zmieniało się wraz ze zmianą gęstości plazmy [244]. Tego rodzaju zachowania obserwuje się w wielu innych urządzeniach: WEST (ang. *Tungsten Environment in Steady-state Tokamak*), Alcator C-Mod, TORPEX (ang. *TORoidal Plasma EXperiment*) itd. Interesujące jest to, że posiadają one prawie te same cechy niezależnie od maszyny [84].

Znacznie prostszy układ składający się z uziemionej anody stanowiącej ścianę komory wyładowczej, elektrody oraz żarnika był niezależnie analizowany przez Chiriaca [49] i Stan [217]. Doświadczenie Stan odbywało się w środowisku argonowym, gdzie prąd wyładowania był utrzymywany na stałym poziomie, a napięcie na katodzie stanowiło parametr kontrolny. Dla niskich wartości tego napięcia obserwowano tylko oscylacje plazmy związane z podwójną warstwą elektrostatyczną, a wraz z jego wzrostem wzrastała rola oscylacji związanych z niestabilnością jonowo-akustyczną. Badając różne warunki eksperymentalne Chiriac [49] wykazał, że niestabilność jonowo-akustyczna może ewoluować chaotycznie.

Występowanie chaosu w plazmie jest ściśle związane z jej turbulencjami, które stanowią jeden z najważniejszych problemów w tej dziedzinie. W doświadczeniu przeprowadzonym przez Fenga i in. [73] do plazmy argonowej wytwarzonej przez wyładowanie prądu stałego między anodą a katodą wprowadzano niewielkie ilości sześciochlorku siarki aby wytworzyć jony ujemne. Uzyskane wyniki potwierdziły występowanie intermitentnego chaosu typu I w plazmie wieloskładnikowej oraz potwierdziły istnienie szumu typu $1/f$.

Kolejne badania tego typu prowadził Ghosh, który zaobserwował intermitentny chaos w plazmie wyładowania jarzeniowego. Badany przez niego układ ewoluował wraz ze wzrostem napięcia wyładowania od regularnego typu oscylacji relaksacyjnych o większej amplitudzie do nieregularnego typu oscylacji o mniejszej amplitudzie, ale wokół wyższej średniej [86].

2.3 Scenariusze przejścia do chaosu i próby jego kontroli

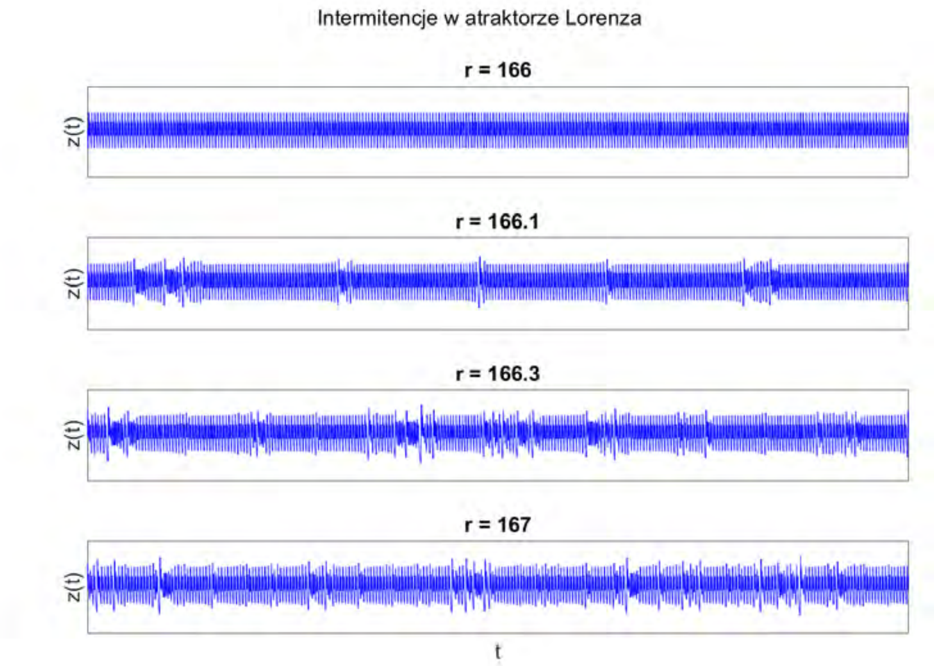
Układ może zmieniać swoje zachowanie jakościowo wraz z niewielką zmianą wartości parametru kontrolnego. Na początku układ funkcjonuje regularnie, potem wraz ze wzrostem tego parametru może nastąpić stopniowe lub nagłe przejście do chaosu [227]. Na początku rozdziału 2.3 umieszczono krótki opis kilku uniwersalnych dróg powstawania chaosu: mechanizm podwajania okresu, intermitencję i quasi-okresowość [227]. A na końcu tego rozdziału zamieszczono krótkie wyjaśnienie w jaki sposób może się odbywać kontrola pojawiającego się chaosu.

Ciąg bifurkacji podwajania okresu nazywany też bifurkacyjnym schematem Feigenbauma jest jednym z powszechnych scenariuszy przejścia między atraktorem regularnym a chaotycznym [13, 126, 227]. Jak pokazano w rozdziale 2.2.2 odwzorowanie logistyczne przechodzi do chaosu w ten sposób [13]. Scenariusz podwajania okresu można scharakteryzować za pomocą liczb uniwersalnych dla danej klasy funkcji opisującej zachowanie układu. Oznacza to, że pewne własności odwzorowań pozostaną niezależne od ich konkretnej postaci [72]. Np. stała Feigenbauma stanowi stosunek odstępów pomiędzy kolejnymi wartościami parametru kontrolnego w punktach, w których dochodzi do bifurkacji:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{r_n - r_{n-1}}{r_{n+1} - r_n} = 4.6692016091029909..., \tag{2.40}$$

gdzie pierwsza bifurkacja ma miejsce dla r_1, druga dla r_2 itd. [126]

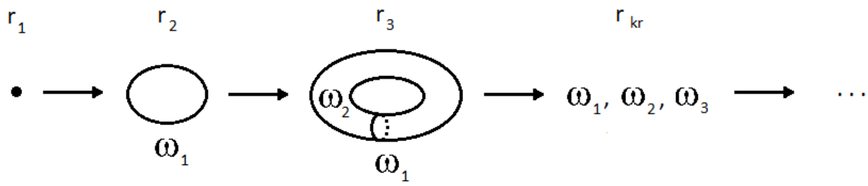
Drugi scenariusz przejścia w stan chaotyczny dotyczy zjawiska przerywania sygnału zachowującego się regularnie przypadkowo rozłożonymi, stosunkowo krótkimi okresami nieregularnymi [202]. W modelu opisującym intermitencję tego rodzaju ma się do czynienia z sytuacją, gdzie dla wartości parametru kontrolnego mniejszych od wartości krytycznej r_{kr} układ posiada orbitę okresową stabilną, natomiast przy wartości r_{kr} orbita



Rysunek 2.25: Przykład zwiększania się liczby intermitencji przy niewielkich zmianach parametru kontrolnego r w przypadku atraktora Lorenza.

traci swoją stabilność powodując, że układ zaczyna zachowywać się nieregularnie. W tym chaotycznym ruchu zdarza się, że układ wraca czasem w pobliże regularnej orbity, co powoduje, że staje się przez jakiś czas uporządkowany. Takie typowe dla scenariusza przejścia do chaosu drogą intermitencji mieszanie się obu rodzajów ruchu przedstawiono na Rysunku 2.25 na przykładzie z-towej składowej modelu Lorenza, gdzie wraz z niewielką zmianą parametru r w układzie zaczyna pojawiać się coraz więcej intermitencji. Ponieważ natężenie niestabilności jest proporcjonalne do różnicy między r i r_{kr}, oznacza to, że przy większych wartościach r zwiększa się względny udział zachowań chaotycznych. W końcu gdy wartość r znacznie przekroczy r_{kr} charakter zmieni się na całkowicie chaotyczny [159, 227]. Opisany wyżej scenariusz prowadzi do powstania szumu typu $1/f$ znajdowanego w układach nieliniowych [202]. Ponieważ względny udział zachowań chaotycznych podlega wzrostowi wraz ze wzrostem r, intermitencja oznacza ciągłe przejście od ruchu regularnego do chaotycznego [202].

Kolejny scenariusz, opracowany przez Ruelle, Takensa i Newhouse w 1978 r., polega na tym, że ruch regularny z trzema częstościami po przekroczeniu pewnej wartości krytycznej staje się niestabilny i wystarczy niewielkie zaburzenie aby przeszedł w stan chaotyczny. Model tego przejścia chaotycznego oparty jest na tzw. bifurkacji Hopfa, która po przekroczeniu każdego progu parametru kontrolnego wprowadza do układu nową częstotliwość podstawową ω_i. Rysunek 2.26 ilustruje ideę przejścia do chaosu opartą na bifurkacji Hopfa. Początkowemu brakowi zmienności odpowiada punkt, następnie pojawia



Rysunek 2.26: Schemat przejścia do chaosu oparty na bifurkacji Hopfa, gdzie pojedynczy punkt oznacza stan równowagi, ruch z jedną częstością odpowiada trajektorii po okręgu, a z dwoma częstościami trajektorii leżącej na torusie w trójwymiarowej przestrzeni fazowej. Po n-krokach powstaje n-torus.

się pierwsza częstotliwość podstawowa, której odpowiada dwuwymiarowy cykl graniczny. W kolejnej bifurkacji pojawiają się dwa prostopadłe cykle graniczne i orbita okresowa przebiega po torusie w przestrzeni trójwymiarowej [103, 202, 227]. Po trzech bifurkacjach Hopfa ruch przestaje być stabilny i trajektorie zaczynają być przyciągane przez dziwny atraktor [202].

Oprócz wymienionych powyżej dróg do chaosu istnieją jeszcze inne scenariusze (np. przejście do chaosu poprzez kryzysy [102, 234]).

W sytuacjach praktycznych raczej należy unikać wpadania urządzenia w zachowanie chaotyczne, czyli hamować występowanie niepożądanych oscylacji mogących sprzyjać pojawieniu się wysokich amplitud oscylacji prądowych. Te niechciane oscylacje to nieokresowe drgania o nieregularnych kształtach, przypominające na pierwszy rzut oka przebiegi stochastyczne. Jeśli wahania oscylacji są niewielkie nie powinny one wpływać znacząco na pracę silnika. Jednak przy dużych amplitudach oscylacje mogą już niekorzystnie wpływać na działanie silnika oraz stają się niebezpieczne dla jednostki zasilającej [255]. Dlatego należy je stłumić i spowodować, aby cały układ zachowywał się w pożądany sposób. Chociaż ze względu na to, że chaos oznacza nieprzewidywalność, idea sterowania nim może wydawać się dziwnym pomysłem, istnienie atraktora znacznie ułatwia to zadanie. Poprzez wykorzystnie własności atraktora w świadomy sposób można wprowadzić układ w obszar, w którym urządzenie poprawi efektywność swojej pracy [227, 180, 83, 20].

Aby podjąć się zadania kontroli chaosu, pierwszym krokiem powinno być odkrycie istnienia atraktora, aby móc wykorzystać jego cechy. Korzysta się więc z metody współrzędnych opóźnionych dla eksperymentalnego szeregu danych w celu odtworzenia atraktora, a następnie tworzy przekrój Poincarégo. Następnie, po odnalezieniu na przekroju niestabilnych orbit okresowych, wybiera się pobliskie stabilne orbity, przy których urządzenie pracuje najlepiej. W celu poprawy wydajności urządzenia można znajdować punkt stały, zmieniać orbity niestabilne na stabilne lub unikać pewnych obszarów, gdzie układ wchodzi w zachowanie chaotyczne [20]. Takie podejście może się udać, gdy ma się możliwość zmian wartości parametru kontrolnego z dużą precyzją. Nazywa się go wtedy parametrem sterującym i za jego pomocą sprowadza się dynamikę całego układu w kierunku najkorzystniejszej orbity okresowej [227].

Idea sterowania chaosem polega na ciągłym dostosowywaniu parametru sterującego do aktualnej dynamiki układu, ponieważ różne rodzaje orbit są poprzeplatane i możliwe są częste przejścia układu na orbitę chaotyczną [227]. Ułatwieniem jest to, że orbity niestabline i okresowe leżą blisko siebie, więc wystarczy niewielkie dostrojenie parametru. Po zastosowaniu sterowania orbita wejdzie najpierw w pewien chaotyczny ruch przejściowy, a następnie powinna przejść w podbliże pożądanej orbity [180].

Czasami obecność chaosu może być w pewnym sensie korzystna. Mianowicie gdyby urządzenie działało nieefektywnie, ale stabilnie, to nie istniałaby możliwości poprawy jego działania poprzez niewielkie zmiany parametru sterującego, a jedynym wyjściem w tej sytuacji byłoby dokonanie kosztownych przeróbek konstrukcyjnych [227].

Przykładem urządzenia, którego działanie można ulepszyć zmuszając je do generowania przebiegów okresowych jest laser. Okazało się, że złożone okresowe fale można ustabilizować poprzez zmianę natężenia mocy wyjściowej lasera, podczas gdy szczegółowy model układu nie był wówczas znany. W 1991 r. po raz pierwszy udało się uzyskać w mikrosekundowych skalach czasowych dynamiczną kontrolę chaotycznego, wielowymiarowego systemu optycznego i w wyniku tych działań poprawić moc lasera [196].

Więcej informacji dotyczącej tematyki sterowania ukadów chaotycznych można znaleźć w [20], w tej pracy doktorskiej temat ten nie będzie dalej zgłębiany.

Rozdział 3

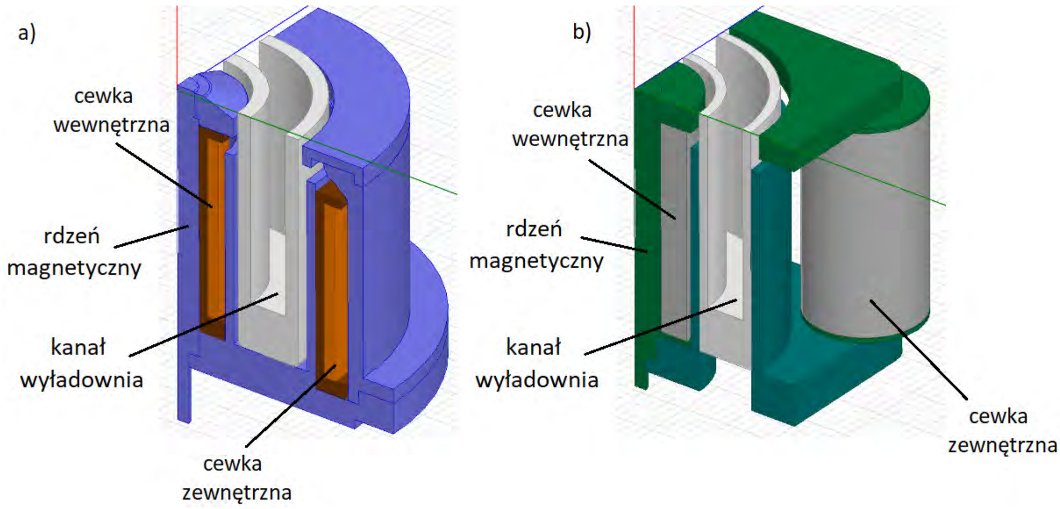
Aparatura i metodyka badań

Rozdział 3.1 zawiera opis dwóch prototypów silników, które były testowane w ramach niniejszej rozprawy. W rozdziale 3.2 znajduje się natomiast opis sond elektrycznych, które zostały wykonane i wykorzystane do zbierania jonów. Oprócz tego w rozdziale 3 znajduje się opis procedur pomiarowych oraz analiza osiągów uzyskanych przez oba silniki.

3.1 Polskie prototypy silników Halla

Do budowy silnika KLIMT użyto wyselekcjonowanych materiałów i zadbano o właściwe połączenia termiczne, co pozwoliło na uzyskanie skutecznego odprowadzania nadmiaru ciepła z jego wnętrza do dedykowanego radiatora. Równowaga termiczna silnika ustaliła się w granicach bezpieczeństwa użytych materiałów, a stabilność termiczna utrzymywała się we wszystkich zadanych warunkach pracy. Na podstawie uzyskanych wyników wywnioskowano, że krypton stanowi atrakcyjną alternatywę dla ksenonu [221] i zgłoszono do ESA (Europejskiej Agencji Kosmicznej) wniosek o kolejny projekt badawczy, HIKHET, dotyczący optymalizacji silnika Halla.

Ponieważ w badaniach opisanych w niniejszej rozprawie doktorskiej wykorzystane zostały dwa modele silnika Halla (III wersja prototypowego układu KLIMT i VI wersja prototypowego układu HIKHET), za każdym razem, gdy w tekście będzie mowa o silniku KLIMT lub silniku HIKHET będzie on wskazywał na jedną z tych wersji. Modułowa konstrukcja wszystkich prototypów z projektu KLIMT zapewniała możliwość zmiany takich parametrów silnika jak długość kanału, kąt nachylenia katody i topografia pola magnetycznego. Idea ta została zachowana, a nawet rozwinięta, w projekcie HIKHET, co pozwoliło modyfikować konfigurację silnika w znacznie szerszym zakresie – np. elementy obwodu magnetycznego, dystrybutor gazu i anodę zaprojektowano jako niezależne podzespoły, zapewniając w ten sposób większą swobodę przy poszukiwaniu optymalnej konfiguracji silnika. Ponadto można było wpływać na zmianę kształtu profilu linii pola magnetycznego poprzez zmianę kształtu nabiegunników. Co więcej, zastosowano różne rodzaje dystrybutorów gazu oraz różne geometrie izolatorów jak i kilka wersji samej anody. Stąd też bierze się wielorakość wersji prototypów z drugiego projektu.

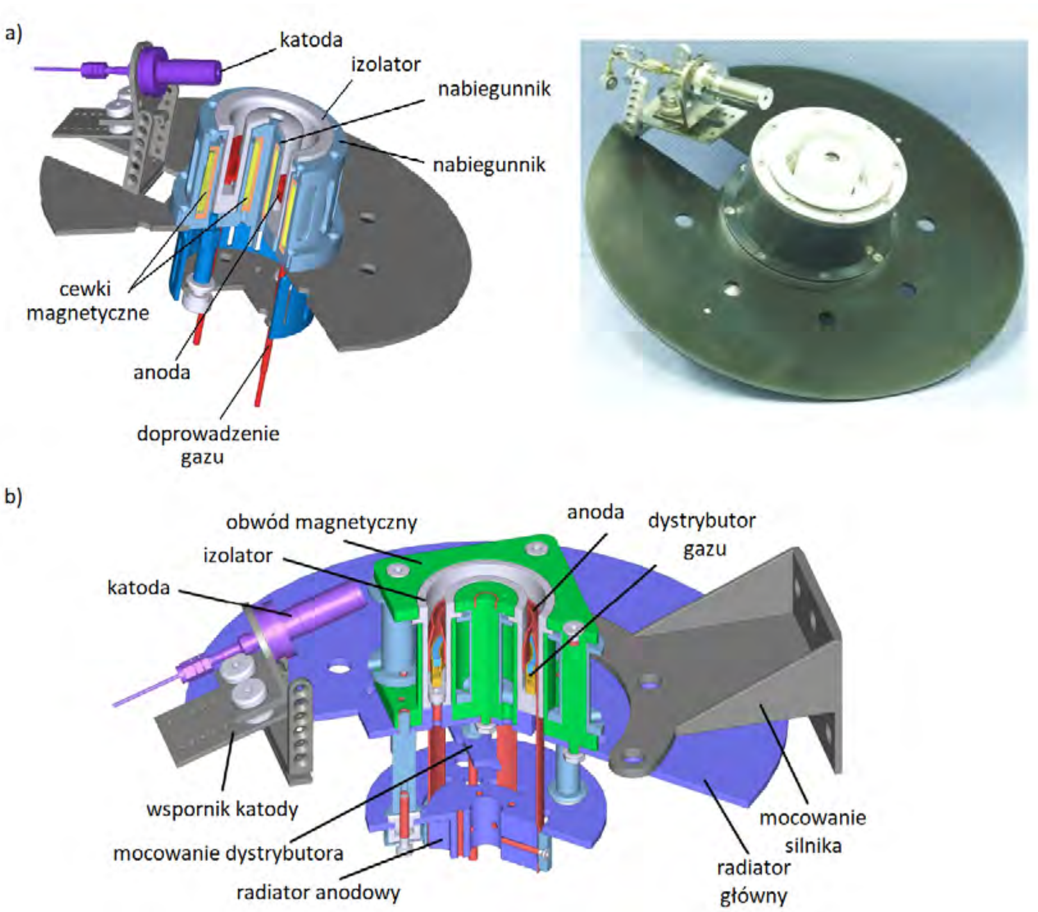


Rysunek 3.1: Schemat obwodu magnetycznego w przypadku: a) III protypu projektu KLIMT, b) VI wersji prototypu projektu HIKHET. Modele silników wykonane zostały przez Macieja Jakubczaka za pomocą programu *VariCAD*.

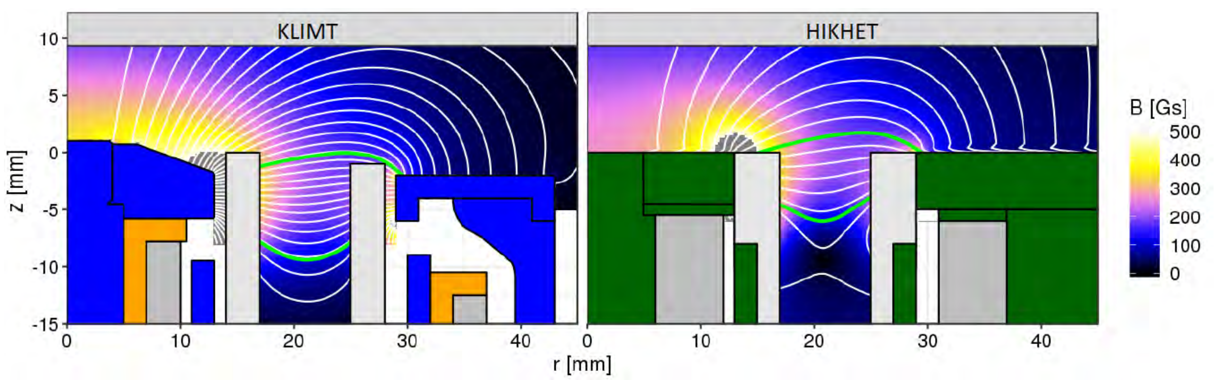
W silnikach Halla, o których mowa w tej pracy, plazma jest generowana w pierścieniowym kanale pomiędzy dwoma koncentrycznymi cylindrami dielektrycznymi, których odpowiednie promienie wewnętrzne i zewnętrzne w przypadku obu prototypów HIKHET i KLIMT były sobie równe. Anoda znajduje się na jednym końcu kanału, a katoda emisyjna na drugim. Prezentowane tutaj modele pracowały z katodą usytuowaną asymetrycznie – mechanicznie jej podstawa była związana z głównym radiatorem. Gaz roboczy był wprowadzany do kanału od strony anody. W silniku KLIMT było to zapewnione przez zestaw równomiernie rozmieszczonych miniaturowych otworów wydrążonych w anodzie, a w silniku HIKHET przez oddzielny dystrybutor. Anoda HIKHET jest zbudowana z dwóch cienkich rurek o odmiennych promieniach, tak aby dystrybutor gazu mógł zostać umieszczony między nimi. Anoda ta jest podłączona do dodatkowego radiatora znajdującego się z tyłu silnika.

Wymaganą topografię pola magnetycznego zapewnia obwód magnetyczny [255]. Bieguny magnetyczne silników Halla znajdują się na wyjściu kanału. W HIKHET użyto czterech zewnętrznych cewek. Natomiast jak pokazano na Rysunkach 3.1 i 3.2 silnik KLIMT posiadał tylko jedno uzwojenie zewnętrzne położone koncentrycznie względem kanału wyładowania, co spowodowało, że objętość obwodu magnetycznego była większa o 30 % niż w HIKHET. Zakładano, że zmiana konfiguracji korzystnie wpłynie na rozpraszanie ciepła ze względu na odkryte powierzchnie ekranów magnetycznych otaczających cewki. W celu zaizolowania miedzianych zwojów owinięto je koszulką z wysokiej klasy włókna szklanego TST 450C.

Porównując wyniki symulacji topografii pola magnetycznego HIKHET i KLIMT widoczne na Rysunku 3.3 można było zauważyć, że jego maksymalna wartość jest podobna dla obu silników, jednak pomiary teslametrem wykazały, że miejsce występowania najsilniejszego pola magnetycznego zostało przesunięte o 2 mm na zewnątrz kanału, co z zało-



Rysunek 3.2: a) Po lewej stronie model silnika KLIMT, po prawej zdjęcie prototypu [145]. b) Schemat budowy silnika HIKHET. Na modelach zaznaczone zostały najważniejsze elementy silników.



Rysunek 3.3: Topografia pola magnetycznego silnika KLIMT (po lewej) i HIKHET (po prawej). Symulacje wykonał Maciej Jakubczak z IFPiLM w programie *ANSYS Maxwell*. Kolory poszczególnych elementów odpowiadają kolorom z Rysunku 3.1.

żenia powinno zmniejszyć erozję kanału poprawiając przy tym wydajność silnika.

W przypadku silników KLIMT i HIKHET maksymalne pole $B_{r,max}$ znajdujące się w pobliżu płaszczyzny otworu wylotowego kanału wyładowania wynosi około 250 Gs. Dla takich wartości częstotliwość cyklotronowa elektronu jest rzędu $\Omega_e = eB/m_e \approx 700\ MHz$, co odpowiada, przy średniej energii elektronu wynoszącej 20 eV, promieniowi Larmora równemu $r_e = v_e/\Omega_e = 0.63\ mm$. Przy tych samych warunkach częstotliwość cyklotronowa jonów w obszarze wylotowym wynosi $\Omega_i = eB/M_{Kr} = 4.58\ kHz$. Promień Larmora dla jonów $r_i = v_i/\Omega_i$ zawiera się zatem w przedziale od 6.95 do 69.5 cm dla prędkości jonów od 2 do 20 km/s [26]. Z powyższych rozważań wynika, że pole magnetyczne silnie wpływa na ruch elektronów, a wpływ pola magnetycznego na trajektorie jonów jest niewielki.

Dla $U_d = 500\ V$ i $B = 250\ Gs$, promień Larmora r_e jest równy około 0.3 cm. Jeśli założy się, że $v_e/v_i \approx 10$ to długość strefy jonizacji L wyniesie około 1 cm. Dla jonu Kr o energii 300 eV, czas przejścia przez tą strefę wyniesie 0.38 μs (wzór 1.41), czyli fluktuacje związane z czasem przejścia jonów w KLIMT i HIKHET powinny mieć częstotliwości rzędu 100 kHz.

Podczas omawianej w rozprawie doktorskiej serii eksperymentów przepływ masowy kryptonu z anody wynosił $\dot{m}_a = 0.8$ mg/s, zatem ze wzoru 1.42 wynika, że prąd jonowy powinien być rzędu $I_i \approx 0.9\ A$. Dla całkowitego prądu wyładowania $I_d = 1\ A$ prąd elektronów wchodzących do kanału powien zatem wynieść 0.1 A. W prototypach silnika, którego dotyczy analiza, promień kanału zewnętrznego R_2 wynosił 50 mm, a wewnętrznego R_1 34 mm. Zatem pole przekroju kanału było równe $A = \pi(R_2^2 - R_1^2) \approx 42\ cm^2$. Zakładając, że prędkość gazu wychodzącego z anody wynosiła około $v_{a,0} = 200\ m/s$, gęstość cząstek neutralnych w tym obszarze powinna być w przybliżeniu równa [24]:

$$n_a = \frac{\dot{m}_a}{m_i}\frac{1}{Av_{a,0}} \approx 6.8 \times 10^{18}\ m^{-3}. \tag{3.1}$$

Dla elektronów o energii 10 eV przekrój czynny na wymianę pędu wynosi $\sigma \approx 2.7 \times 10^{-19}\ m^2$ [37]. Zakładając obliczoną powyżej gęstość cząstek, częstotliwość zderzeń elektronów z gazem neutralnym w obszarze anodowym wyniesie $\nu_e = n_a < \sigma v_e > \approx 2.4 \times 10^6\ s^{-1}$. Odpowiada to średniej drodze swobodnej elektronu równej około 80 cm (dla energii 10 eV). Ponieważ z powodu jonizacji w obszarze wylotowym gęstość gazu jest ponad dziesięciokrotnie mniejsza, średnia droga swobodna elektronów będzie ponad dziesięciokrotnie dłuższa [24].

W testowanych tutaj silnikach Halla z warstwą magnetyczną wyładowanie (plazma) jest podtrzymywane w kanale dielektrycznym zbudowanym z ceramiki. W przypadku polskich prototypów zadecydowano o zbudowaniu ścian z azotku boru. Natomiast katoda, która była stosowana została wyprodukowana przez amerykańską firmę *HeatWave Labs*.

3.2 Instrumenty pomiarowe

Zgodnie z zaleceniami znalezionymi w literaturze [34, 24, 105, 115, 166, 170] zaprojektowane zostały trzy sondy elektryczne, dzięki którym istniała możliwość zebrania przebiegów prądu jonowego oraz profili jonowych służących do obliczenia wartości całkowitego prądu jonowego oraz określenia rozbieżności wiązki plazmowej.

3.2.1 Kubek Faraday'a

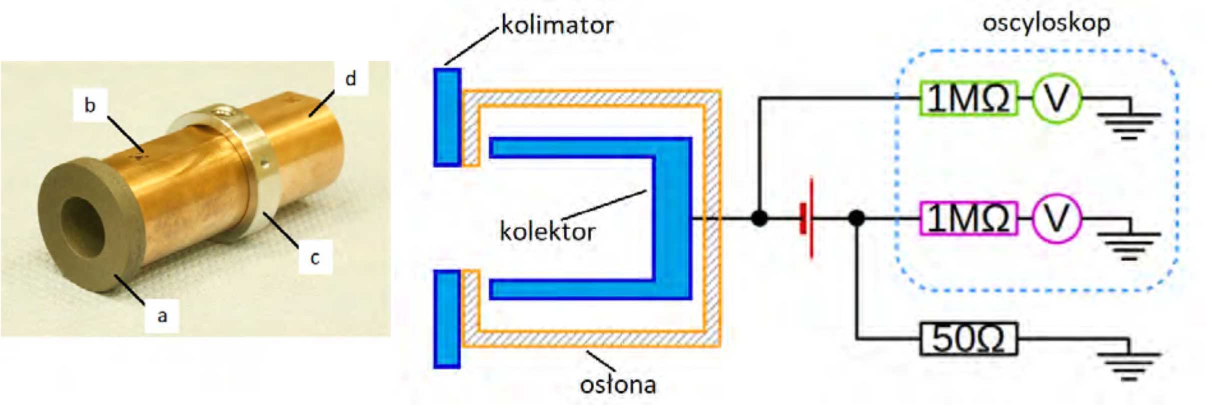
Jak zostało wspomniane w rozdziale 1.2.2, konstrukcja kolektora kubka Faraday'a przede wszystkim ma na celu ograniczenie dodatkowego prądu wnoszonego przez elektrony wtórne emitowane z jego powierzchni w wyniku bombardowania jonami. Dodatkowo taka geometria sondy w przeciwieństwie do sondy płaskiej powoduje wychwytywanie jonów pod dobrze zdefiniowanym kątem bryłowym [115, 166]. Ponadto sonda wyposażona w kolimator jest mniej wrażliwa na jony o niskiej energii pochodzące z wymiany ładunkowej, których gęstość zależy w dużym stopniu od ciśnienia tła komory próżniowej, czyli kolimator łagodzi wpływ środowiska testowego [34, 105].

Biorąc pod uwagę typową wartość gęstości prądu jonowego na wyjściu kanału silnika rzędu 0.1 A/cm^2 [24, 166] oraz odległość między sondą a silnikiem w przybliżeniu równą 0.5 m, oszacowano, że średnica kolimatora większa niż 10 mm pozwoli uzyskać wystarczający stosunek sygnału do szumu przy pomiarze za pomocą typowego oscyloskopu (tzn. średnica o tym rozmiarze zapewni, że pomiar w zakresie kilku mA stanie się znaczący w stosunku do występującego w tych warunkach szumu). Postanowiono zatem wykonać kolimator o średnicy 14 mm, przy czym średnica wewnętrznego kolektora została ustalona na 18 mm [220]. Schemat pierwszej sondy zaprojektowanej na potrzeby tej rozprawy doktorskiej, oznaczonej jako FC_{old}, przedstawia Rysunek 3.4.

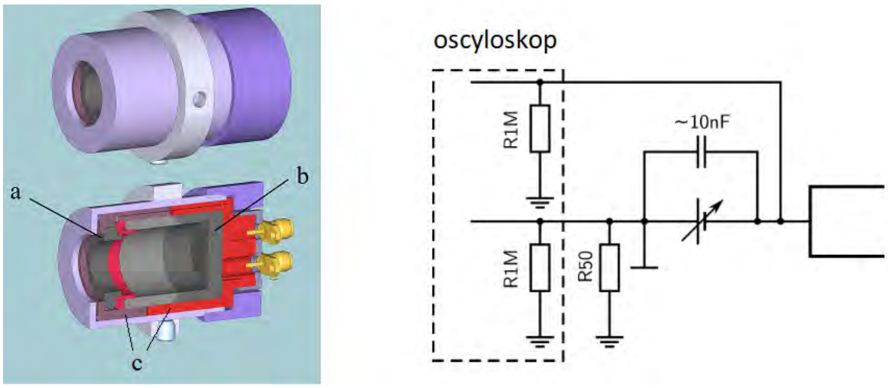
Izolatory elektryczne sondy zostały wykonane z tworzywa PEEK (polieteroeteroketon), które jest kompatybilne z próżnią, co oznacza, że materiał ten uwalnia niewielkie ilości gazu w próżni. Temperatura topnienia tego polimeru wynosi około 340°C. Ponadto ma on doskonałą odporność mechaniczną i chemiczną podczas wystawienia na działanie wysokich temperatur [166].

Kolektor zbierający jony jest chroniony przez cylindryczną miedzianą osłonę, którą w zależności od potrzeb można uziemić lub pozostawić na potencjale pływającym. Długość kolimatora równa 38 mm została tak dobrana aby zminimalizować obecność gazu obojętnego wewnątrz przyrządu [166]. Wszystkie części izolatora jak i sam kolektor są wyposażone w specjalne kanały, aby zapewnić skuteczne odprowadzanie gazu resztkowego z wewnętrznych obszarów sondy.

Grafitowy kolimator o powiększonej średnicy zewnętrznej został umieszczony przed kolektorem sondy FC_{old}, co zostało przedstawione na Rysunku 3.4. Kolimator określa referencyjną powierzchnię wejściową tego kubka Faraday'a równą 1.539 cm^2. Spolaryzowany ujemnie kolektor również został wykonany z grafitu, aby zminimalizować zjawisko rozpylania przez ciężkie cząstki oraz wtórną emisję elektronów [166, 170]. Korpus kubka został natomiast wykonany z miedzi (pomimo mniejszej odporności na rozpylanie niż gra-



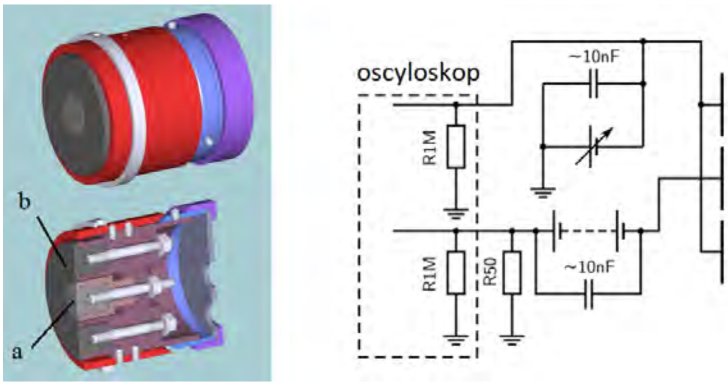
Rysunek 3.4: Po lewej stronie zdjęcie sondy FC_{old} zrobione przed montażem złączy elektrycznych; kolejnymi literami zaznaczone zostały: a) kolimator wykonany z grafitu, b) miejsce do przylutowania złącza elektrycznego, c) obejma montażowa oraz d) miedziana osłona sondy. Po prawej znajduje się schemat elektryczny wraz ze wskazaniem najważniejszych elementów stanowiących tą sondę.



Rysunek 3.5: Po lewej stronie projekt sondy FC stworzony w programie *VariCAD* przedstawiający: a) kolimator, b) kolektor i c) izolator elektryczny. Po prawej znajduje się schemat elektryczny tej sondy [220].

fit) w celu zapewnienia skutecznego ekranowania elektromagnetycznego oraz ułatwienia lutowania powodującego dobry kontakt elektryczny ze złączami typu MMXC. Ponadto podłączenia do sondy FC_{old}, podobnie jak do dwóch kolejnych, zostały odpowiednio zaekranowane oraz zabezpieczone przed zwarciem mogącym pojawić się w wyniku depozycji materiału.

Druga sonda tego samego typu, oznaczana w tej pracy jako FC, została przedstawiona na Rysunku 3.5. Tutaj podobnie jak poprzednio, zarówno kolimator, jak i kolektor zostały wykonane z grafitu [166, 170]. W tym przypadku średnica otworu kolimatora została ustalona na 15 mm, a średnica kolektora na 20 mm. Cylindryczne elementy zapewniające izolację elektryczną pomiędzy kolimatorem a kolektorem wykonano z PEEK. Poza tym konstrukcja pozwala na pozostawienie korpusu sondy na potencjale pływającym.



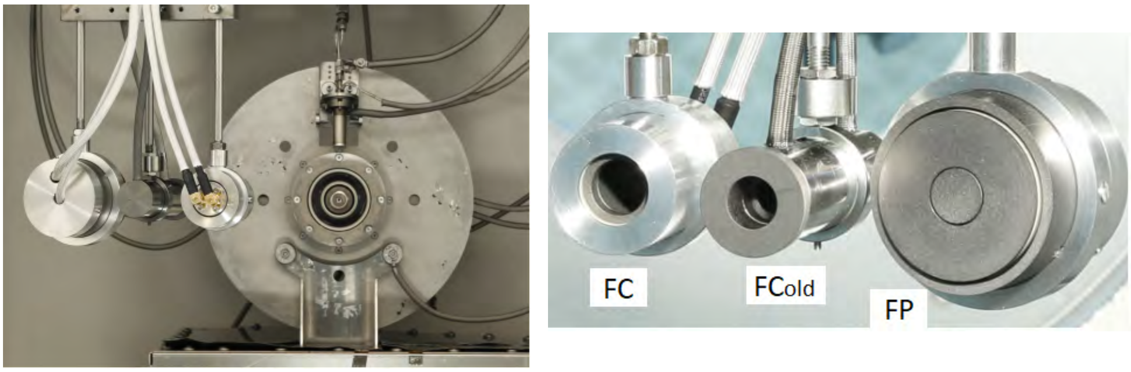
Rysunek 3.6: Po lewej stronie projekt sondy płaskiej z pierścieniem ochronnym FP wykonany w programie *VariCAD*, gdzie (a) oznacza kolektor a (b) pierścień ochronny. Po prawej stronie schemat elektryczny tej sondy [220].

3.2.2 Sonda płaska z pierścieniem ochronnym

Sonda płaska z pierścieniem ochronnym, czyli inaczej sonda Faraday'a (oznaczana w tej pracy jako FP) jest trzecią i ostatnią skonstruowaną w ramach rozprawy doktorskiej sondą elektryczną. Aby działała ona prawidłowo podczas pomiarów potencjał przyłożony do kolektora i do pierścienia ochronnego powinien być dokładnie taki sam, aby uniknąć powstawania nieciągłości w strukturze warstwy elektrostatycznej plazmy tworzącej się w pobliżu sondy (Rysunek 1.14) [166]. Kolektor i pierścień zostały wykonane z grafitu w celu zmniejszenia wtórnej emisji elektronów i oddzielone szczeliną o szerokości 0.5 mm. Kolektor został zamontowany współosiowo z pierścieniem ochronnym. Osłonę sondy, również wykonaną z grafitu, pozostawiono na potencjale pływającym.

Kolektor prądu jonowego sondy FP przedstawionej na Rysunku 3.6 stanowi dysk o średnicy 15 mm. Powierzchnia zbierająca wynosi zatem 176.72 mm^2. Promień całej sondy jest równy zewnętrznemu promieniowi pierścienia ochronnego i wynosi 46 mm. W izolatorze FP znajdują się otwory przelotowe, a w kolektorze i pierścieniu ochronnym otwory gwintowane, które umożliwiają montaż sondy i zapewniają odpowiednie połączenia elektryczne [34].

Układ elektroniczny zasilający wszystkie trzy sondy, które zostały pokazane na Rysunku 3.7, musiał spełniać dwie funkcje: być źródłem napięcia polaryzacji kolektora oraz służyć do pomiaru prądu jonowego zbieranego przez elektrodę [166]. Aby odepchnąć elektrony i zebrać z wiązki plazmowej tylko jony, kolektory sond polaryzowano odpowiednio dobranym niskim napięciem w stosunku do uziemienia laboratorium. Przy czym kolektor był polaryzowany dzięki specjalnej baterii złożonej z szeregu 3 V baterii alkalicznych, podczas gdy w przypadku sondy FP pierścień polaryzowano elektronicznie regulowanym modułem skonstruowanym specjalnie na potrzebę polaryzacji tej sondy przez Jacka Kaczmarczyka z IFPiLM. Zasilacz ten pozwalał na regulację napięcia w zakresie od -40 V do $+40$ V.



Rysunek 3.7: Po lewej stronie sondy umieszczone na ramieniu obrotowym, które znajduje się pod kątem 30° od osi silnika. Po prawej zbliżenie na fronty tych sond.

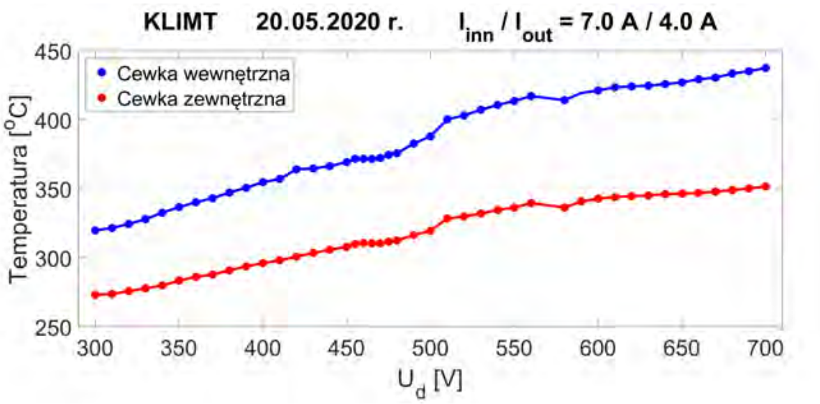
3.2.3 Pomiary prądu jonowego

Oba typy sond elektrycznych opisane w rozdziałach 3.2.1 i 3.2.2 wykorzystano do rejestracji lokalnego prądu jonowego wiązki plazmowej generowanej przez silnik Halla. Sondy te zostały zamontowane na obrotowym ramieniu diagnostycznym w celu pomiaru prądu jonowego na osi silnika oraz zebrania profili jonowych.

Po wstawieniu sond do komory zostały one poprawnie zorientowane w stosunku do osi silnika i na tyle solidnie przytwierdzone do ramienia diagnostycznego, aby ich kąt ani wysokość nie ulegały zmianie podczas ruchu [34]. Ponadto sondy umieszczono tak, aby ich powierzchnie zbierające (kolektory) znajdowały się w tej samej odległości od środka silnika. Układ napędowy umożliwiał obrót sond o 180° i przemieszczenie ich wzdłuż promienia. Aby zachować założenie źródła punktowego [166] i jednocześnie zapewnić bezpieczeństwo okablowania podczas przemieszczania się sond, ustwiono je w najdalszej możliwej odległości od powierzchni wyjściowej silnika. W tym przypadku odległość kolektorów sond od płaszczyzny wyjściowej silnika wynosiła 49.4 cm, zatem można założyć, że sondy znajdowały się w tzw. „dalekim rejonie” (ang. *far field region*). Podczas pojedynczego pomiaru istniała możliwość zbierania prądu jonowego tylko jedną wybraną sondą.

Zgodnie z zaleceniami jeśli do neutralizacji wiązki używana jest zewnętrzna katoda, katoda ta powinna być umieszczona pod kątem 90° w stosunku do płaszczyzny, w której porusza się sonda, co zostało zapewnione [34]. Ponieważ powierzchnia sondy narażona na długotrwałe działanie jonów wiązki może ulec degradacji w wyniku rozpylania i osadzania się pobliskich materiałów, zaraz po skończonym pomiarze sondy były ustawiane pod kątem około $\theta = 90°$ od osi silnika [34].

Okablowanie diagnostyczne było ekranowane, a połączenia elektryczne nie były narażone na działanie plazmy. Cała konstrukcja montażowa sondy i kable w pobliżu sondy znajdowały się za powierzchnią zbierania sondy. (Położenie sond w stosunku do silnika obrazują Rysunki 1.6 oraz 3.7.) Ponadto każda konstrukcja montażowa, na którą mogłaby oddziaływać bezpośrednio wiązka jonów, była osłonięta materiałami o niskim współczyn-



Rysunek 3.8: Zmiana temperatury cewek magnetycznych w funkcji napięcia wyładowania.

niku rozpylania, takimi jak kapton lub grafit [246, 251, 256].

Ponieważ wyładowanie silnika powinno osiągnąć operacyjny stan ustalony przed przeprowadzeniem pomiarów sondą, więc aby spełnić to wymaganie zawsze przed wykonaniem pomiaru czekano na ustabilizowanie się temperatury cewek magnetycznych. Temperatura ta była szacowana przy pomocy pomiarów prądu wyładowania I_d i napięcia U_d w następujący sposób[1]:

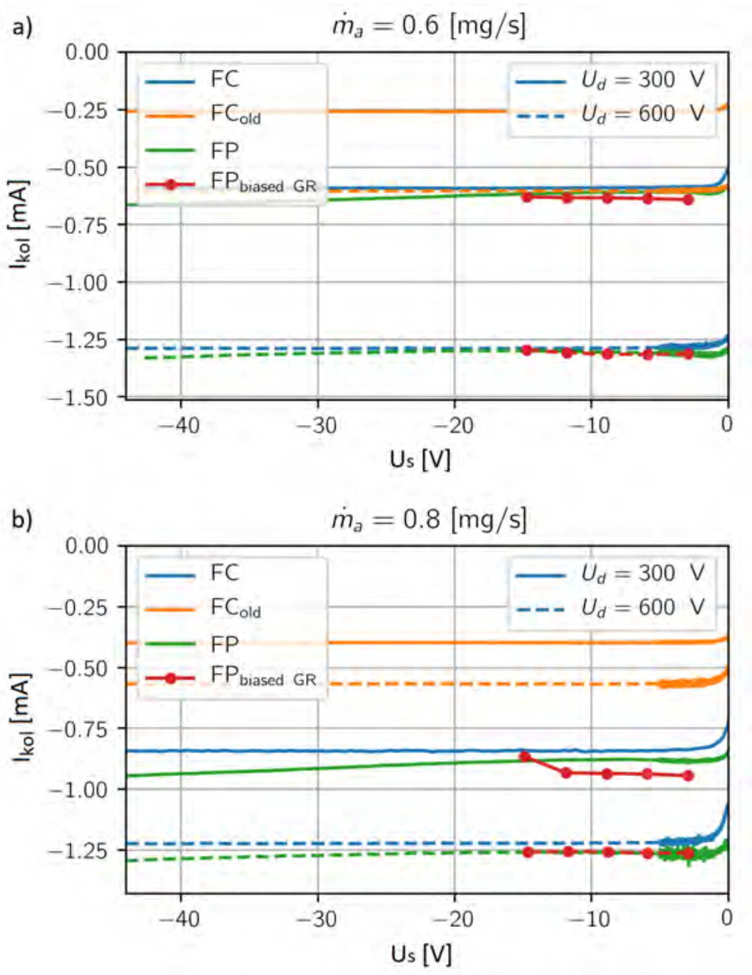
$$T_{cewka} = \frac{\frac{\frac{U_d}{I_d} - R_{kab}}{R_{cewka}} - 1}{A_{Cu}} + T_{lab}, \tag{3.2}$$

gdzie R_{cewka} jest opornością danej cewki, R_{kab} jest opornością wszystkich podłączeń i kabli pomiędzy jednostką zasilającą a tą cewką (założono przy tym, że okablowanie miało temperaturę pokojową, czyli stałą oporność), $A_{Cu} = 0.00395\ K^{-1}$ jest współczynnikiem temperaturowym miedzi, a temperatura w laboratorium T_{lab} wynosiła $23°\ C$.

W przypadku paliwa kryptonowego szczególnie ważne jest utrzymanie bezpiecznej temperatury wewnętrznej silnika (podrozdział 1.1.2). Ponieważ temperatura cewek nie powinna przekraczać $500°C$ podczas dłuższych czasów pracy, przerywano pomiary, wyłączając silnik po osiągnięciu tego limitu. Przykładowy wykres temperatury podczas sesji eksperymentalnej przedstawia Rysunek 3.8. Nawet podczas pracy przy wysokim napięciu $U_d = 700\ V$ cewka wewnętrzna nie osiągnęła temperatury $450°\ C$, podczas gdy cewka zewnętrzna pozostała o niemal $100°\ C$ chłodniejsza.

Potencjał polaryzacji kolektora musi być wystarczający do uzyskania nasycenia prądu jonowego w całym obszarze wykonywania pomiarów. Nie ma określonej ilościowo wartości stopnia nasycenia niezbędnego do zebrania wszystkich jonów dla sond elektrycznych [34]. Warunek osiągnięcia jonowego prądu nasycenia powinien więc być sprawdzony dla wielu położeń sondy, tak aby uwzględnić cały przedział zmienności temperatury i gęstości elektronowej plazmy w obszarze sondowania. Z tą myślą przeprowadzono badanie nasycenia prądu jonowego dla wybranych położeń kątowych ramienia diagnostycznego i rożnych wa-

[1] Wzór ten powstał z przekształcenia równań na bilans mocy przy uwzględnieniu strat w cewkach magnetycznych i doprowadzeniach kablowych.

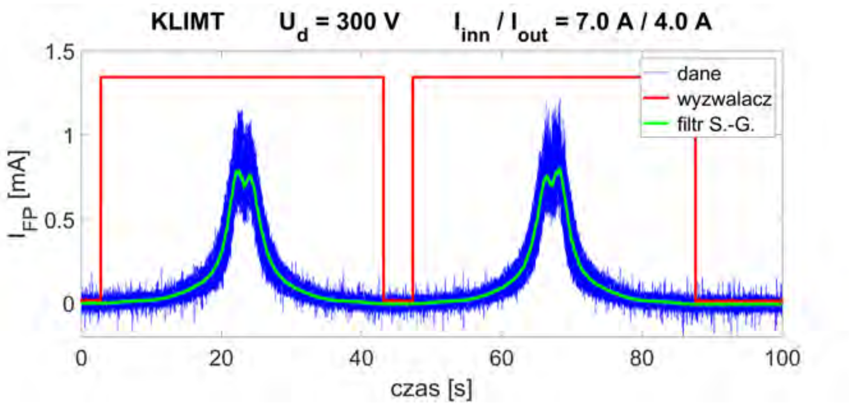


Rysunek 3.9: Charakterystyka I-V sond, gdzie przez I_{kol} oznaczono natężenie prądu jonowego danego kolektora. Kolory oznaczają odpowiednio: niebieski – sonda FC, pomarańczowy – sonda FC_{old}, zielony – sonda FP z pierścieniem pozostawionym na potencjale pływającym, czerwony – sonda FP z pierścieniem na potencjale kolektora. Linia ciągła przedstawia wyniki otrzymane dla napięcia wyładowania równego 300 V, a przerywana dla 600 V. W przypadku a) wydatek masowy z anody wynosił 0.6 mg/s, a w przypadku b) 0.8 mg/s.

runków pracy silnika. W każdej lokalizacji oszacowano prąd jonowy kolektora, zmieniając napięcie jego polaryzacji od zera do coraz bardziej ujemnych wartości, aż zbierany prąd osiągnął stałą wartość, co wskazywało na nasycenie jonów.

Niezależnie dla każdej sondy stwierdzono, że napięcie kolektora równe −15 V w stosunku do potencjału uziemienia laboratorium jest wystarczające do pracy w reżimie nasycenia jonowego. Wartość ta jest zgodna z napięciem polaryzacji zwykle używanym w pomiarach dalekiego pola, które waha się od −10 do −30 V [34].

Porównanie charakterystyk I-V dla wszystkich trzech sond, gdzie U_s oznacza napięcie polaryzacji sondy, a I_{kol} prąd jonowy zebrany przez kolektor, przedstawiono na Rysunku 3.9. Rysunek ten ilustruje również wpływ polaryzacji pierścienia ochronnego. Przyłoże-



Rysunek 3.10: Dwa profile (prawy i lewy) prądu jonowego uzyskane dzięki sondzie FP. Wyzwalacz (kolor czerwony) włącza się w momencie startu ruchu ramienia obrotowego. Punkty zwrotne odpowiadają startowi i zatrzymaniu ramienia. Krzywa niebieska oznacza surowe dane, a zielona dane po użyciu filtru Savitzky-Golay.

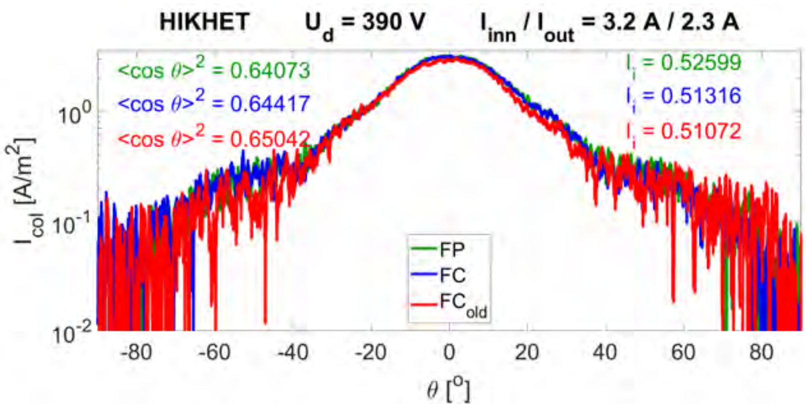
nie napięcia do pierścienia ochronnego równego napięciu kolektora powinno uniezależniać wartość zebranego prądu od napięcia U_s. Gdy pierścień ochronny pozostaje na potencjale pływającym lub jest uziemiony, prąd pobierany przez sondę płaską może wzrastać, bo grubość warstwy elektrostatycznej rośnie wraz ze wzrostem napięcia na sondzie. Zgodnie z oczekiwaniami, przeprowadzone pomiary potwierdziły również, że gęstość prądu jonowego wzrasta wraz z masowym natężeniem przepływu paliwa, niezależnie od położenia kątowego [166].

Po zainstalowaniu sond na obrotowym ramieniu pomiary mogły być wykonywane azymutalnie. Sygnał jonowy był rejestrowany w sposób ciągły w miarę obracania ramienia z prędkością kątową $4.5°/s$, tak, że obrót o $180°$ trwał 40 sekund. Sondy były przemieszczane z jednego skrajnego położenia w drugie i z powrotem tak, że w jednym cyklu pomiarowym rejestrowane były dwa profile prądu jonowego. Przykładowe profile umieszczono na Rysunku 3.10, gdzie przedstawiono surowe dane i dane wygładzone filtrem Savitzky-Golay (funkcja **sgolayfilt** pakietu *Matlab*).

Rozkład kątowy nie jest idealnie symetryczny względem osi silnika. Asymetrię można wyjaśnić na wiele sposobów – przyczyna mogą być np. drobne błędy geometrii ustawienia sond i ramienia diagnostycznego, niejednorodne wyładowanie silnika i/lub efekt katody.

Częstotliwość próbkowania oscyloskopu podczas obrotu ramienia została ustawiona na 1000 punktów na sekundę przy 100 tys. zarejestrowanych punktów, co odpowiadało czasowi pomiaru 100 s, w ciągu którego możliwy był pełny ruch sondy z jednej strony na drugą i z powrotem. Takie wartości prędkości kątowej ramienia i częstotliwość próbkowania oscyloskopu pozwalały osiągnąć rozdzielczość katową równą $0.0045°$.

Przykładowe pomiary służące do obliczenia całkowitego prądu jonowego I_i (wzór 3.3) oraz rozbieżności wiązki plazmowej $\langle\cos(\theta)\rangle^2$ (wzór 1.23) zostały wykonane trzema sondami, których kolektory spolaryzowano napięciem $U_s = -15\ V$ i zobrazowane na Rysunku 3.11.



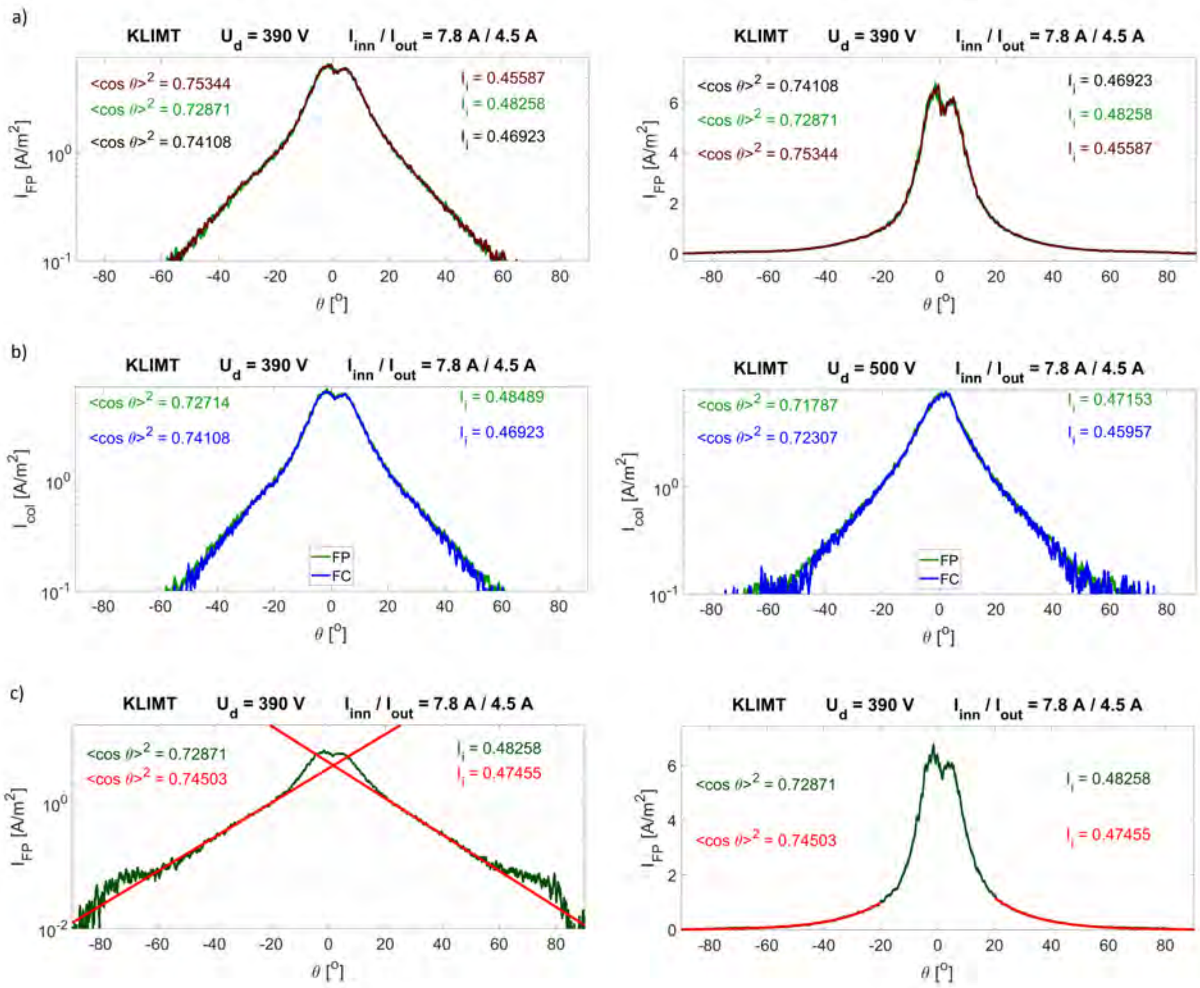
Rysunek 3.11: Porównanie trzech profili gęstości prądu jonowego. W legendzie wykresu zostały również podane odpowiednie wartości całkowitego prądu jonowego I_i w jednostkach mA (wzór 3.3) oraz rozbieżności wiązki $\langle\cos(\theta)\rangle^2$ (wzór 1.23).

Wzrost ciśnienia tła w komorze prowadzi do zwiększenia gęstości jonów pochodzących z wymiany ładunkowej CEX. Dla dużych kątów gęstość ta powinna wnosić znaczący wkład w stosunku do gęstości jonów docierających do kolektora sondy bezpośrednio z silnika. Efekt ten powinien skutkować wolniejszym zanikiem profilu rozkładu na „skrzydłach" w stosunku do przypadku niskiego ciśnienia tła w komorze. Kształt profilu kątowego prądu jonowego posiada skrzydła dla $|\theta| > |40°|$, przy czym kubki Faraday'a dają nieco niższy prąd, ponieważ ich stały kąt zbierania jest ograniczony, a FP zbiera większy prąd, gdyż jego obszar zbierania wzrośnie na skutek poszerzania się warstwy Debye'a [166].

Na Rysunku 3.12 a) umieszczono porównanie zgodności prawego profilu z lewym podczas przemiatania wiązki sondą FP. Wykresy potwierdzają zgodność profili, co świadczy o tym, że silnik nie zmienił zachowania podczas trwania pomiaru. Na Rysunku 3.12 b) zamieszczono porównanie zgodności profili zebranych przez sondę FC i FP dla dwóch przykładowych napięć wyładowania. Podobną zgodność profili w innych warunkach pracy silnika można również zobaczyć na Rysunku 3.11, gdzie uzyskane rozkłady też wykazują dobrą zgodność ze sobą.

Rysunek 3.12 c) obrazuje metodę pozwalającą na określenie części prądu jonowego, która pochodzi z wymiany ładunkowej CEX. Ma to na celu lepsze oszacowanie prądu jonowego w odniesieniu do wpływu jaki wywiera on na siłę ciągu. Metoda ta polegała na dopasowaniu prostych w skali logarytmicznej dla θ od $-40°$ do $-20°$ oraz od $20°$ do $40°$, a wartości I_{FP} dla kątów w zakresie od $-90°$ do $-20°$ i od $20°$ do $90°$ były zastępowane tymi dopasowaniami, co pokazano na wykresie z prawej strony, gdzie użyto skali liniowej. W przypadku silnika KLIMT wartości I_i różniły się średnio o 6 % i nigdy nie przekraczały 10 %. Natomiast w przypadku silnika HIKHET różnice po oddzieleniu składowej prądu pochodzącej z wymiany ładunkowej mogły sięgać aż 30 %.

Lokalną gęstość prądu jonowego j_i uzyskano dzieląc zmierzony prąd jonowy w określonej lokalizacji podczas przesuwania obrotowego ramienia przez efektywną powierzchnię zbierającą danej sondy. W ten sposób dana sonda została wykorzystana do wyznaczenia



Rysunek 3.12: a) Dwa profile jonowe FP. Kolorami zielonym i brązowym podano wartości całkowitego prądu jonowego I_i (wzór 3.3) oraz wydajności $\eta_\theta = \langle\cos(\theta)\rangle^2$ (wzór 1.23) dla dwóch profili prądu jonowego (prawego i lewego) a czarnym ich średnią. b) Profile jonowe FC i FP dla dwóch różnych wartości napięcia. c) Przykładowy wynik usunięcia składowej CEX z prądu jonowego. Kolorem zielonym podano wartości I_i oraz η_θ dla sygnału zebranego przez sondę, kolorem czerwonym wartości po odjęciu skrzydeł. Wszystkie wartości I_i zostały podane w jednostkach mA.

rozkładu kątowego gęstości prądu jonowego $j_i(\theta)$ generowanego przez umieszczony w komorze silnik. Zakładając, że pomiary zostały wykonane dostatecznie daleko od płaszczyzny wyjściowej silnika, czyli traktując go jako źródło punktowe i zakładając symetrię osiową, zmierzony rozkład gęstości kątowej prądu $j_i(\theta)$ można było wykorzystać do obliczenia całkowitego prądu jonowego I_i wedle wzoru:

$$I_i = \pi R^2 \int_{-90^\circ}^{90^\circ} j_i(\theta)\,|\sin\theta|\,d\theta, \tag{3.3}$$

gdzie R jest odległością między środkiem silnika a sondą, natomiast θ kątem azymutalnym pozycji sondy (Rysunek 1.6) [33, 65, 106, 114].

Przed obliczeniem całkowitego prądu jonowego z równania 3.3 dla każdego przypadku zawsze sprawdzano, czy zebrane profile są ze sobą zgodne, tzn. porównywano profil prawy z lewym, jak i profile otrzymane z poszczególnych sond. Zgodność otrzymanych profili była weryfikowana zarówno w skali liniowej jak i logarytmicznej. Zaobserwowano, że kształt profili ulegał zmianie wraz z przyłożonym napięciem, ale zebrane profile z różnych sond pozostawały ze sobą zgodne, czego przykłady pokazano na Rysunkach 3.11 i 3.12. Wszystkie przypadki, około 2 %, w których została zaobserwowana znaczna rozbieżność profili zostały odrzucone podczas dalszej analizy.

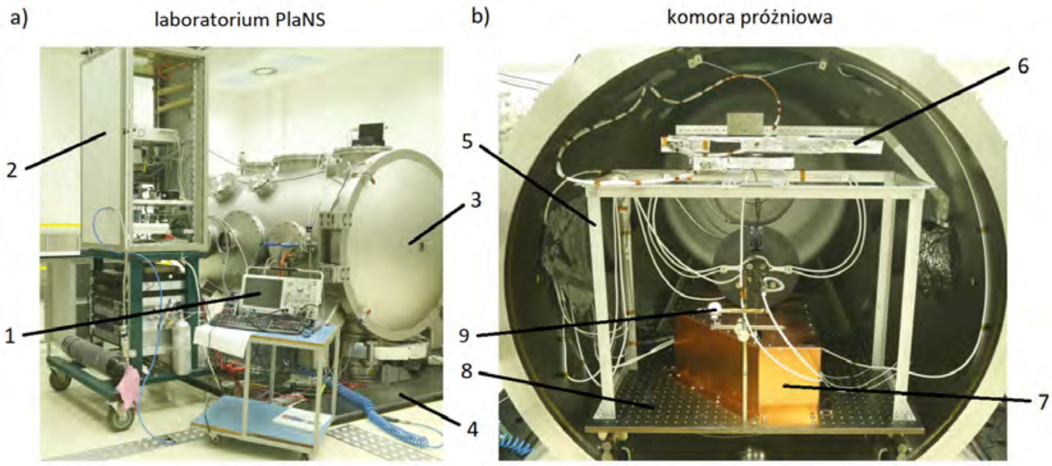
3.3 Procedury pomiarowe

Opisane poniżej procedury zostały opracowane przez zespół laboratorium PlaNS w trakcie realizacji projektów KLIMT i HIKHET w celu zapewnienia powtarzalności warunków eksperymentu, dobrze określonych punktów odniesienia i takiej samej metodologii pomiarów.

Pomiary na potrzeby badań prezentowanych w tej pracy zostały wykonane w laboratorium PlaNS mieszczącym się w IFPiLM szczegółowo opisanym w oddzielnej publikacji [219]. Laboratorium to powstało w 2013 r. i od tego czasu służy do badań elektrycznych silników plazmowych. Na Rysunku 3.13 przedstawiono zdjęcie tego laboratorium zrobione podczas pomiarów dedykowanych rozprawie doktorskiej wraz ze zdjęciem przedstawiającym wnętrze komory próżniowej.

Po każdej instalacji silnika w komorze próżniowej wykonywane były rutynowe testy elektrycznej separacji podzespołów silnika próbnikiem izolacji. W przypadku pozytywnego przejścia testu uruchamiany był trójstopniowy system próżniowych pomp bezolejowych. Pierwszy stopień stanowi pompa próżni wstępnej (Adixen ACG 600), która posiada fabryczną prędkość pompowania powietrza równą 7.5 m^3/s. Drugi to pompa turbomolekularna (Pfeiffer HiPace 3400 MC) osiągająca prędkość 2.8 m^3/s. Ostatni element stanowi pompa kriogeniczna (HSR Velco 900Xe), która ma prędkość pompowania równą: 36 m^3/s dla powietrza, 34 m^3/s dla ksenonu i 43 m^3/s dla kryptonu. Przeprowadzone oszacowania średniej prędkości pompowania podczas pracy wszystkich trzech pomp wynoszą odpowiednio 14 m^3/s i 18 m^3/s dla ksenonu i kryptonu, co pozwala utrzymać ciśnienie w komorze nie większe niż 2.8×10^{-8} $mbar$ bez uruchomienia przepływu gazu oraz 4×10^{-5} $mbar$ podczas pracy silników Halla przy największych badanych wydatkach masowych kryptonu i ksenonu. Takie warunki umożliwiają otrzymanie odpowiedniej gęstości gazu w kanale wyładowania i prawidłową pracę silnika. Osiągana wydajność pompowania wystarcza do testowania silników Halla o mocy nominalnej do 1 kW.

Po uzyskaniu w komorze próżniowej ciśnienia na poziomie 3.5×10^{-8} $mbar$ (zwykle po 24 godzinach), kolejny krok stanowiło płukanie katody kryptonem w celu jej oczyszczenia z resztek gazu atmosferycznego. Następnie katoda była stopniowo wygrzewana poprzez zwiększanie prądu grzejnika katody (w dwóch etapach, z prędkością 1 A/min w każdym). Przebieg tego procesu był zawsze odnotowywany w celu monitorowania stanu zużycia katody (patrz Rysunek 3.14), na co wskazywała podniesiona wartość napięcia U_H. Po za-

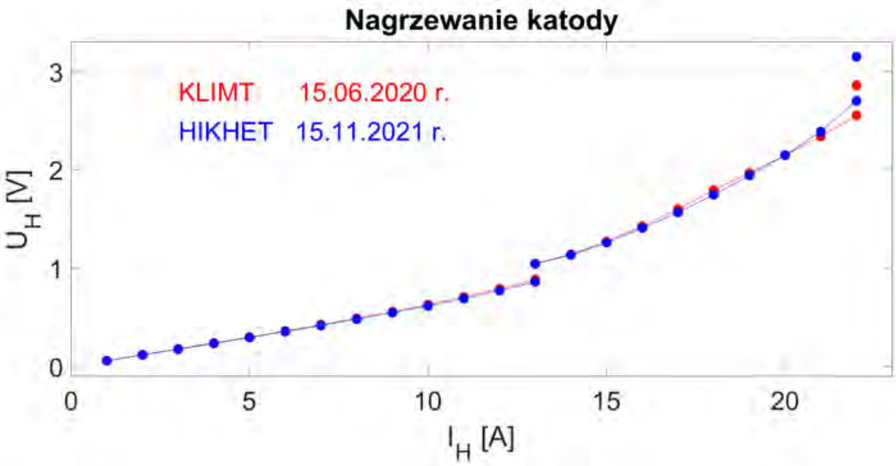


Rysunek 3.13: Zdjęcia laboratorium PlaNS. W przypadku a) numerem 1 został oznaczony oscyloskop służący do rejestracji prądu wyładowania. W szafie (2) znajdują się natomiast zasilacze i doprowadzenia gazowe. Komora próżniowa (3) jest odizolowana od drgań sejsmicznych płytą antywibracyjną (4). W przypadku b) numerem 5 oznaczono konstrukcję podtrzymującą ramię obrotowe (6), która została wykonana ze stali nierdzewnej. Miedziana osłona wagi aerodynamicznej (7) pełni rolę ekranu termicznego dla odprowadzania ciepła do płyty (8), która spełnia rolę radiatora. Dodatkowo chroni ona wagę aerodynamiczną przed napylaniem. Wspornik manipulatora stosowanego przy pomiarach siły ciągu został oznaczony numerem 9. (Na Rysunku 3.15 ten element pokazano w powiększeniu.)

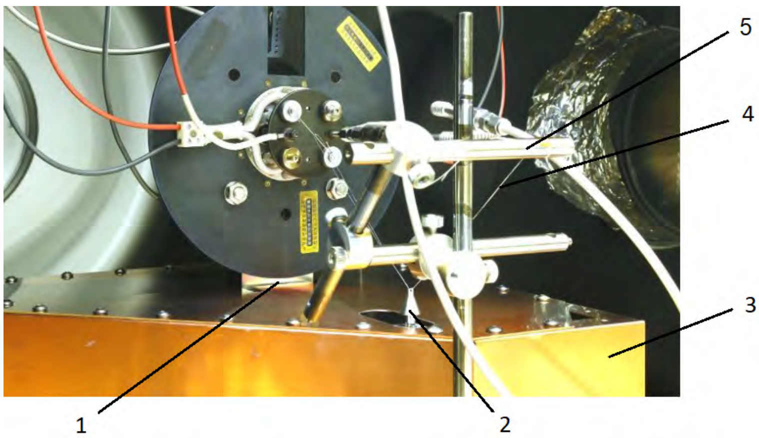
kończeniu tej operacji można było zainicjować wyładowanie wewnątrz katody. Po inicjacji wyładowania grzejnik katody był zwykle wyłączany. Kolejnym krokiem było włączenie dopływu gazu do silnika. Po ustabilizowaniu się przepływu gazu ustawiano pożądane wartości prądów w cewkach. W tym momencie można było uruchomić silnik i zaczekać aż dojdzie do równowagi termicznej, aby zapewnić rzetelność pomiarów.

W celu przeprowadzenia testów wydajności, silnik został zamontowany na wahadle wagi aerodynamicznej (ang. *thrust balance*), która pozwala na pomiar siły ciągu na poziomie kilku mN z dokładnością 2 % [220]. Elementem ruchomym wagi jest poziome wahadło zawieszone na elementach sprężystych o regulowanej sztywności. Przemieszczenie wahadła jest proporcjonalne do działającej siły (jak w dynamometrze) i może być rejestrowane z dużą precyzją. Masa obu badanych wersji silnika była na tyle mała (niewiele ponad 2 kg w przypadku silnika HIKHET i niecałe 3 kg w przypadku układu KLIMT), że pozwalała bezpiecznie korzystać z precyzyjnej wagi zaprojektowanej przez szwajcarską firmę $MECARTEX$ na użytek projektu $L\mu PPT$ (Rysunek 1.4).

Ponieważ wewnętrzny kalibrator wagi okazał się niewystarczający dla pomiarów w zakresie miliniutonów, została ona doposażona w IFPiLM w zewnętrzny kalibrator elektromechaniczny (patrz Rysunek 3.15) wykorzystujący pionowe przemieszczenia masy kontrolnej o wartości 2.6862 g, generujące siłę o znanej wartości równoległą do wektora ciągu. Kalibrator ten uruchamiany jest przez elektromagnes generujący impuls kalibracyjny. Powtarzalność działania impulsu kalibracyjnego sprawdzano zawsze przed rozpoczęciem eksperymentu. Rysunek 3.16 przedstawia wyniki pomiarów wychyleń wagi zmieniające się



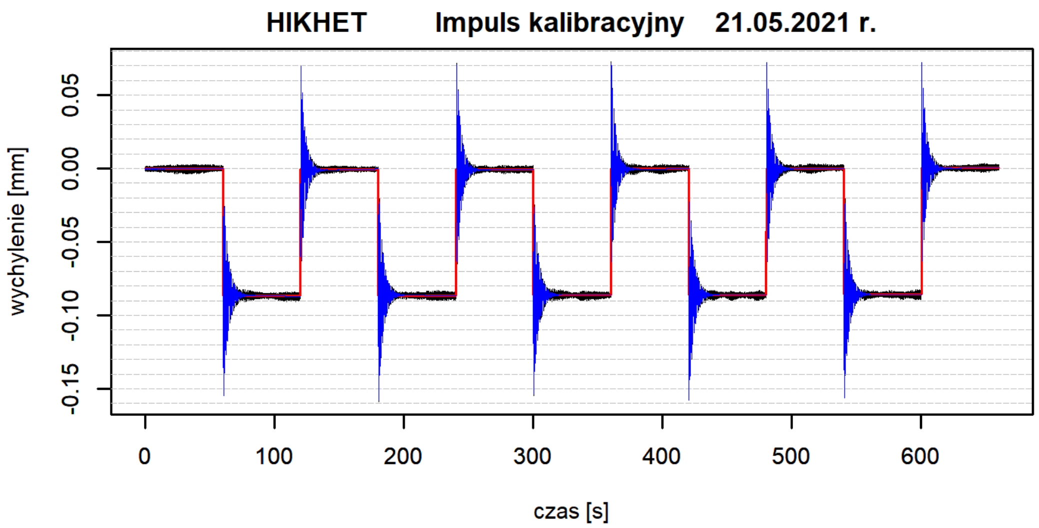
Rysunek 3.14: Zależność napięcia grzejnika katody U_H od prądu I_H zmierzona podczas procesu wygrzewania katody. Na osi poziomej znajduje się zadana wartość prądu. Na osi pionowej napięcie, które się ustaliło po 1 minucie. Skok napięcia przy 13 A jest spowodowany półgodzinnym wygrzewaniem katody bez zmiany prądu grzejnika, podobnie postąpiono dla 23 A.



Rysunek 3.15: Na zdjęciu widoczna jest stożkowa masa kontrolna (2) napędzana elektromagnesem, zawieszona na nici z włókna szklanego (4) na wsporniku manipulatora (5) na wysokości 11.1 cm. Silnik jest przymocowany metalowym wspornikiem do wahadła wagi aerodynamicznej (1), dlatego gdy jest włączany i wyłączany, różnica w odpowiednich pozycjach wahadła wagi stanowi miarę siły ciągu. Numerem 3 oznaczono miedzianą osłonę, w której znajduje się waga.

w czasie podczas uruchamiania i wyłączania impulsu kalibracyjnego.

Zapis wychyleń wagi umożliwiających pomiar siły ciągu składa się z trzech faz trwających po 1 minucie każda przedstawionych na Rysunku 3.17. Faza (a) dotyczy wychylenia podczas pracy silnika, faza (b) relaksacji po wyłączeniu silnika, a faza (c) wychylenia po włączeniu impulsu kalibracyjnego. Po zakończeniu zapisu dla danego punktu pomiarowego wyłączano impuls kalibracyjny, a silnik uruchamiano ponownie zmieniając parametry pracy według wymagań danej serii pomiarowej. Kolejny pomiar wykonywano dopiero



Rysunek 3.16: Przykładowe wyniki badań powtarzalności działania impulsu kalibracyjnego poprzez serię włączeń i wyłączeń. Zerowa wartość wychylenia odpowiada położeniu silnika bez obciążenia masą kontrolną, natomiast gdy działa impuls kalibracyjny następuje wychylenie w kierunku wartości ujemnych. Kolorem czarnym zaznaczono surowe dane pomiarowe, kolorem niebieskim dopasowanie zależności 3.4 do drgań, które wywołało przemieszczenie wahadła, a kolorem czerwonym schematycznie zaznaczono odpowiednie poziomy, w których wychylenie się stabilizuje.

po uzyskaniu stabilizacji temperaturowej przy nowych ustawieniach. Powyższa procedura powodowała, że wykonanie jednego punktu pomiarowego zajmowało około 1 godziny.

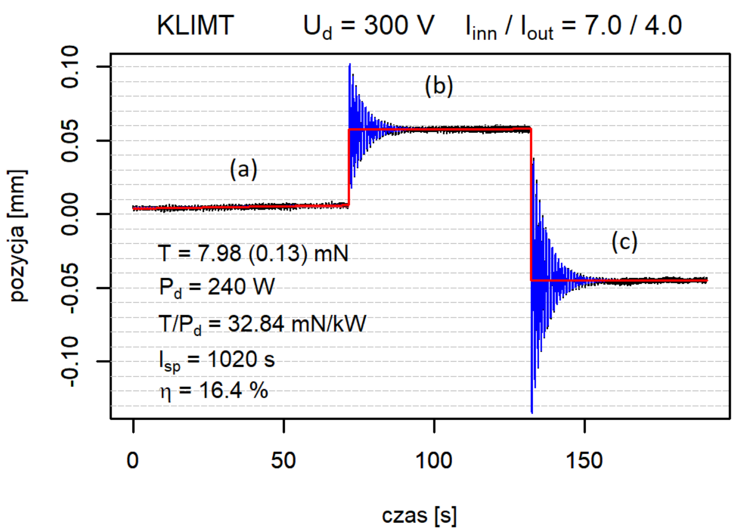
Dla każdego cyklu pomiaru siły ciągu, którego przykład ilustruje Rysunek 3.17, do odpowiednich faz sygnału z wagi dopasowywano analityczną postać rozwiązania tłumionego oscylatora harmonicznego z liniowym dryfem pozwalającą na precyzyjny odczyt przemieszczenia silnika między fazami cyklu [145]:

$$h(t) = A_w \cos(\omega t) e^{-\gamma t} + at + b, \tag{3.4}$$

gdzie A_w jest amplitudą wychylenia, ω częstotliwością drgań, γ współczynnikiem tłumienia, a a i b oznaczają współczynnik kierunkowy oraz wyraz wolny prostej modelującej liniowy dryf wychylenia. Znając siłę generowaną przez kalibrator ostateczną wartość ciągu wyprowadzano ze stosunku przemieszczeń między poziomami od (a) do (b) i od (b) do (c) [144, 145].

W dniu eksperymentu monitorowaneo: wartości średnie prądu i napięcia wyładowania, napięcie keepera oraz prądy płynące w cewkach. Dwa ośmiokanałowe systemy do akwizycji danych DATAQ DI-730 zapisywały wszystkie najważniejsze parametry operacyjne w trybie ciągłym. Oprócz tego rejestrowane były ciśnienia w doprowadzeniach gazu do katody i anody oraz mierzone było ciśnienie panujące w komorze próżniowej. Ciśnienie wewnątrz komory mierzono dwoma miernikami Pfeiffer PKR 251 i Oerlikon Leybold Ionivac ITR 90.

Do sterowania i stabilizacji przepływu gazu w przewodach anodowych i katodowych



Rysunek 3.17: Zmiany wychyleń wahadła wagi podczas pomiaru siły ciągu. Schodkowy kształt jest spowodowany wyłączeniem silnika (zmiana poziomu z (a) na (b)), a potem włączeniem impulsu kalibracyjnego (zmiana z poziomu (b) na (c)). Kolorem czarnym zaznaczono surowe dane pomiarowe, kolorem niebieskim dopasowanie funkcji 3.4 do drgań, które wywołało przemieszczenie wahadła, a kolorem czerwonym zaznaczono schematycznie odpowiednie poziomy, w których wychylenie się stabilizuje. Na rysunku podano przykładowe wartości podstawowych parametrów opisujących osiągi silnika dyskutowanych w rozdziale 3.4.

Rysunek 3.18: Przykładowy zrzut ekranu oscyloskopu używanego podczas eksperymentu przeprowadzanego z silnikiem KLIMT przy $U_d = 540\ V$. Kolor niebieski obrazuje przebieg prądu wyładowania, zielony potencjału pływajacego.

zastosowano sterownik firmy Sierra Instruments SmartTrak C100L oraz MicroTrak C101. Napięcie wyładowania i napięcie keepera katody zapewniały zasilacze laboratoryjne Sorensen SGI-1000/5 i SGI-800/6. Do zasilania grzałki katodowej i cewek zastosowano również zasilacze laboratoryjne firmy Sorensen, odpowiednio Sorensen XG40-21 i dwa zasilacze XG20-40 [220].

Prąd jonowy mierzony przez sondy elektryczne był rejestrowany za pomocą 12-bitowej karty do akwizycji danych Razor Express CompuScope 1242 GaGe. Jednocześnie z prądem jonowym rejestrowane były zmiany w czasie prądu wyładowania (sondą prądową TCP 0030), napięcia wyładowania (wysokonapięciową sondą różnicową Tektronix THDP 0200) i potencjału pływającego silnika (wysokonapięciową sondą P5100A). Wszystkie sondy były przyłączone do oscyloskopu Tektronix DPO 4104B. (Przykładowy obraz z oscyloskopu pokazuje Rysunek 3.18.) Podczas wszystkich pomiarów związanych z niniejszą rozprawą doktorską, których spis znajduje się w Dodatku A, prąd wyładowania, jak również prąd jonowy były rejestrowane z częstotliwością próbkowania 50 MHz (częstotliwość Nyquista 25 MHz) i czasem akwizycji ustawionym na 20 ms.

Przeprowadzone na szeroką skalę badania kolejnych wersji silnika zrealizowane przez Grupę Akceleratorów Plazmowych podczas projektów KLIMT i HIKHET pozwoliły wyznaczyć optymalne warunki ich działania zarówno pod względem stabilności, jak i wydajności. Z punktu widzenia badań dedykowanych tej rozprawie szczególnie ważna była możliwość pracy silnika Halla w szerokim zakresie zmian parametru kontrolnego, który stanowiło napięcia wyładowania, przy ustalonych wartościach pozostałych parametrów operacyjnych (takich jak anodowy wydatek masowy, napięcie keepera, prądy w cewkach itp.). Na podstawie stworzonej w wyniku wcześniejszych badań charakterystyki warunków pracy silnika dokonano wyboru topografii pola magnetycznego (poprzez dobór prądów zasilających uzwojenia cewek magnetycznych) dla kampanii eksperymentalnej dedykowanej tej rozprawie doktorskiej. Podczas wszystkich eksperymentów wydatek masowy z anody i z katody był stały i wynosił odpowiednio 0.8 mg/s i 0.17 mg/s, a kolektory sond FC_{old}, FC i FP (wraz z pierścieniem ochronnym) były spolaryzowane tym samym napięciem wynoszącym -15 V. Zestawienie wszystkich 230 wykonanych w ramach rozprawy pomiarów znajduje się w tabeli w Dodatku A.

W celu sprawdzenia powtarzalności/stabilności pracy silnika po wielogodzinnym jego działaniu zawsze robione były pomiary siły ciągu na początku i na końcu danego dnia eksperymentalnego. Podczas etapów nastawionych na zbadanie wpływu napięcia wyładowania na wydajność silnika oprócz pomiarów sondami mierzona była również siła ciągu. Badania rozbieżności kątowej wiązki odbywały się zawsze przy użyciu co najmniej dwóch sond. W trakcie wszystkich eksperymentów dedykowanych rozprawie doktorskiej zawsze napięcie wyładowania U_d było zwiększane. Unikano sytuacji, w których napięcie jest zmieniane w odwrotnej kolejności, aby zapobiec zjawisku powstania ewentualnej histerezy. Poniżej przedstawiono krótki opis poszczególnych etapów przeprowadzonych eksperymentów.

Poszczególne etapy eksperymentów z użyciem silnika KLIMT:
- **I etap**: obserwacje zmian zachowania silnika pod wpływem zmian parametru kontrolnego U_d; stosunek prądów w cewkach I_{inn}/I_{out} wynosił $7.0A/4.0A$, co zapewniało najlepszą symetrię topografii pola magnetycznego w stosunku do osi przechodzącej przez środek

kanału wyładowania (pomiary 1-44);
- **II etap**: badanie wpływu napięcia wyładowania U_d na wydajność silnika, pomiary siły ciągu; prądy w cewkach wynosiły: $I_{inn} = 7.0\ A$ i $I_{out} = 4.0\ A$ (pomiary 45-60);
- **III etap**: **a)** powtórzenie etapu I dla słabszego pola magnetycznego; prądy w cewkach wynosiły: $I_{inn} = 6.4\ A$ i $I_{out} = 3.7\ A$ (pomiary 61-101); **b)** powtórzenie etapu I dla silniejszego pola magnetycznego; prądy w cewkach wynosiły: $I_{inn} = 7.8\ A$ i $I_{out} = 4.5\ A$ (pomiary 102-139).

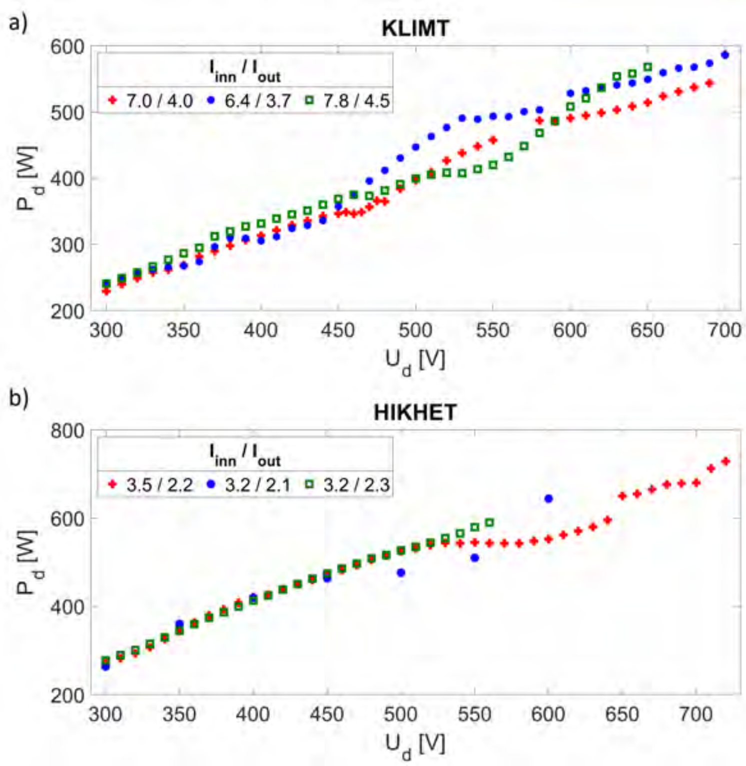
Poszczególne etapy eksperymentów z użyciem silnika HIKHET:
- **I etap**: obserwacje zmian zachowania silnika pod wpływem zmian parametru kontrolnego U_d; stosunek prądów w cewkach I_{inn}/I_{out} wynosił $3.5A/2.2A$, co zapewniało najlepszą symetrię topografii pola magnetycznego w stosunku do osi przechodzącej przez środek kanału wyładowania (pomiary 143-187);
- **II etap**: zbadanie wpływu napięcia wyładowania U_d na wydajność silnika, pomiary siły ciągu; prądy w cewkach wynosiły: $I_{inn} = 3.5\ A$ i $I_{out} = 2.2\ A$ (pomiary 188-194);
- **III etap**: powtórzenie etapu II dla słabszego pola magnetycznego; prądy w cewkach wynosiły: $I_{inn} = 3.2\ A$ i $I_{out} = 2.1\ A$ (pomiary 195-201);
- **IV etap**: powtórzenie etapu I dla słabszego pola magnetycznego; prądy w cewkach wynosiły: $I_{inn} = 3.2\ A$ i $I_{out} = 2.3\ A$ (pomiary 202-230).

3.4 Uzyskane osiągi

W rozdziale 3.4 przedstawiono wartości różnych parametrów opisujących osiągi jakie uzyskały oba silniki w odniesieniu do napięcia wyładowania U_d. Wyniki te będę pomocne podczas analizy wpływu pojawiania się zachowania chaotycznego na wydajność silnika przeprowadzonej w rozdziale 4. Oprócz mocy elektrycznej P_d i średniego prądu wyładowania I_d zaprezentowana została siła ciągu T wraz z obliczoną na jej podstawie wydajnością η i impulsem właściwym I_{sp}. Znajdują się tu również wyliczone wartości całkowitego prądu jonowego I_i oraz rozbieżności wiązki plazmowej η_θ, które posłużyły do oszacowania wydajności silnika podczas, gdy siła ciągu nie była mierzona w sposób bezpośredni.

Moc wyładowania Jedną z wielkości określających klasę silnika jest średnia moc elektryczna, którą silnik zużywa podczas pracy w warunkach nominalnych. W przypadku obu omawianych silników wynosi ona 0.5 kW. Natomiast wykresy przedstawiające zależność mocy potrzebnej do podtrzymania wyładowania w kanale silnika dla poszczególnych napięć zostały zaprezentowane na Rysunku 3.19.

W przypadku silnika KLIMT dla wszystkich badanych prądów cewek magnetycznych i napięć wyładowania nieprzekraczających 450 V zaobserwowano niemal liniowe narastanie mocy wyładowania o podobnym nachyleniu. Powyżej 450 V nachylenie krzywych P_d–U_d przybiera różne wartości w różnych przedziałach zmienności napięcia, a dla stosunku prądu cewek $I_{inn} = 7.0\ A$ i $I_{out} = 4.0\ A$ pojawia się nawet lokalne minimum. Poza stosunkowo krótkim zakresem napięć $520 - 600\ V$ stosunek prądu cewek I_{inn}/I_{out}

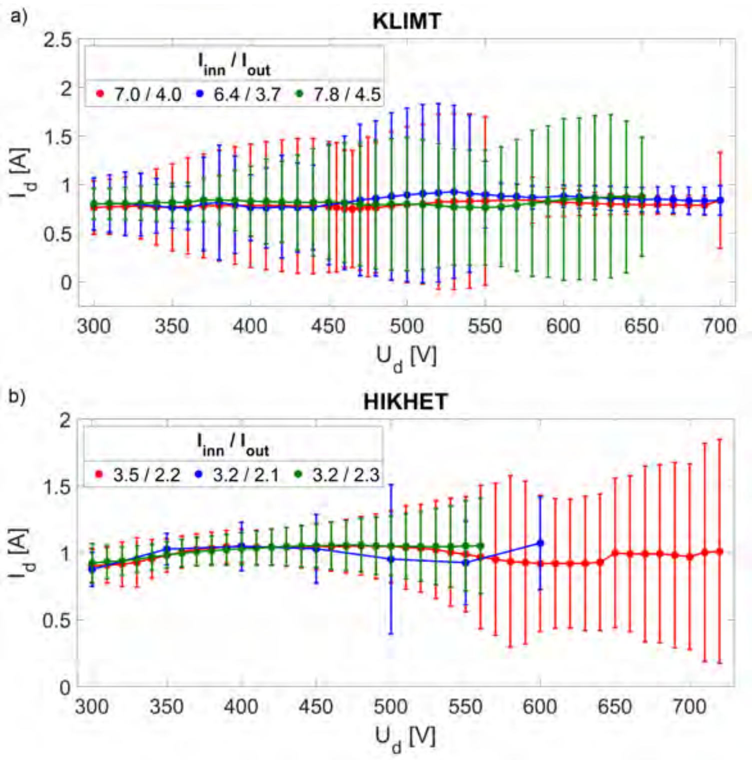


Rysunek 3.19: Moc wyładowania P_d w funkcji napięcia U_d dla silnika: a) KLIMT, b) HIKHET.

równy 7.0A/4.0A zapewniał pracę silnika przy minimalnej mocy wyładowania. Jednocześnie zaobserwowano, że zastosowanie najsłabszego pola magnetycznego (etap III a)) dla napięć powyżej 460 V prowadzi do niekorzystnego wzrostu mocy wyładowania. Dla trzech kombinacji prądów cewek przedstawionych na Rysunku 3.19 b) moc produkowana przez silnik HIKHET dla niskich napięć jest bardzo zgodna, a od U_d równego około 530 V przy prądach cewek I_{inn} = 3.5 A i I_{out} = 2.2 A silnik potrzebował mniejszej mocy do podtrzymywania wyładowania niż w przypadku stosunku I_{inn}/I_{out} równym 3.2 A do 2.3 A. Moc P_d była dla wszystkich warunków pracy niższa w przypadku silnika KLIMT. Jak pokazano na Rysunku 3.22 silnik HIKHET podczas I etapu potrzebował mocy do 615 W dla U_d = 550 V, natomiast silnik KLIMT podczas swojego I etapu mógł działać aż do U_d = 700 V pobierając moc nieprzekraczającą 590 W.

Podsumowując, pod względem mocy wyładowania można stwierdzić że, najlepsze wyniki otrzymano dla silnika KLIMT przy doborze prądów cewek I_{inn} = 7.0 A i I_{out} = 4.0 A, chociaż w zakresie 510 - 590 V lepsze wyniki otrzymano dla prądów cewek I_{inn} = 7.8 A i I_{out} = 4.5 A.

Charakterystyka I-V Działanie silnika można również określić na podstawie jego charakterystyki I-V, tzn. kształtu wykresu prądu wyładowania I_d w funkcji napięcia U_d. Zależność ta została przedstawiona na Rysunku 3.20, gdzie wartości I_d zostały uśrednione dla danych warunków pomiarowych. W przypadku silnika KLIMT prąd wyładowania właściwie utrzymywał się na podobnym poziomie równym 0.8 A dla wszystkich przeba-

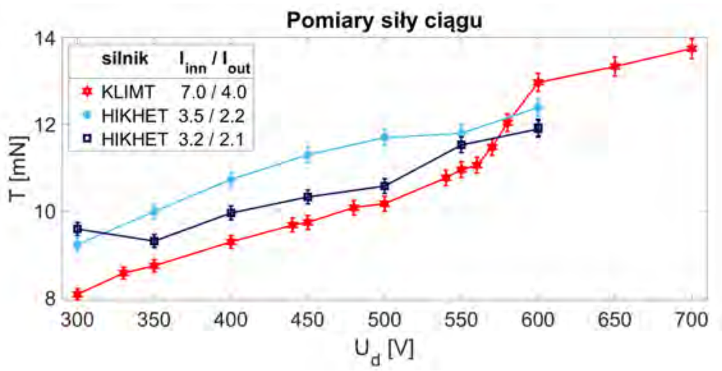


Rysunek 3.20: Charakterystyka I-V dla silnika: a) KLIMT, b) HIKHET.

danych napięć bez względu na zastosowane prądy w cewkach. W HIKHET średni prąd wyładowania ulegał większym wahaniom. Odchylenia standardowe prądu wyładowania I_d zachowują się również odmiennie. W przypadku etapów I i III a) silnika KLIMT wartość odchyleń jest najmniejsza dla największych napięć (od $U_d = 560\ V$). W przypadku etapu I i IV silnika HIKHET wartości odchyleń rosną od niskich do wysokich napięć (od 300 V do 560 V) i nie obserwuje się wyraźnego spadku ich wartości. Różnica ta jest spowodowana tym, że w przebiegach prądowych KLIMT występują bardzo wyraźne oscylacje BM, których amplituda prądu rośnie wraz z przykładanym napięciem, a dla najwyższych napięć silnik przechodzi w tryb lokalny. Natomiast w przypadku HIKHET przebiegi prądowe pozostają bardzo zaszumione dla każdego badanego napięcia, a amplituda oscylacji niemal cały czas wzrasta wraz ze wzrostem napięcia U_d.

Siła ciągu Pomiary siły ciągu są bardzo czasochłonne, ponieważ aby móc ich dokonać trzeba za każdym razem wyłączyć silnik, a następnie po uruchomieniu odczekać aż jego temperatura się ustabilizuje. Test wydajności wykonano zatem tylko dla wybranych warunków pomiarowych tj. podczas II etapu związanego z silnikiem KLIMT oraz II i III etapu związanego z HIKHET.

Na Rysunku 3.21, gdzie zestawiono wszystkie otrzymane siły ciągu, zgodnie z oczekiwaniami obserwuje się, że T rośnie wraz z przyłożonym napięciem. W przypadku silnika KLIMT dla U_d w zakresie od 560 V do 600 V następuje nagły wzrost (skok) siły ciągu od 11.05 mN do 12.96 mN. Wzrostu takiego nie obserwuje się w przypadku silnika HIKHET.



Rysunek 3.21: Siła ciągu w funkcji napięcia wyładowania U_d zmierzona dla obu silników. Kolor czerwony oznacza pomiary wykonane podczas II etapu projektu KLIMT, kolor błękitny i granatowy odpowiednio podczas II i III etapu projektu HIKHET.

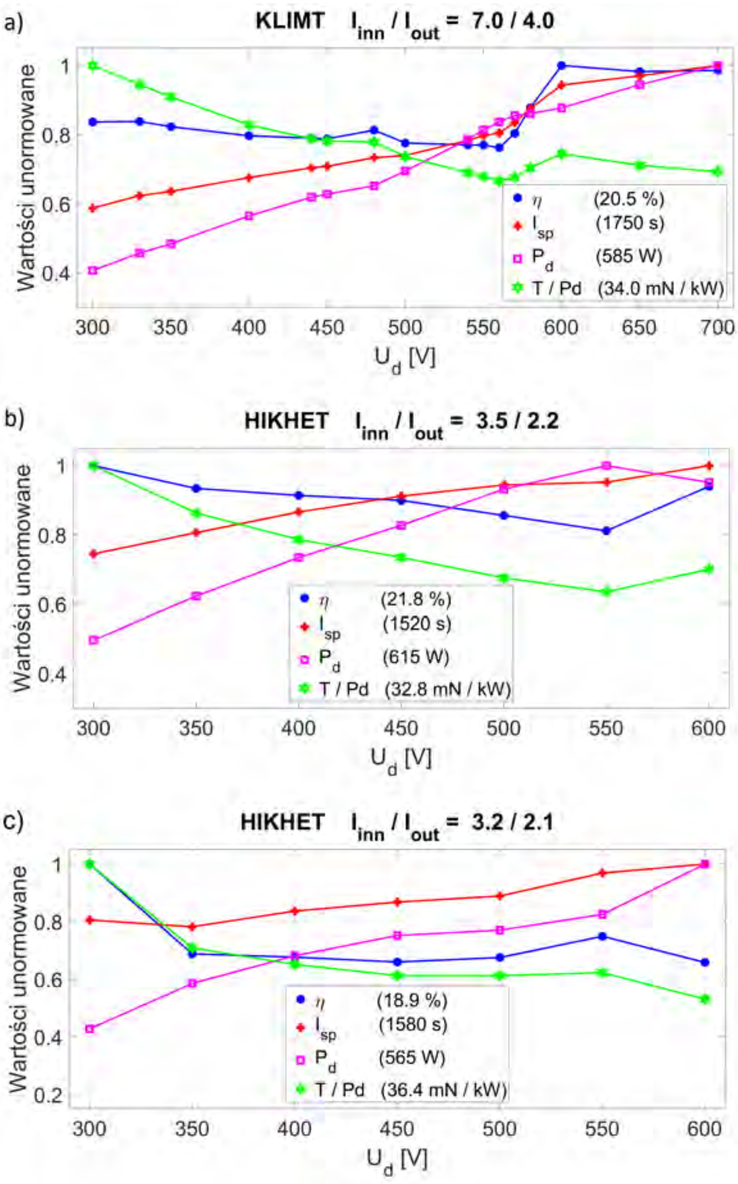
Poza przypadkiem $U_d = 300\ V$ większą siłę ciągu HIKHET osiągnął dla silniejszego pola magnetycznego.

Sprawność silnika Sprawność obydwu silników η, obliczona na podstawie wzoru 1.20, została przedstawiona na Rysunku 3.22. Zauważono, że w obszarze 560 - 600 V następowała gwałtowana poprawa sprawności silnika KLIMT od 15.6 % do 20.5 %, a następnie utrzymywała się ona na podobnym poziomie dla najwyższych napięć 650 V i 700 V. Największą sprawność HIKHET uzyskiwał dla najniższego napięcia wyładowania U_d równego 300 V i wynosiła ona 21.8 % w II etapie oraz 18.9 % w etapie III.

Impuls właściwy Wartości impulsu właściwego I_{sp} obliczone za pomocą wzoru 1.5 zostały również przedstawione na Rysunku 3.22. W przypadku obu silników wartości te zawsze rosły wraz z napięciem wyładowania. Dla $U_d = 600\ V$ największy impuls właściwy równy 1650 s uzyskał silnik KLIMT, a wyniki HIKHET dla etapu II i III były odpowiednio o około 70 s i 135 s gorsze. Warte uwagi jest to, że ponownie w przypadku silnika KLIMT pojawia się skok wartości – impuls właściwy wzrasta z 1410 s do 1650 s dla napięć od 560 V do 600 V.

Całkowita wartość prądu jonowego Analizując wykres z Rysunku 3.23 przedstawiający całkowity prąd jonowy I_i otrzymany z zastosowania wzoru 3.3 do danych eksperymentalnych, można zauważyć, że w przypadku silnika KLIMT dla stosunku prądów w cewkach I_{inn}/I_{out} równego 7.0 A do 4.0 A, najszybszy wzrost prądu jonowego następuje od 550 V do 600 V, czemu w przypadku etapu I odpowiada wzrost wartości I_i od 0.465 A do 0.502 A. Dla każdej konfiguracji pola magnetycznego KLIMT następuje początkowe obniżenie I_i wraz z rosnącym napięciem U_d, a następnie wzrost ilości jonów produkowanych w kierunku sondy. Prądy jonowe zebrane podczas działania silnika HIKHET były większe niż w przypadku KLIMT dla stosunkowo szerokiego przedziału od 300 V do 550 V.

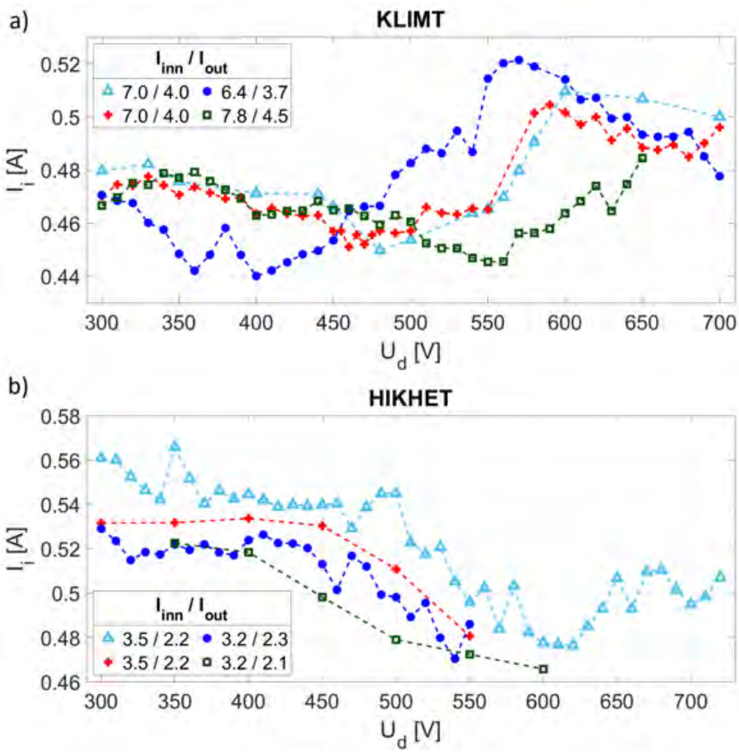
Zmienność prądu I_i w funkcji przyłożonego napięcia U_d podczas I i II etapu projektu KLIMT jest podobna, co świadczy o tym, że warunki, w których pracował silnik musiały być zbliżone. Zgodność w tym przypadku jest znacznie większa niż dla odpowiadających



Rysunek 3.22: Wydajność η (wzór 1.20), impuls właściwy I_{sp} (wzór 1.5), moc wyładowania P_d, oraz stosunek siły ciągu do mocy wyładowania T/P_d. Wszystkie uzyskane wyniki zostały podzielone przez największe uzyskane wartości zamieszczone w legendzie wykresu.

sobie etapów I i II projektu HIKHET, co może świadczyć o występowaniu odmiennych warunków sprzyjających jonizacji gazu w kanale wyładowania.

Moc wiązki Wartości mocy wiązki P_{jet} we wszystkich przypadkach rosły wraz z przyłożonym napięciem U_d, co przedstawia Rysunek 3.24. Wyniki dla silnika KLIMT uzyskane w dwóch różnych dniach pomiarowych (etap I i II) były ze sobą zgodne, czego nie można powiedzieć o wynikach uzyskanych przez silnik HIKHET (etap I i II), gdzie wartości P_{jet} wytworzone jednego dnia różnią się o około 10 W od mocy uzyskanych 6 dni później. Wynika z tego, że silnik nie pracował w ten sam sposób i nie ma podstaw do przeprowadzania



Rysunek 3.23: Całkowity prąd jonowy (wzór 3.3) w funkcji napięcia U_d po usunięciu części prądu jonowego pochodzącego z oddziaływań CEX dla: a) silnika KLIMT, b) silnika HIKHET.

analizy zbiorczej dotyczącej pomiarów silnika HIKHET z różnych okresów.

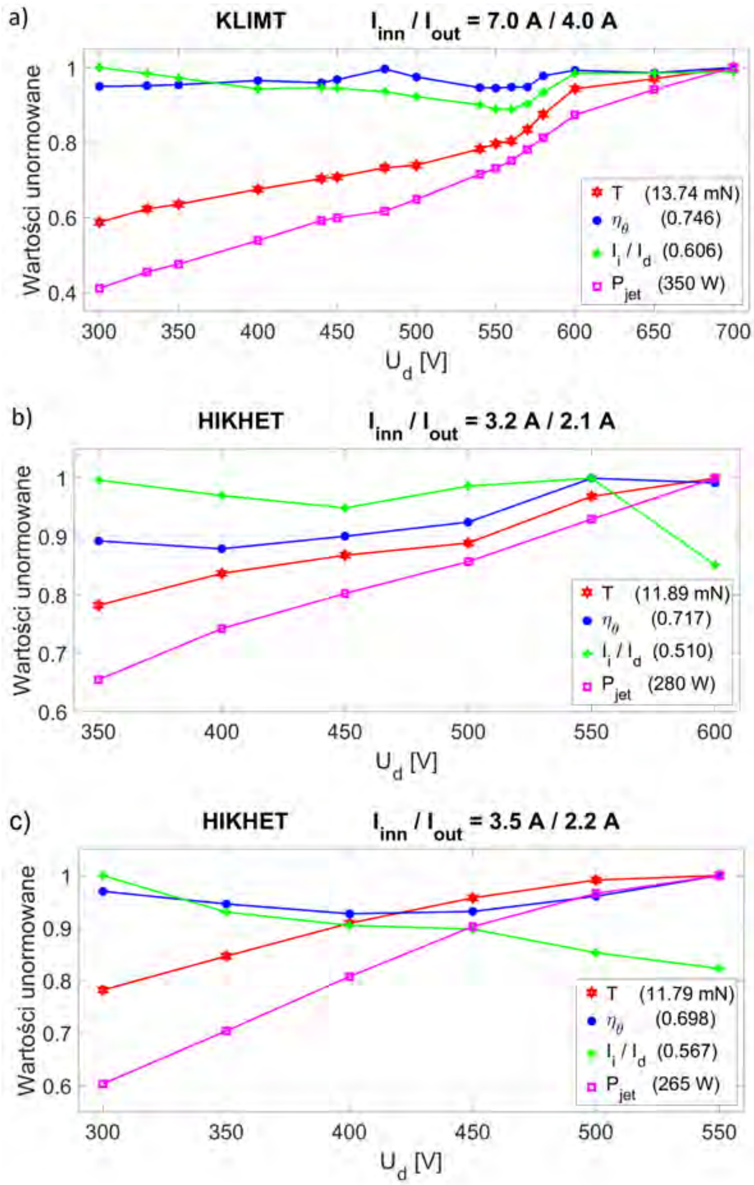
Na Rysunku 3.24 dobrze widoczny jest znaczny wzrost mocy wiązki P_{jet}, siły ciągu T, wykorzystania prądu I_i/I_d oraz wydajności związanej z rozbieżnością wiązki η_θ w zakresie od 550 V do 600 V, co wraz z wynikami prezentowanymi na Rysunku 3.22 potwierdza, że silnik w tym zakresie znacznie poprawił swoją sprawność.

Dla sesji pomiarowych, w których siła ciągu nie była mierzona bezpośrednio jej wartości oszacowano na podstawie następującej zależności:

$$T = A_f \sqrt{U_d} I_i \eta_\theta, \tag{3.5}$$

gdzie A_f stanowi czynnik normalizujący. Aby uniknąć wkładu od jonów pochodzących z wymiany ładunkowej do powyższego wzoru wstawiono wartości całkowitego prądu jonowego I_i oraz wydajności η_θ po usunięciu składowej pochodzącej z CEX.

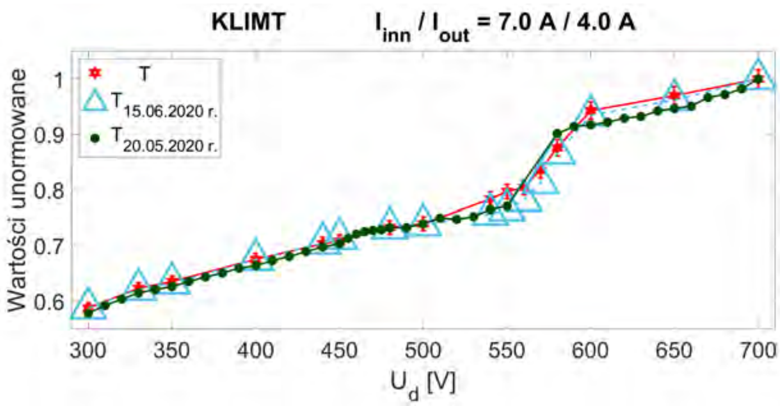
Na Rysunku 3.25 zestawiono wartości siły ciągu dla silnika KLIMT uzyskane z pomiarów za pomocą wagi aerodynamicznej z siłami ciągu pochodzącymi z oszacowań. Maksymalna różnica między wynikami uzyskanymi dzięki pomiarom siły ciągu podczas trwania II etapu projektu KLIMT a wynikami pochodzącymi z oszacowania wynosiła 3 %, co odpowiadało różnicy w sile ciągu 0.36 mN. Natomiast bez korekty polegającej na usunięciu składowej CEX liczby te wynosiły odpowiednio 5 % i 0.47 mN. Oszacowanie siły ciągu dla I etapu (etap bez pomiaru siły ciągu) i dla II etapu (etap z pomiarem siły ciągu) dało



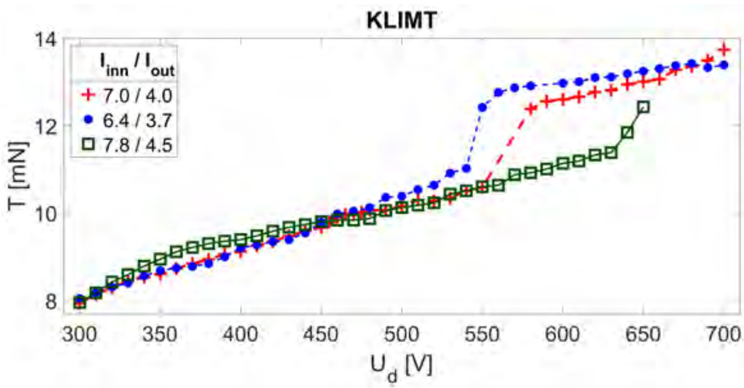
Rysunek 3.24: Siła ciągu T, wydajność η_θ, wykorzystanie prądu I_i/I_d oraz moc wiązki P_{jet}. Wszystkie uzyskane wyniki zostały podzielone przez największe uzyskane wartości zamieszczone w legendzie wykresu.

bardzo dobrą zgodność (największe odstępstwo wynosiło 0.43 mN i występowało przy U_d = 580 V), co świadczy o tym, że praca silnika nie uległa zmianie i oznacza, że można w ten sposób określić wydajność silnika w sposób pośredni bez potrzeby jego wyłączania.

Na podobnej zasadzie zostały oszacowane wartości siły ciągu dla stosunku prądów w cewkach I_{inn}/I_{out} równego 6.4 A do 3.7 A oraz 7.8 A do 4.5 A. Chociaż w tych przypadkach jakość oszacowania można było sprawdzić tylko w kilku punktach, dla najsłabszego pola magnetycznego pojawił się znaczny wzrost siły ciągu od U_d równego 500 do 600 V, co oznacza znaczny wzrost sprawności silnika. Wyniki zbiorcze wszystkich oszacowań siły



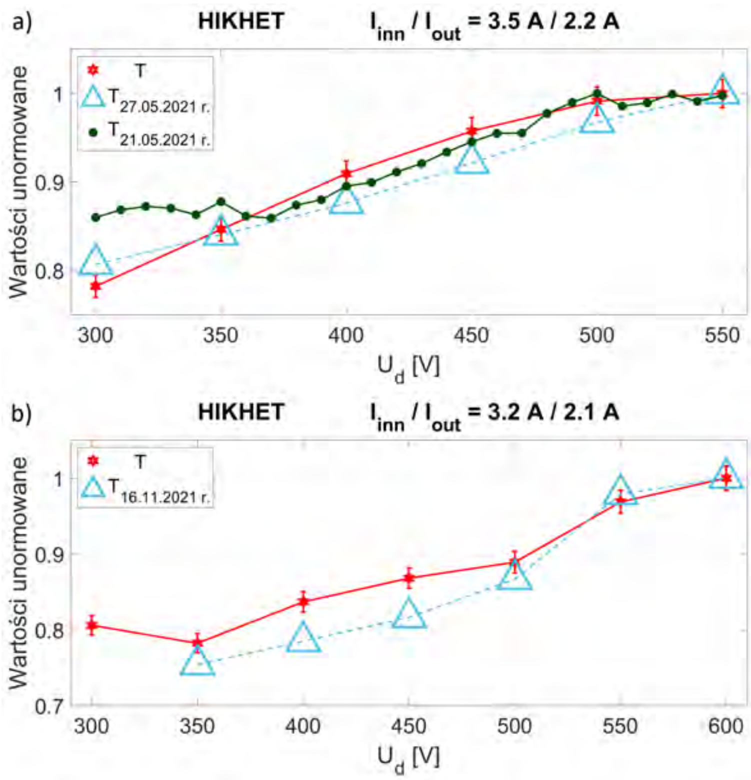
Rysunek 3.25: Zmierzona siła ciągu uzyskana podczas II etapu projektu KLIMT (kolor czerwony) i siła ciągu oszacowana przy pomocy wzoru 3.5, gdzie kolorem niebieskim zostały zaznaczone oszacowania dla pomiarów z dnia pomiaru siły ciągu, a kolorem zielonym oszacowania dla I etapu (etap bez pomiaru siły ciągu).



Rysunek 3.26: Wartości siły ciągu uzyskane z oszacowań przy pomocy wzoru 3.5 dla trzech kombinacji prądów w cewkach.

ciągu przedstawiono na Rysunku 3.26. Wraz ze wzrostem pola magnetycznego skokowy wzrost sprawności silnika następuje dla coraz większego napięcia wyładowania.

Rezultaty dopasowań sił ciągu dotyczące silnika HIKHET zaprezentowane na Rysunku 3.27 wykazują pewną rozbieżność. Dla przypadku b) (I_{inn}/I_{out} = 3.2 A / 2.1 A) dla wysokich napięć wyniki bezpośrednich pomiarów są zgodne z oszacowaniami, jednakże przy niskich napięciach (od 350 do 450 V) zachowanie się wiązki jonów musiało zostać w jakiś sposób zaburzone. Podobne rozbieżności obserwuje się w przypadku a) dla napięć od 300 V do 350 V. Przypuszczalnie może to mieć związek np. z odchyleniem wiązki plazmowej od płaszczyzny przemiatanej przez sondy w wyniku przytkania bądź rozszczelnienia części dystrybutora gazu. Ponieważ nie przerwano sesji aby wstawić dystrybutor o innej geometrii, problem zaburzenia wyników pomiarów będzie dotyczył wszystkich pomiarów zwiaząnych z silnikiem HIKHET.



Rysunek 3.27: Wartosci siły ciągu uzyskane z pomiarów za pomocą wagi aerodynamicznej (kolor czerwony), oraz oszacowania sił ciągu za pomocą wzoru 3.5 dla danych z tego samego dnia (kolor niebieski). W przypadku a) kolorem zielonym zostały wykreślone oszacowania z innego dnia pomiarowego.

Najlepszymi wyznacznikami osiągów silnika Halla są: siła ciągu T, impuls właściwy I_{sp} oraz wydajność η. Większą wartość siły ciągu osiągał silnik HIKHET w zakresie napięć U_d do 580 V, ale po wyraźnym wzroście wartości od U_d równego 550 V do 600 V większą siłę ciągu osiągnął KLIMT (Rysunek 3.21). Poza $U_d = 300$ V największą sprawność i najwyższy impuls właściwy osiągał KLIMT dla wysokich napięć wyładowania 600 - 700 V (Rysunek 3.22). Ponieważ maksimum lokalne stosunku T/P_d następowało przy 600 V, należy to uznać za najlepszy osiągnięty wynik przy tym doborze prądów w cewkach.

Podsumowując uzyskane wyniki można uznać, że zachowanie się silnika KLIMT jest dużo bardziej interesujące, zwłaszcza w regionie 550 - 600 V przy stosunku prądów w cewkach I_{inn}/I_{out} równym 7.0 A do 4.0 A, gdzie następuje duża zmiana siły ciągu, impulsu właściwego, obu wydajności η i η_θ, całkowitego prądu jonowego I_i, jak i jego stosunku do prądu wyładowania I_d oraz mocy wiązki P_{jet}. Wyniki oszacowań dla etapu III a) ($I_{inn}/I_{out} = 6.4$ A / 3.7 A) pokazują, że od 490 V do 500 V ma się do czynienia z podobnym wzrostem siły ciągu, jak w przypadku pola magnetycznego o średnim natężeniu (patrz Rysunek 3.26). Wzrost taki potwierdzają wyniki związane z rozbieżnością wiązki oraz stosunkiem I_i do I_d.

Rozdział 4

Poszukiwanie zachowań chaotycznych

Chociaż silnik Halla nazywany jest również stacjonarnym silnikiem plazmowym i można powiedzieć, że działa (niemalże) stabilnie dopóki dostarczana jest mu energia i paliwo, niestabilności plazmy powodują oscylacje prądu wyładowania w bardzo szerokim zakresie częstotliwości. Głównym celem tej pracy doktorskiej było zbadanie dynamiki plazmy wytwarzanej przez silnik Halla (czyli zbadanie charakteru zmienności mierzonego prądu) pod kątem chaosu, a w szczególności chaosu deterministycznego, dla lepszego zrozumienia procesów wpływających na osiągi tego urządzenia. Dlatego najpierw wykonano analizę wydajności silnika (rozdział 3.4), a następnie poszukiwano oznak chaosu w danych eksperymentalnych dotyczących prądu wyładowania oraz prądu jonowego. Szczegóły tych badań oraz analizę ich wyników przedstawia rozdział 4. Rozdział ten stanowi zatem clou całej rozprawy doktorskiej – w niniejszym rozdziale posłużono się metodami poszukiwania zachowań chaotycznych przy pomocy wszystkich wskaźników opisanych w rozdziale 2.

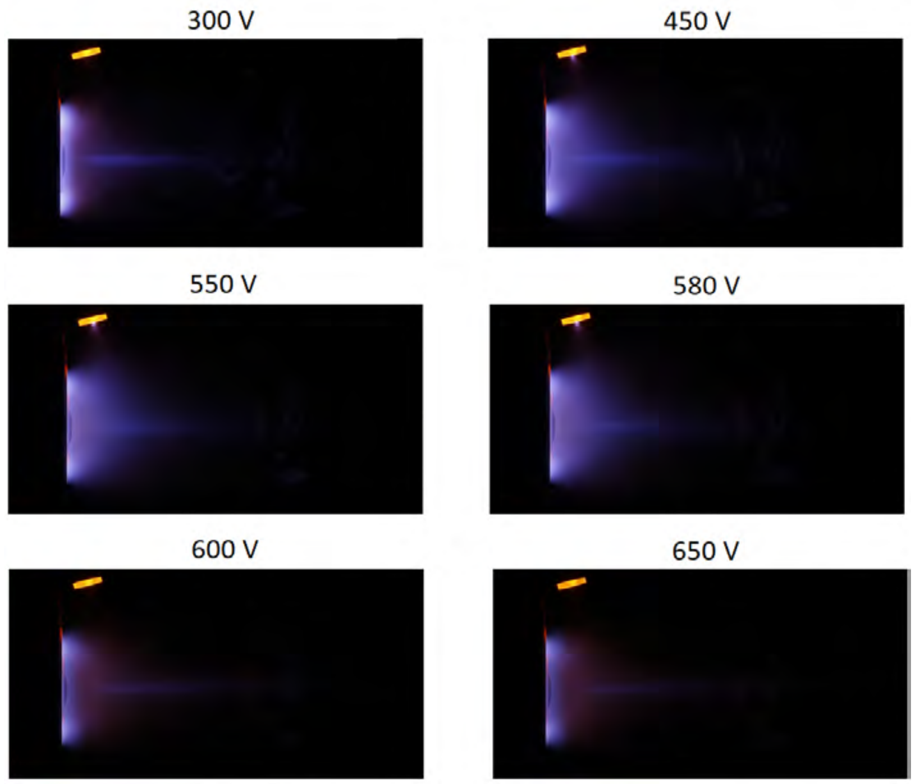
4.1 Wybór reprezentacji danych

Podczas sporządzanej analizy wzięto pod uwagę wszystkie dokonane pomiary jednak z powodu ich ogromnej ilości w rozprawie przedstawiono tylko niektóre wyniki. Wybrana została zatem pewna grupa danych pomiarowych stanowiąca reprezentację wszystkich pomiarów, której wyniki zostały omówione w sposób szczegółowy. Tabela zawierająca spis wszystkich przeprowadzonych pomiarów została przedstawiona w Dodatku A.

Z powodu przypuszczenia, że dystrybutor gazu w przypadku silnika HIKHET uległ rozszczelnieniu, wyselekcjonowane dane dotyczą wyłącznie silnika KLIMT. Jak wynika z analizy przedstawionej w rozdziale 3.4, silnik ten przy użyciu prądów w cewkach I_{inn} = 7.0 A i I_{out} = 4.0 A podczas podwyższania napięcia wyładowania wykazywał znaczną zmianę charakteru oscylacji, co z kolei silnie wpływało na jego wydajność. Ponadto następował skokowy wzrost siły ciągu od U_d równego 550 V do 600 V, dzięki czemu można zadać pytanie o to czy zanik/pojawienie się oscylacji chaotycznych przed i po tym nagłym wzroście może mieć znaczący wpływ na zachowanie silnika. Ponieważ podobny trend był obserwowany dla dwóch pozostałych topografii pola magnetycznego wybrane warunki są reprezentatywne dla wszystkich pomiarów dotyczących silnika KLIMT. W związku z po-

KLIMT	I_{inn} / I_{out} = 7.0 A / 4.0 A					
U_d	300 V	450 V	550 V	580 V	600 V	650 V
nr pomiaru	2	17	30	31	33	38

Tabela 4.1: Napięcia i numery pomiarów, dla których przedstawiono pełne badania pod względem poszukiwania zachowań chaotycznych.



Rysunek 4.1: Zdjęcia wiązki plazmowej dla przypadków z Tabeli 4.1. Intensywność poświaty jest proporcjonalna do gęstości plazmy. Plazma zmienia kolor wraz z napięciem U_d, dlatego skupiona centralna część wiązki dla wyższych napięć przestaje być dobrze widoczna. Rozgrzana katoda świeci na żółto.

wyższym wyniki dotyczące innych stosunków prądów w cewkach zostały zaprezentowane tylko częściowo.

Sześć napięć z wybranej sesji pomiarowej, których wyniki zostaną przedstawione w sposób najbardziej szczegółowy zebrano w Tabeli 4.1. Napięcia te były używane zarówno podczas etapu I (pomiary 2, 17, 30, 31, 33 i 38, tryb bez pomiaru siły ciągu) jak i etapu II projektu KLIMT (pomiary 45, 50, 54, 57-59, tryb z pomiarem siły ciągu). Jak pokazano w rozdziale 3.4 zachowanie silnika w obydwu etapach było takie samo, zatem można określić wpływ siły ciągu na wyniki poszukiwań chaosu dla pomiarów zebranych w tabeli.

Na Rysunku 4.1 umieszczono niektóre zdjęcia wiązek plazmowych wytworzonych przez silnik Halla. Widać na nich, że objętość obszaru plazmy na zewnątrz kanału wyładowania zwiększa się wraz z napięciem U_d od 300 V do 550 V, natomiast dla najwyższych napięć plazma skupia się bardziej we wnętrzu kanału, przez co następuje kolimacja wiązki plazmowej, co zwiększa siłę ciągu (Rysunek 3.24). Podobnie jak u Yongjie'a Dinga i in. [66] po i przed katastrofą (czyli zmianą trybu działania silnika) wiązka plazmowa zmienia swoją geometrię ze stanu rozbieżnego (tryb globalny) do stanu skupionego (tryb lokalny). Zwiększona objętość wiązki znajdującej się na zewnątrz kanału niekorzystnie wpływa też na całkowitą ilość produkowanych jonów (Rysunek 3.23), ponieważ cząstki plazmy znajdują się wtedy poza obszarem efektywnej jonizacji.

Na Rysunku 4.2 umieszczono wycinki szeregów czasowych o długości 0.5 ms, tak aby uwidocznić pojedyncze oscylacje prądowe. Na wykresach można zauważyć, że dane prądu wyładowania (kolumna c)) są mniej zaszumione niż dane pochodzące z sond (kolumny a) i b)). Oscylacje prądu wyładowania powinny być również silnie odtwarzane w prądzie jonowym. I rzeczywiście, w zarejestrowanych sygnałach z sond FC i FP obserwuje się zachowanie podobne do prądu wyładowania, co pokazano na tym rysunku. Dla niskich napięć ($U_d = 300\ V$, 450 V i 550 V) dominują oscylacje trybu oddechowego (BM) o okresie około 0.03 ms. Dla przypadku $U_d = 450\ V$ następują przełączenia między trybem globalnym a lokalnym (rozdział 1.1.5) [108]. Dla wyższych napięć ($U_d = 580\ V$, 600 V i 650 V) przebiegi prądowe stają się mniej regularne, i reprezentują oscylacje modu lokalnego.

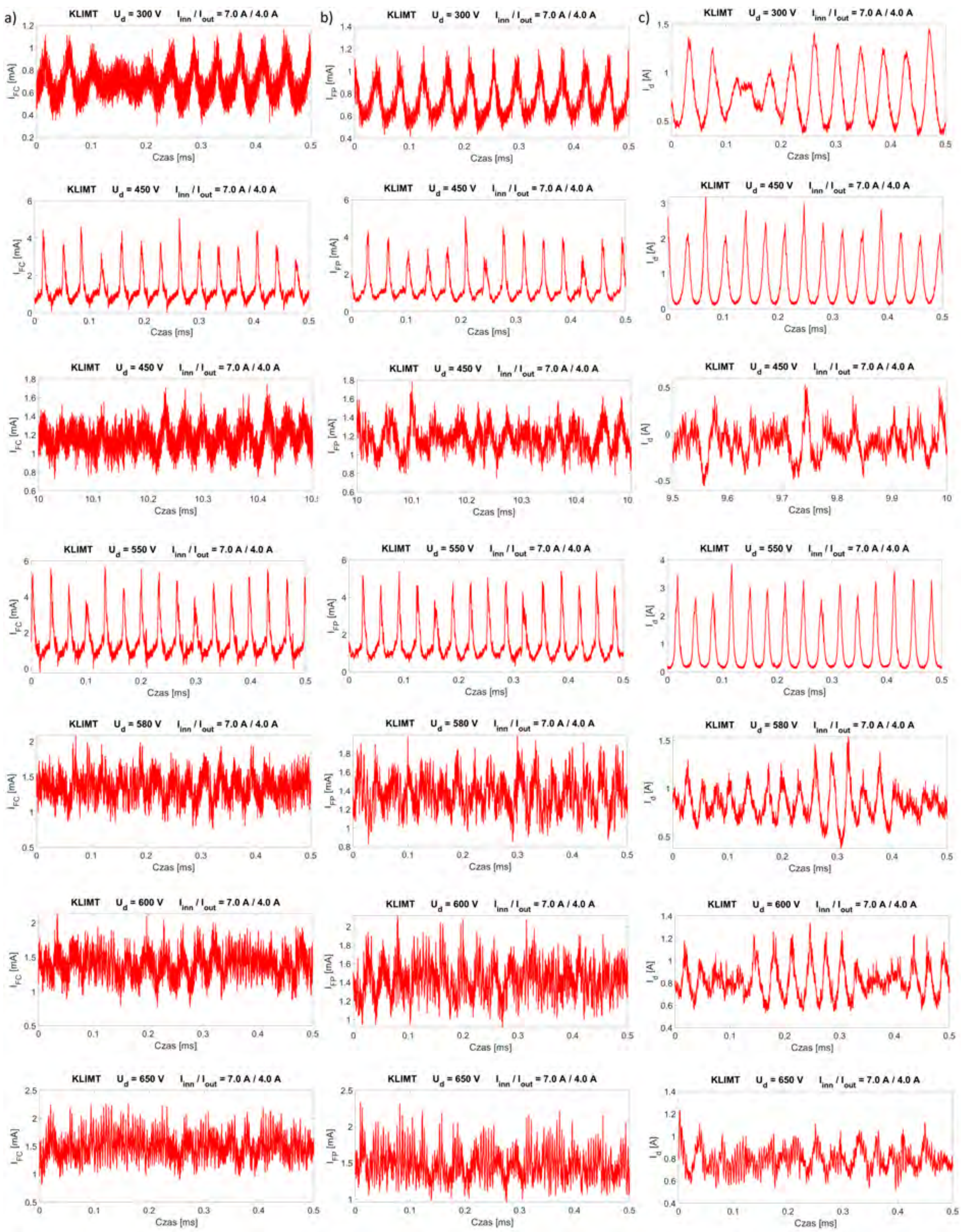
Zgodnie z opisem z artykułu Michaela Sekaraka i in. [203] w globalnym trybie oscylacji amplituda oscylacji prądu wyładowania jest duża w stosunku do średniej wartości prądu wyładowania, natomiast po przejściu do modu lokalnego średni prąd wyładowania maleje tak jak i amplituda oscylacji, co zostało również zaobserwowane w przebiegach zarejestrowanych na potrzeby tej rozprawy doktorskiej.

4.2 Analiza zebranych szeregów czasowych

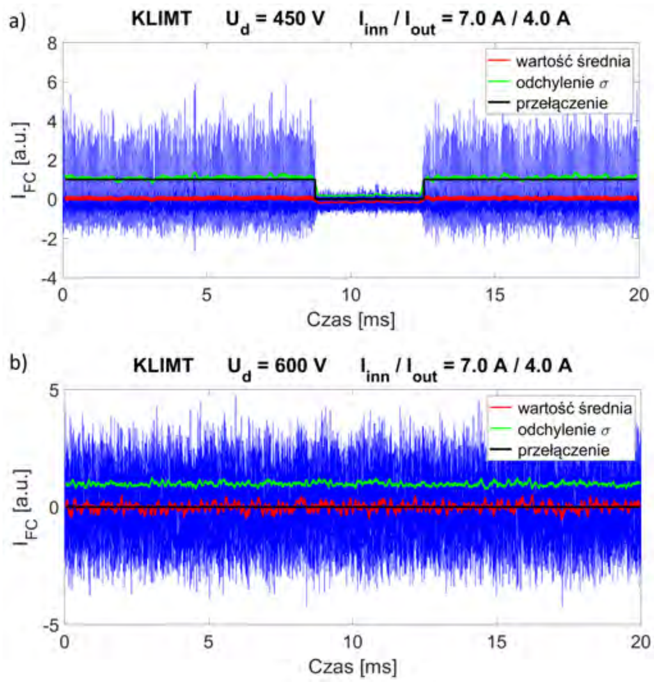
Rozdział 4.2 rozpoczyna się testami, których wyniki świadczą o stacjonarności badanych szeregów czasowych. Następnie wykreślone zostają diagramy bifurkacyjne, gdzie parametr kontrolny stanowiło napięcie wyładowania, oraz widma mocy prądu wyładowania i prądu jonowego.

4.2.1 Testy stacjonarności

Aby w ogóle rozważać analizę danych pod kątem chaosu należy najpierw przetestować stacjonarność badanych procesów. Większość konwencjonalnych metod analizy szeregów czasowych w domyśle zakłada, że dane pochodzą z liniowego układu dynamicznego, posiadającego potencjalnie wiele stopni swobody oraz dodatkowy szum. Tak więc zakłada się, że widmo mocy jest superpozycją (sumą) dyskretnych składowych i składowych wykładniczych zaburzonych fluktuacjami pochodzącymi od szumu. Jeśli takich składników jest wiele, szeregi czasowe mogą wyglądać dość nieregularnie, ale nie muszą być chaotyczne [216].



Rysunek 4.2: Wycinki szeregów czasowych dotyczące danych z Tabeli 4.1. Kolumna a) odpowiada sygnałom jonowym zebranym przez sondę FC, kolumna b) przez FP, a c) dotyczy przebiegów prądu wyładowania. Dla napięcia $U_d = 450\ V$, ze względu na przełączenia między trybami, przedstawione zostały dwa szeregi, gdzie górny odpowiada modowi globalnemu, a dolny lokalnemu.



Rysunek 4.3: Dwa przebiegi prądu jonowego zebrane przy pomocy sondy FC (pomiary 17 i 33). Zmiana poziomu linii przełączenia przedstawia przełączenia między trybami, gdzie w panelu a) wyższy poziom prezentuje tryb globalny, a w panelu b) przełączenie nie jest obserwowane (prąd oscyluje tylko w trybie lokalnym).

Składowe wykładnicze zwykle prowadzą do niestacjonarności. Niestacjonarność ta jest właściwością samego procesu i powstaje, gdy mechanizm wytwarzający te składowe zmienia się w czasie. W tym przypadku niektóre cechy szeregu czasowego, takie jak wartość średnia lub odchylenie standardowe będą zmieniać się w czasie [216].

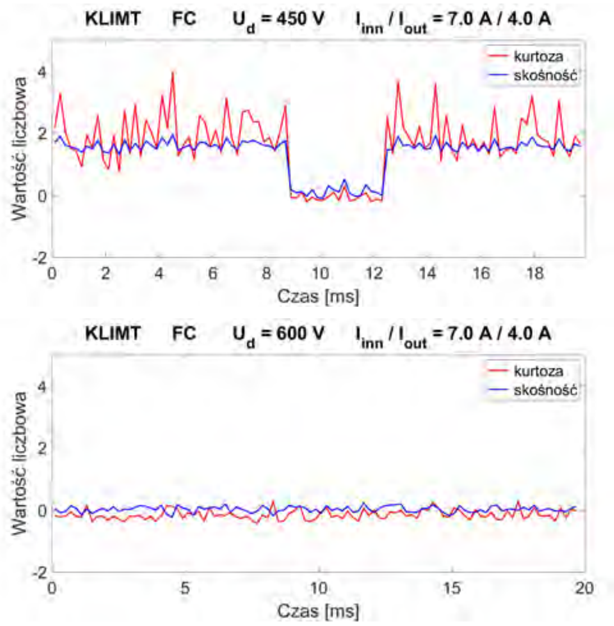
Na Rysunku 4.3 przedstawione zostały przykładowe przebiegi prądu jonowego zebranego przez sondę FC, gdzie wyrysowane zostały ponadto wartości średnie oraz odchylenia standardowe σ, aby uwidocznić, że w poszczególnych trybach oscylacji nie ulegały one istotnej zmianie. Na tym samym rysunku kolorem czarnym zaznaczone zostały również przełączenia między trybem globalnym i lokalnym.

Szereg czasowy X_n, gdzie $n = 1, \dots, N$, którego pierwsze dwa momenty (średnia $\langle X \rangle$ i wariancja σ) są stałe, wykazuje stacjonarność w sensie słabym. Taki warunek może być jednak niewystarczający przy analizie układu chaotycznego. Konieczna jest zatem analiza wyższych momentów.

Trzeci moment, czyli współczynnik skośności (ang. *skewness*):

$$Skew(X) = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\left[\frac{X_n - \langle X \rangle}{\sigma}\right]^3 \tag{4.1}$$

jest miarą asymetrii rozkładu. Natomiast czwarty moment centralny rozkładu pomniej-



Rysunek 4.4: Skośność i kurtoza przebiegów prądu jonowego zebranego sondą FC (pomiary 17 i 33). W celu uzyskania wyniku użyto przedziału czasu uśrednienia równego 200 μs.

szony o liczbę 3, zwany kurtozą (ang. *kurtosis*):

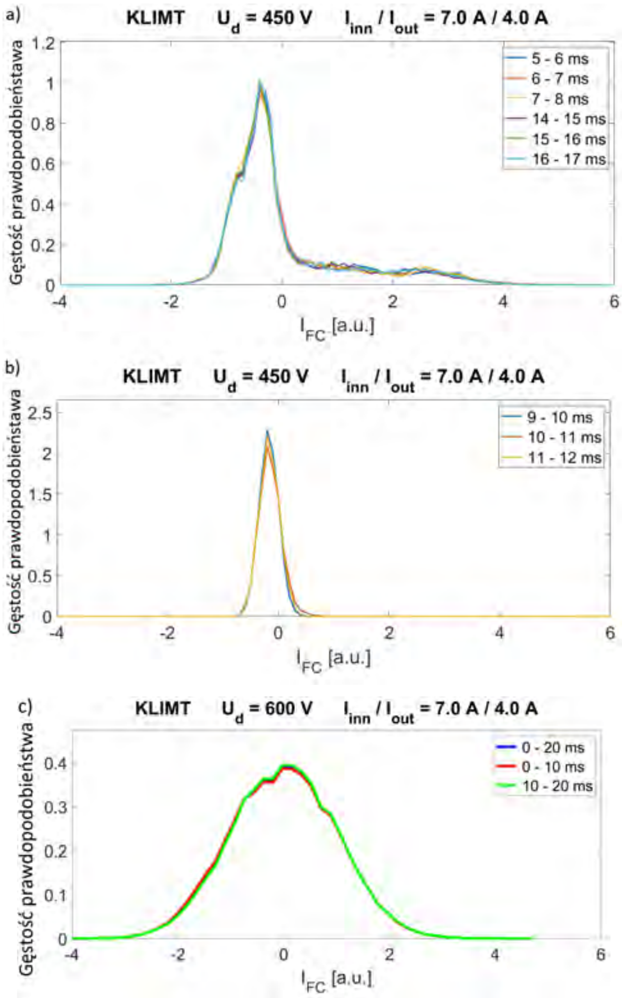
$$Kurt(X) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \left[\frac{X_n - \langle X \rangle}{\sigma} \right]^4 - 3 \tag{4.2}$$

mierzy skupienie rozkładu w stosunku do rozkładu normalnego (gaussowskiego). Rozkład z dodatnią kurtozą nazywany jest leptokurtycznym (lub rozkładem z grubym ogonem), a rozkład z ujemną kurtozą nazywany jest platykurtycznym [216].

Rysunek 4.4 przedstawia zmiany skośności $Skew(I_{FC})$ i kurtozy $Kurt(I_{FC})$ prądu jonowego zebranego przez sondę FC dla dwóch przykładowych napięć. Poza przełączeniami między trybami działania silnika, skośność i kurtoza nie podlegały żadnemu trendowi. Dla sygnałów wysoko-amplitudowych kurtoza pozostawała znacznie zaszumiona, więc na jej podstawie ciężko wyciągnąć jednoznaczny wniosek odnośnie stacjonarności.

Wielkości w postaci średniej, wariancji, skośności oraz kurtozy to tylko kilka z bardzo wielu, które charakteryzują rozkład wartości. Można też badać zmienność rozkładu bezpośrednio, wykreślając go dla różnych przedziałów czasu. Aby szereg czasowy pozostał stacjonarny w sensie ścisłym rozkład ten musi pozostać stały w czasie w granicach niepewności statystycznych.

Potwierdzenie stacjonarności badanych szeregów obrazuje Rysunek 4.5, gdzie pokazano, że funkcja rozkładu $P(I_{FC})$ nie zmienia się w czasie. W przypadku a) zaprezentowano rozkłady $P(I_{FC})$ dla $U_d = 450\ V$ dla sześciu odcinków czasu. Pierwsze trzy odcinki reprezentują tryb globalny przed przejściem silnika w tryb lokalny, a kolejne trzy reprezentują przebiegi po powrocie do trybu globalnego. Rozkłady dotyczące tego trybu nie uległy



Rysunek 4.5: Rozkład prawdopodobieństwa $P(I_{FC})$ prądu jonowego mierzonego sondą FC (pomiary 17 i 33).

zmianie. W przypadku b) przedstawiono rozkłady dla odcinków czasu, które reprezentują tryb lokalny i tutaj też poszczególne rozkłady pozostają ze sobą zgodne. W przypadku c) zostały porówane następujące rozkłady dla $U_d = 600\ V$: rozkład dotyczący całego pomiaru (20 ms), rozkład dla pierwszych 10 ms i rozkład dla ostatniej części (odcinek od 10 do 20 ms). Ponownie funkcja rozkładu $P(I_{FC})$ nie zmieniała sie w czasie.

Powyższe badanie stacjonarności zostało przeprowadzone dla wszystkich pomiarów wykonanych na potrzeby tej rozprawy doktorskiej (Dodatek A). Stwierdzono, że zebrane szeregi czasowe można uznać za stacjonarne, a w konsekwencji można przeprowadzić analizę pod względem zachowań chaotycznych.

4.2.2 Analiza diagramów bifurkacyjnych

Zmiany w zachowaniu prądu jonowego lub prądu wyładowania można przedstawić za pomocą częstotliwości występowania chwilowych amplitud sygnału. Podrozdział ten zawiera zatem histogramy ekstremów lokalnych, czyli tzw. diagramy bifurkacyjne, przedstawiające ewolucję amplitud dla różnych napięć wyładowania. Stworzone diagramy bifurkacyjne dotyczą prądu jonowego i prądu wyładowania przy trzech topografiach pola magnetycznego indukowanego przez trzy stosunki prądów cewek silnika KLIMT.

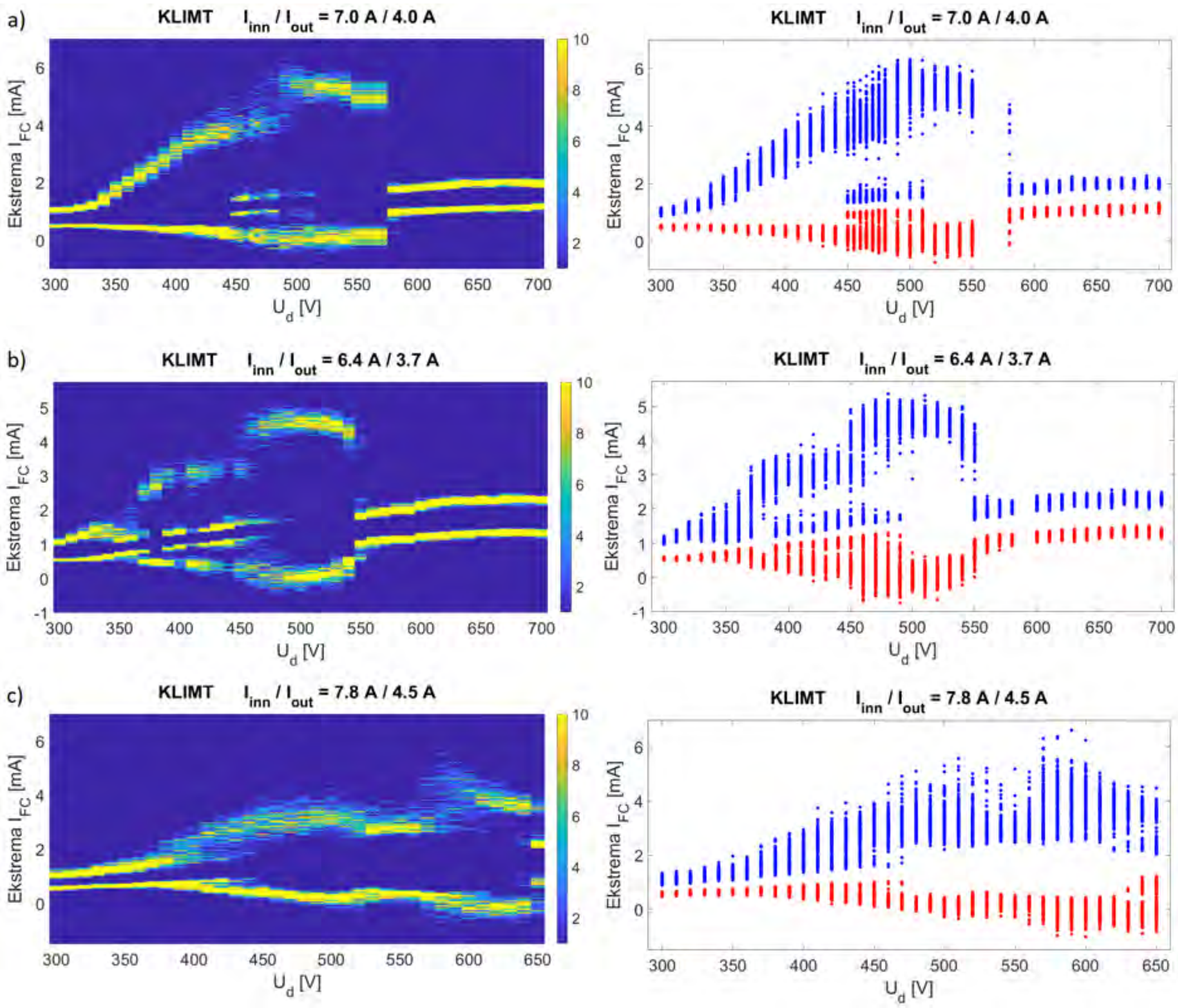
Na Rysunkach 4.6, 4.7 i 4.8 przedstawione zostały histogramy ekstremów lokalnych amplitud sygnałów dotyczących odpowiednio sondy FC, FP oraz prądu wyładowania I_d. Kolorami kropek odróżniono maksima i minima lokalne, podobnie jak w przypadku diagramów bifurkacyjnych przedstawiających odwzorowanie logistyczne (Rysunek 2.2) oraz wzbudzany model Lotki-Volterry (Rysunek 2.3). Rozmiar okna zestawu danych używanego do wyszukiwania minimów i maksimów zostało ustawione na 100 μs, co odpowiada kilku pojedynczym oscylacjom trybu oddechowego.

Standardowy diagram bifurkacyjny został wzbogacony o informacje na temat gęstości ekstremów o danej wartości zidentyfikowanych w odpowiednich szeregach czasowych, co zostało przedstawione na pierwszych kolumnach na Rysunkach 4.6, 4.7 i 4.8. Dostarczyło to dodatkowych informacji o tym, jak często system odwiedzał określone stany.

W badaniach nad silnikiem Halla pole magnetyczne zostało dostosowane do poszukiwania najlepszych osiągów silnika pod względem sprawności anodowej η_a i wysokiego impulsu właściwego I_{sp}. Różne wyselekcjonowane topografie pola magnetycznego przedstawia Rysunek 4.9. Jak widać, wraz ze wzrostem prądu w cewkach wzrasta natężenie pola magnetycznego w obszarze jonizacji i nieznacznie zmienia się kształt linii pola magnetycznego. Zmiana topografii pola magnetycznego wpływa na dynamikę przebiegów prądowych a zatem na wygląd wykresów bifurkacyjnych.

Zachowanie na diagramach jest podobne dla prądu wyładowania i prądu jonowego tzn. występują podobne struktury dla tych samych przedziałów napieć. Wykres bifurkacyjny I_d będzie się jednak nieznacznie różnił od wykresów FC i FP, ponieważ sygnał prądu wyładowania zawiera nie tylko informacje o prądzie jonowym, ale posiada również składową elektronową. Poza tym prąd jonowy zawiera składowe jonowe o różnym stopniu jonizacji, które docierają do sondy w odmiennym czasie, co nie ma miejsca w prądzie wyładowania. Dla obu sond we wszystkich przypadkach kształty gałęzi maksimów są bardzo podobne. Jednak sygnał FP jest wyraźny, tak jak ten pochodzący z I_d, natomiast sygnał z FC charakteryzuje się rozmytą gałęzią dolnych minimów, o wartościach często niższych od zera, co oznacza, że z jakiegoś powodu musiała zostać zebrana z plazmy większa ilość elektronów. Przyczyna tego zachowania pozostaje nieznana, dlatego wszystkie dalsze wyniki zostaną przedstawione głównie dla danych zebranych dzięki sondzie FP.

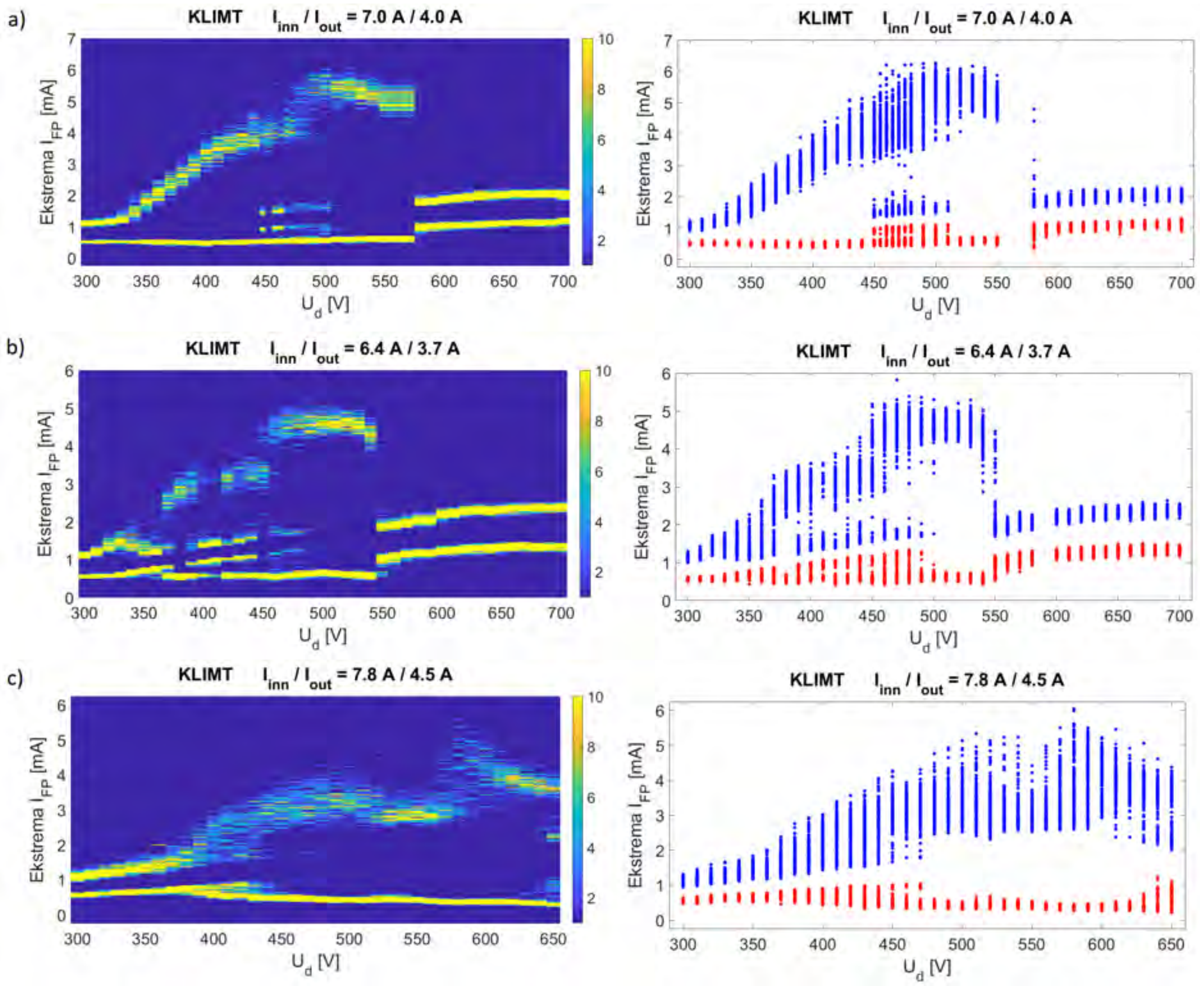
Na Rysunku 4.6 widać, że amplituda oscylacji wykazywała odmienne zachowanie dla różnych napięć wyładowania w zależności od użytego pola magnetycznego. Dla prądów w cewkach $I_{inn} = 7.0\ A$ i $I_{out} = 4.0\ A$ po przekroczeniu napięcia progowego, przy którym siła ciągu wykazywała skokową poprawę (Rysunek 3.25), na diagramie następuje znaczne zmniejszenie amplitudy. Podobna sytuacja ma miejsce w przypadku prądów w cewkach



Rysunek 4.6: Diagramy gęstościowe oraz diagramy bifurkacyjne dla danych uzyskanych przy pomocy sondy FC. Przypadek a) dotyczy I etapu, a b) i c) III etapu badań silnika KLIMT. Napięcie wyładowania stanowiło parametr kontrolny. Niebieskie kropki oznaczają maksima lokalne, a czerwone minima lokalne. Rozdzielczość prądu dla diagramów gęstościowych ustawiona została na $0.032\ mA$.

$I_{inn} = 6.4\ A$ i $I_{out} = 3.7\ A$ (Rysunek 3.26).

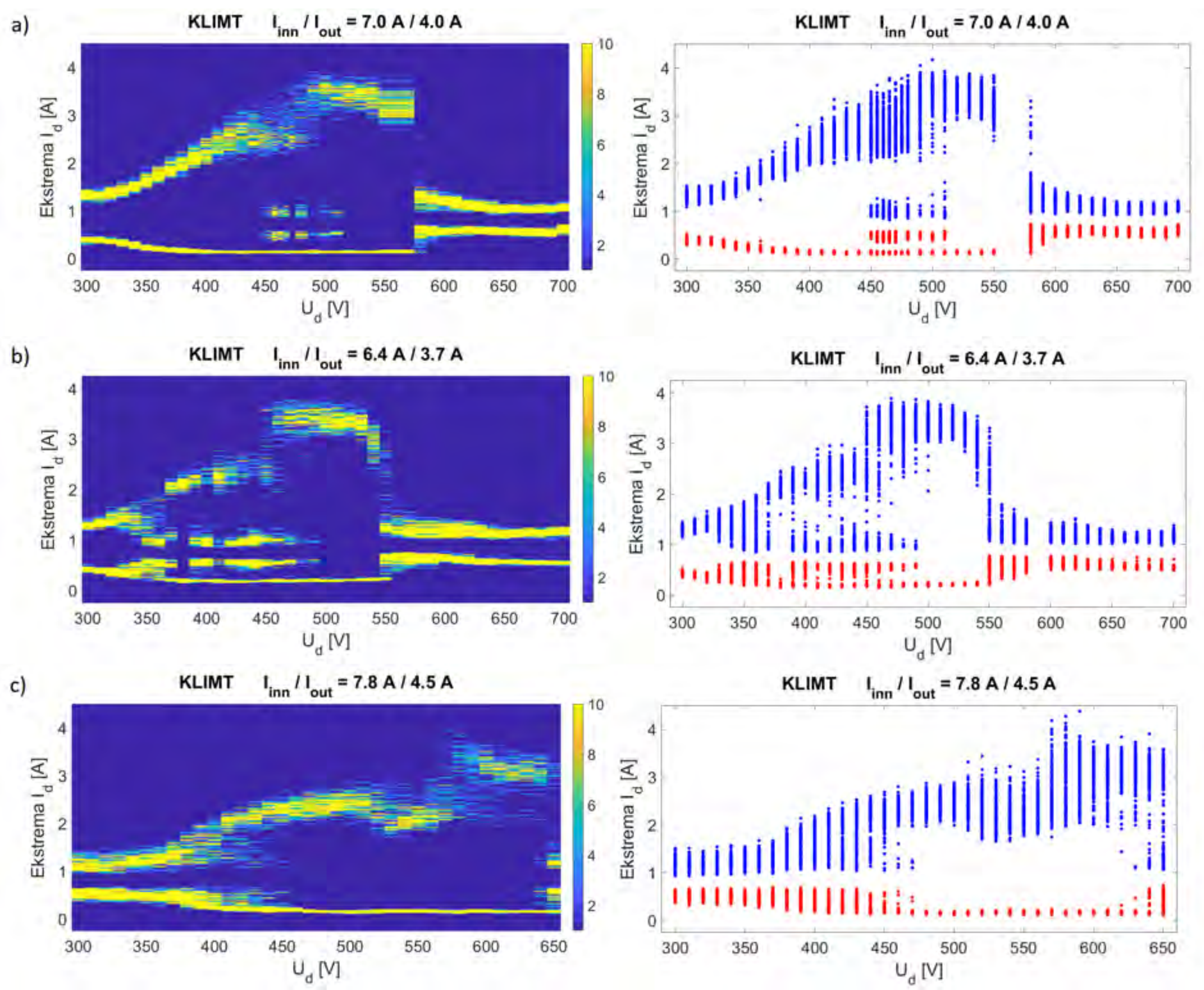
Zazwyczaj wykresy bifurkacyjne wskazują wartości parametru kontrolnego (w tym przypadku napięcia wyładowania U_d), dla którego następują gwałtowne zmiany wyświetlanej funkcji. Tutaj takie znaczne przejścia w charakterze prądu czy to jonowego czy wyładowania pojawiają się w zależności od siły pola magnetycznego przy napięciu U_d wynoszącym około 590 V (a), 560 V (b) i 650 V (c). Rozgałęzienia między minimami i maksimami występują w środkowych zakresach napięć. Reprezentują one przełączania między różnymi trybami pracy silnika. Złożone zachowania obserwuje się w przypadkach a) od U_d równego 450 V do 510 V oraz 580 V, dla których ekstrema amplitud prądu gromadzą się w kilku oddzielnych grupach o różnych gęstościach. To samo ma miejsce w przypadku b) dla napięć U_d od około 360 V do 490 V i 550 V, a w przypadku c) dla



Rysunek 4.7: Diagramy gęstościowe oraz diagramy bifurkacyjne dla danych uzyskanych przy pomocy sondy FP. Przypadek a) dotyczy I etapu, a b) i c) III etapu badań silnika KLIMT. Napięcie wyładowania stanowiło parametr kontrolny. Niebieskie kropki oznaczają maksima lokalne, a czerwone minima lokalne. Rozdzielczość prądu dla diagramów gęstościowych ustawiona została na $0.032\ mA$.

napięć U_d z przedziałów od około 380 V do 470 V i od 620 V do 650 V.

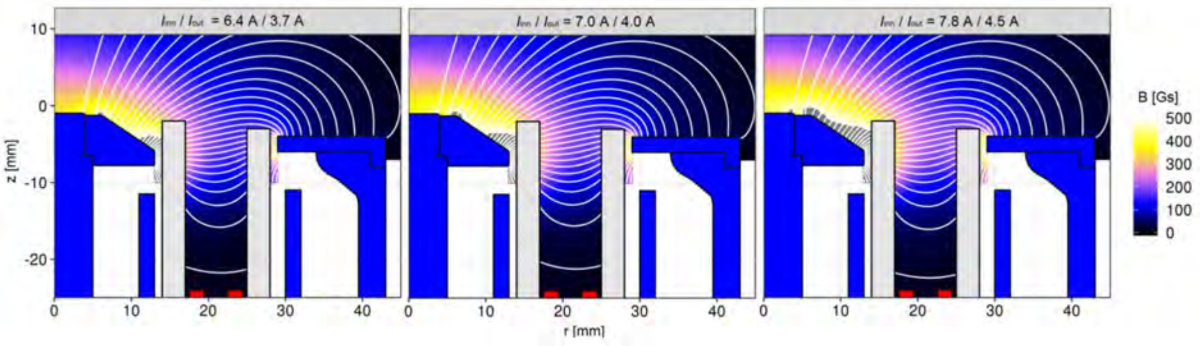
Na przedstawionych diagramach można zauważyć, że zmiany pola magnetycznego powodują odmienną dynamikę zebranych przebiegów prądowych. Ponadto prosta zależność między napięciem wyładowania a udziałem trybu oddechowego nie obowiązuje – podczas gdy dla $U_d = 300\ V$ udział trybu BM wydaje się być podobny we wszystkich trzech studiowanych przypadkach prądów w cewkach, nie jest to prawdą dla wyższych napięć. Ilustrują to dobrze diagramy bifurkacyjne, gdzie np. dla $U_d = 580\ V$ dla prądów cewek $I_{inn} = 6.4\ A$ i $I_{out} = 3.7\ A$ prąd pozostaje nisko-amplitudowy, a udział trybu oddechowego jest marginalny, podczas gdy dla prądów cewek $I_{inn} = 7.0\ A$ i $I_{out} = 4.0\ A$ dominuje wysoko-amplitudowy tryb BM i pojawiają się losowe przejścia między gładkim i silnie oscylującym charakterem prądu. W przypadku najsłabszego pola magnetycznego silnik



Rysunek 4.8: Diagramy gęstościowe oraz diagramy bifurkacyjne dla danych dotyczących prądu wyładowania. Przypadek a) dotyczy I etapu, a b) i c) III etapu badań silnika KLIMT. Napięcie wyładowania stanowiło parametr kontrolny. Niebieskie kropki oznaczają maksima lokalne, a czerwone minima lokalne. Rozdzielczość prądu dla diagramów gęstościowych ustawiona została na 19 mA.

przełączał się pomiędzy gładkimi (lokalnymi) i silnie oscylacyjnymi (globalnymi) modami już od około $U_d = 320\ V$, a dla stosunku prądów w cewkach I_{inn}/I_{out} równego 7.0 A do 4.0 A silnik pracował stabilnie, prezentując niezakłócony tryb oddechowy aż do $U_d = 450\ V$.

Porównując wyniki analizy wydajności silnika przedstawionej w rozdziale 3.4 z wynikami uzyskanymi dzięki diagramom bifurkacyjnym można zauważyć, że najwyższy całkowity prąd jonowy pojawia się w momencie przejścia między głębokimi oscylacjami oddechowymi (tryb globalny) a oscylacjami trybu lokalnego, które pojawiały się w zależności od przypadku dla napięć U_d równych 560 V, 590 V i 650 V, gdzie wartość progowa zależała od natężenia prądu w cewkach (im większy prąd, tym była wyższa wartość progowa napięcia U_d).



Rysunek 4.9: Wyniki symulacji wykonanej przy pomocy programu *ANSYS*, które zostały przeprowadzone przez Macieja Jakubczaka z IFPiLM dla trzech ustawień prądów cewek. Białe obszary wskazują położenie ścianek kanału, a położenie anody zaznaczono na czerwono. W pobliżu wewnętrznego bieguna magnetycznego wielkość pola magnetycznego przekracza 500 Gs [220].

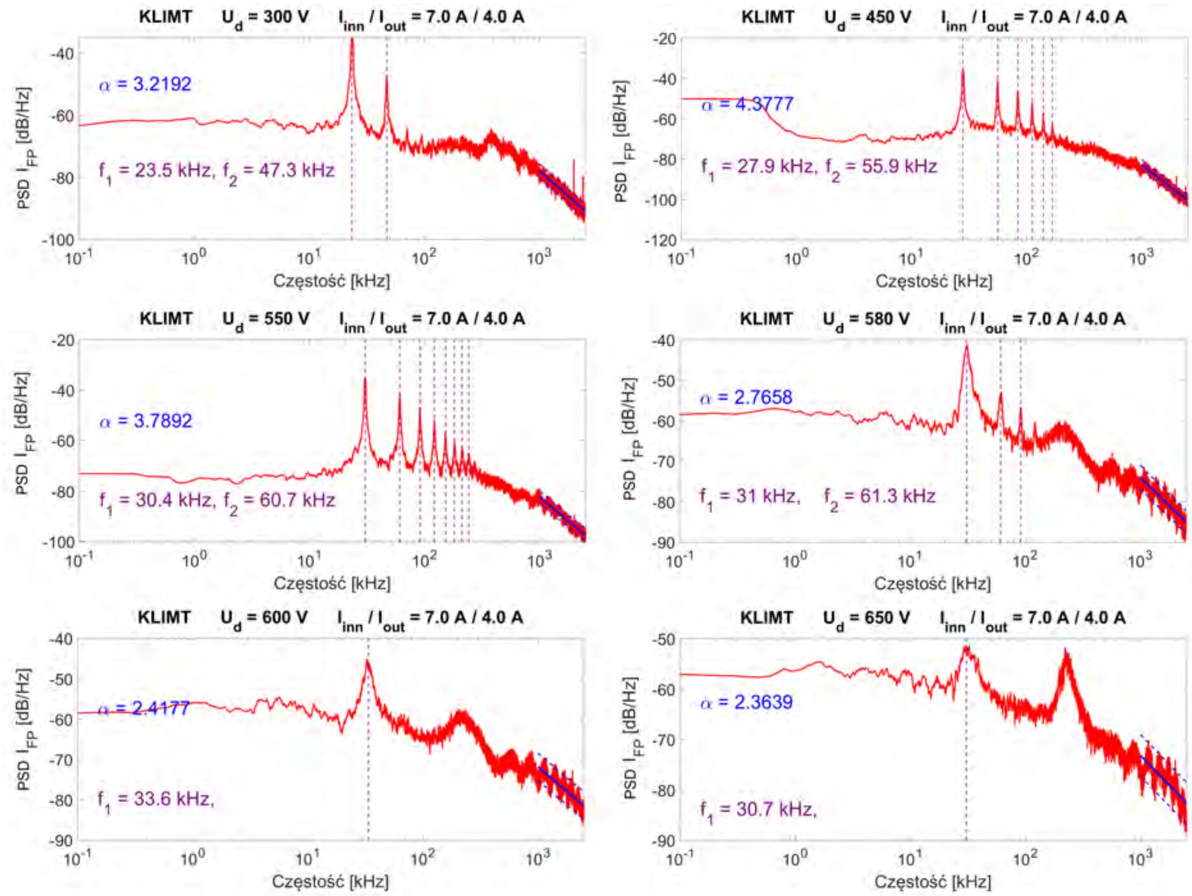
Przedstawione w tym rozdziale diagramy bifurkacyjne ujawniły drastyczne przejścia między reżimami oscylacji o dużej i małej amplitudzie podczas zmian napięcia wyładowania. Nie zaobserwowano na nich jednak kolejnych podwojeń okresu. Prawdopodobnie ma się tutaj do czynienia z bifurkacją Hopfa, która prowadzi do cyklu granicznego. Nie można tego jednak stwierdzić jednoznacznie, zatem zaprezentowane diagramy nie dają potwierdzenia chaotyczności badanego procesu, a jedynie wyobrażenie o zmianach reżimów jakie zachodziły podczas podwyższania napięcia.

4.2.3 Interpretacja widma mocy

Analizując widma częstotliwościowe badanych szeregów czasowych, można znaleźć pewne prawidłowości procesu, który reprezentują, takie jak okresowość, quasi-okresowość czy pasma charakterystyczne, oraz stwierdzić, czy ma on rozkład jednostajny czy potęgowy. Badanie widma mocy może również posłużyć do wykrycia zachowania chaotycznego.

Korzystając z funkcji **pmtm** pakietu *Matlab* bazującej na metodzie opracowanej przez Davida Thomsona służącej do szacowania gęstości widmowej [228], zbadane zostały widma mocy (PSD, ang. *Power Spectral Density*) wszystkich pomiarów dokonanych w ramach rozprawy doktorskiej. Widma obliczane były z sygnałów o czasie akwizycji równym 20 ms próbkowanych z częstotliwością 50 MHz (częstotliwość Nyquista równa 25 MHz), znormalizowanych do zerowej średniej i jednostkowej wariancji.

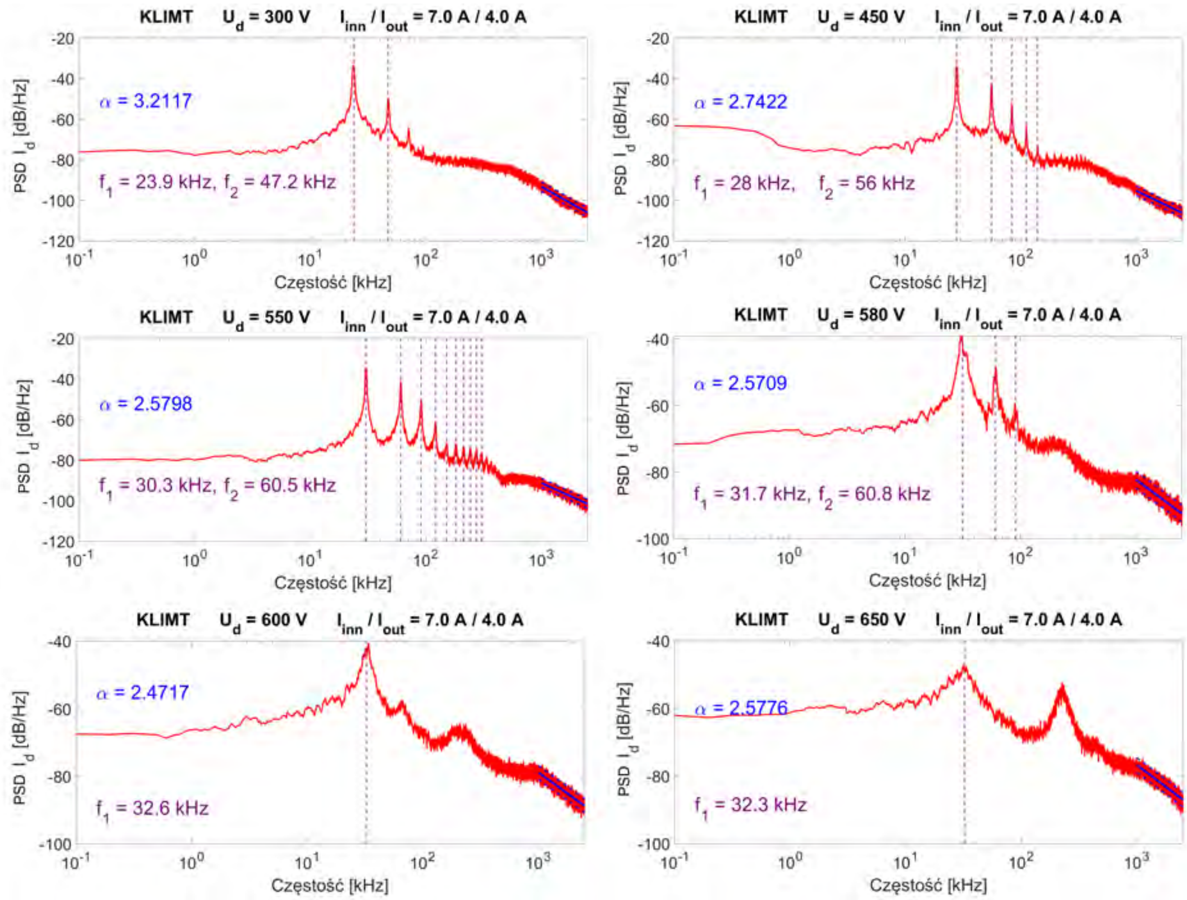
Na Rysunkach 4.10 i 4.11 zostały przedstawione widma mocy odpowiednio dla prądu jonowego zebranego przez sondę FP i mierzonego jednocześnie prądu wyładowania I_d. Zgodnie z oczekiwaniami można zaobserwować silne podobieństwo między prądem wyładowania a prądem jonowym zebranym przez sondę. Dla wszystkich napięć, ale z różną intensywnością wykazywał on oscylacje trybu oddechowego, które charakteryzują się częstotliwościami z zakresu 10 - 40 kHz (rozdział 1.1.5). Podczas pracy silnika w trybie globalnym (U_d = 300 V, 450 V i 550 V) liczba harmonicznych w widmie Fouriera wzra-



Rysunek 4.10: Widma mocy prądu jonowego zebranego przez sondę FP. Na wykresach zaznaczone zostały częstotliwości odpowiadające pikom trybu oddechowego (przerywane linie), gdzie $f_1 = f_{BM}$, a f_2 jest pierwszą harmoniczną. Zaprezentowane zostało również nachylenie α z dopasowania do wzoru $1/f^{\alpha}$ dla przedziału od 1 do 2.5 MHz.

stała wraz z napięciem, co pozostaje zgodne z obserwacjami poczynionymi przez Gascon i in. [85], gdzie podczas wzrostu napięcia badany przez nich sygnał prądu wyładowania zmieniał się z sinusoidalnego na bardziej piłokształtny. Natomiast dla najwyższych wartości napięć ($U_d = 600\ V$ i $650\ V$) sygnały wykazywały nisko-amplitudowe oscylacje trybu oddechowego pozbawione harmonicznych.

Interesujące jest to, że na omawianych rysunkach widać, że składowa związana z oscylacjami czasu przejścia jonów (ang. *transit time oscillations*) leżąca około 250 kHz (rozdział 1.1.5) jest wyraźnie silniejsza w przebiegach prądu jonowego niż w przebiegach prądu wyładowania. Dla wyższych napięć wyładowania (od $U_d = 580\ V$) pik trybu oddechowego staje się coraz szerszy, a od $U_d = 650\ V$ intensywność drugiego piku przy około 200 - 300 kHz rośnie do wartości porównywalnej z pikem BM. Co ciekawe w przypadku prądu jonowego, intensywność tego piku wzrasta zarówno dla najwyższych, jak i najniższych wartości napięcia wyładowania, natomiast zanika w zakresie 450 – 550 V. We wszystkich analizowanych przypadkach przy $U_d = 650\ V$ wielkość piku BM znacznie zmalała w po-

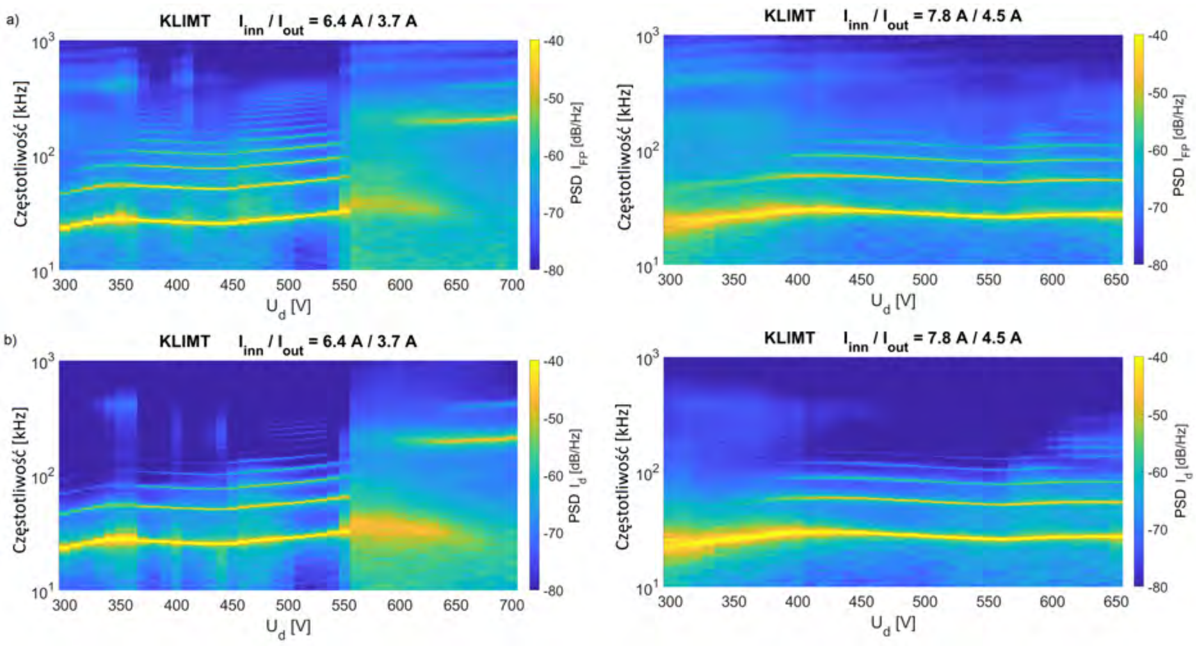


Rysunek 4.11: Widma mocy prądu prądu wyładowania I_d. Na wykresach zaznaczone zostały częstotliwości odpowiadające pikom trybu oddechowego (przerywane linie), gdzie $f_1 = f_{BM}$, a f_2 jest pierwszą harmoniczną. Zaprezentowane zostało również nachylenie α z dopasowania do wzoru $1/f^{\alpha}$ dla przedziału od 1 do 2.5 MHz.

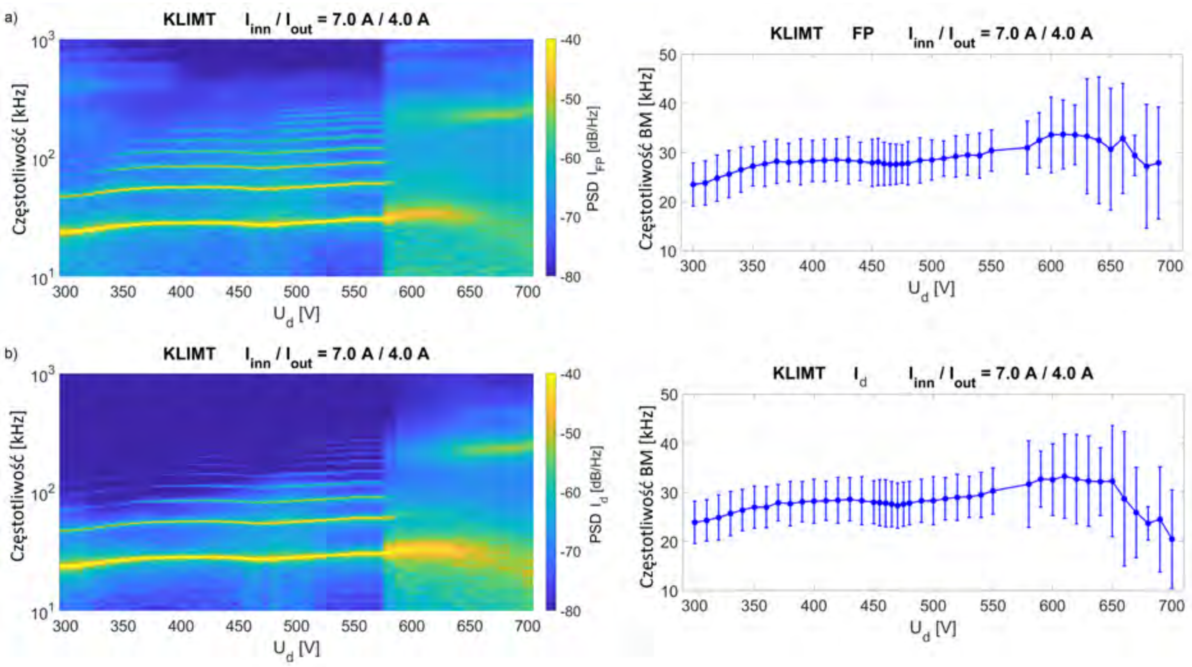
równaniu z niższymi napięciami, a dla prądu jonowego dominujący stał się pik przy do około 250 kHz.

Dzięki zaprezentowanym przykładom można również porównać zachowanie się silnika przed i po dramatycznym przejściu między $U_d = 550\ V$ i $U_d = 600\ V$. Po skokowym zwroście siły ciągu (Rysunek 3.21) w widmie zanikają harmoniczne i pozostają dwa piki: ten odpowiadający BM i ten odpowiadający czasowi przejścia jonów.

Dodatkowo wszystkie widma dotyczące silnika KLIMT zostały sumarycznie zestawione na dwu-wymiarowych wykresach umieszczonych na Rysunkach 4.12 i 4.13 . Główny pik przy częstotliwości f_{BM}≈30 kHz i jego harmoniczne odpowiadają trybowi oddechowemu (rozdział 1.1.5). Jak pokazano powyżej oprócz trybu BM wykryta została również inna charakterystyczna oscylacja związana z czasem przejścia jonów (częstotliwość około 250 kHz). Na tych diagramach wyraźnie widać, że liczba i natężenie harmonicznych BM wzrasta wraz z napięciem aż do osiągnięcia napięcia progowego U_d zależnego od siły pola magnetycznego, przy którym następował skokowy wzrost siły ciągu (rozdział 3.4). Na-



Rysunek 4.12: Widmo mocy: a) prądu jonowego zebranego przez sondę FP oraz b) prądu wyładowania w funkcji parametru kontrolnego stanowiącego napięcie wyładowania.



Rysunek 4.13: Po lewej stronie widmo mocy w funkcji napięcia wyładowania dla: a) prądu jonowego zebranego przez sondę FP oraz b) prądu wyładowania. Po prawej częstotliwość podstawowa BM w funkcji napięcia wyładowania.

stępnie po ostrym przejściu widmo staje się ubogie w harmoniczne trybu oddechowego. Zanikanie harmonicznych miało również miejsce dla prądów w cewkach $I_{inn} = 7.8$ A i $I_{out} = 4.5$ A, gdzie po przekroczeniu $U_d = 650$ V z powodu zbyt wysokiej temperatury obwodu magnetycznego przerwano pomiary tuż przed przejściem silnika w tryb gładkich oscylacji. Niemniej jednak wykonany został test, w którym przez krótki czas zaobserwowano, że dalsze podwyższanie napięcia powodowało przejście trybu pracy silnika do modu lokalnego.

W widmach na Rysunku 4.13 pomiędzy U_d równym 300 V a 580 V liczba i natężenie harmonicznych wzrastało wraz z napięciem wyładowania. Przy $U_d = 580$ V wyraźnie widoczne są dodatkowe piki wokół głównego szczytu BM i ich harmoniczne (Rysunki 4.10, 4.11), co może sugerować np. proces quasi-okresowy. Po prawej stronie tego rysunku zostały przedstawione podstawowe częstotliwości BM wskazujące na pewną ewolucję tej oscylacji wraz z napięciem wyładowania U_d.

Na dwuwymiarowych wykresach widać, że dla najsilniejszego pola magnetycznego przy $U_d = 300$ V pik trybu oddechowego jest bardzo rozmyty i jest najszerszy spośród zarejestrowanych napięć. Ogólnie można powiedzieć, że w tym widmie mocy pik BM dla niższych napięć jest znacznie szerszy.

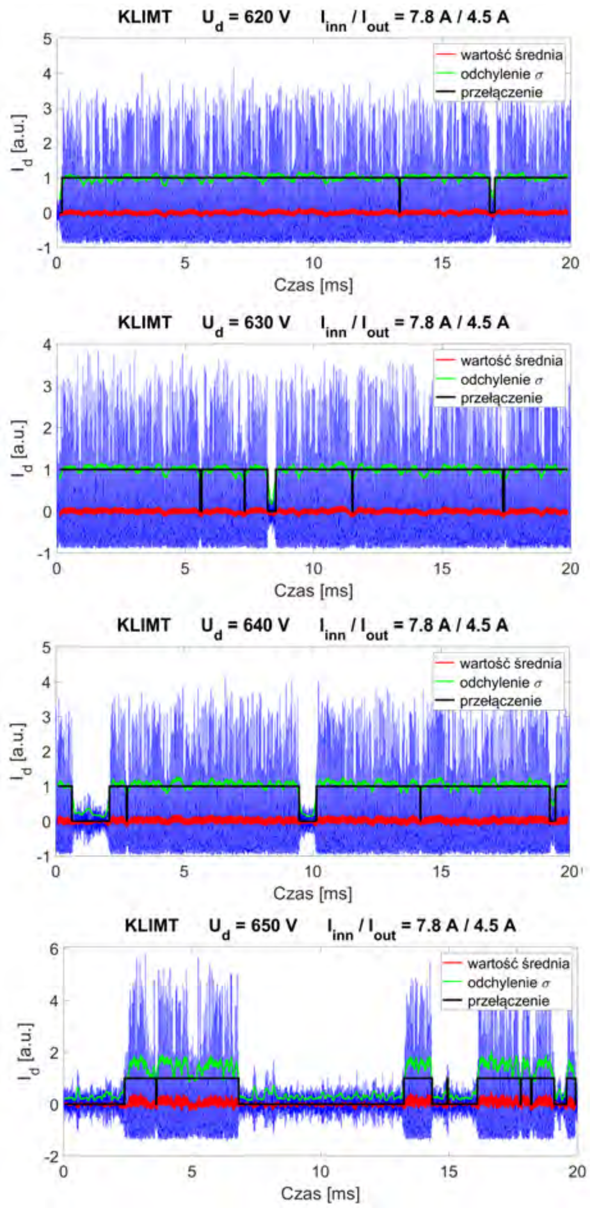
Przedstawione widma mocy są bogate w informacje w szerokim zakresie częstotliwości oraz posiadają pojedyncze piki charakterystyczne dla częstotliwości podstawowej typu oddechowego, a w niektórych przypadkach również czasu przejścia jonów. Takie złożone zachowanie może wskazywać na dynamikę chaotyczną. Poza tym wnioski wyciągnięte z powyższej analizy mogą nieco powiedzieć o fizyce procesu jonizacji, ponieważ dzięki widmom mocy można było porównać wkład poszczególnych częstotliwości występujących w prądzie jonowym i w prądzie wyładowania.

4.2.4 Badania dotyczące zjawiska intermitencji

W niniejszym podrozdziale przeanalizowane zostały trzy aspekty. Pierwszy z nich dotyczy pojawiania się intermitencji w sygnałach prądowych, drugi występowania w danych szumu typu $1/f$, a trzeci rozkładów czasu trwania oscylacji typu BM w przykładowych sygnałach prądowych.

O intermitentnym charakterze przebiegów prądowych świadczy fakt, że oscylacje typu BM były przerywane z różną powtarzalnością przez okres o niewielkiej zmienności, czego przykład zaprezentowano na Rysunku 4.14. Występowanie intermitencji zobrazowano również na Rysunach 4.15 i 4.16 poprzez wykreślenie średniej skośności i kurtozy prądu jonowego w funkcji napięcia wyładowania w całym sygnale (0 – 20 ms), oraz w dwóch zidentyfikowanych trybach: globalnym i lokalnym.

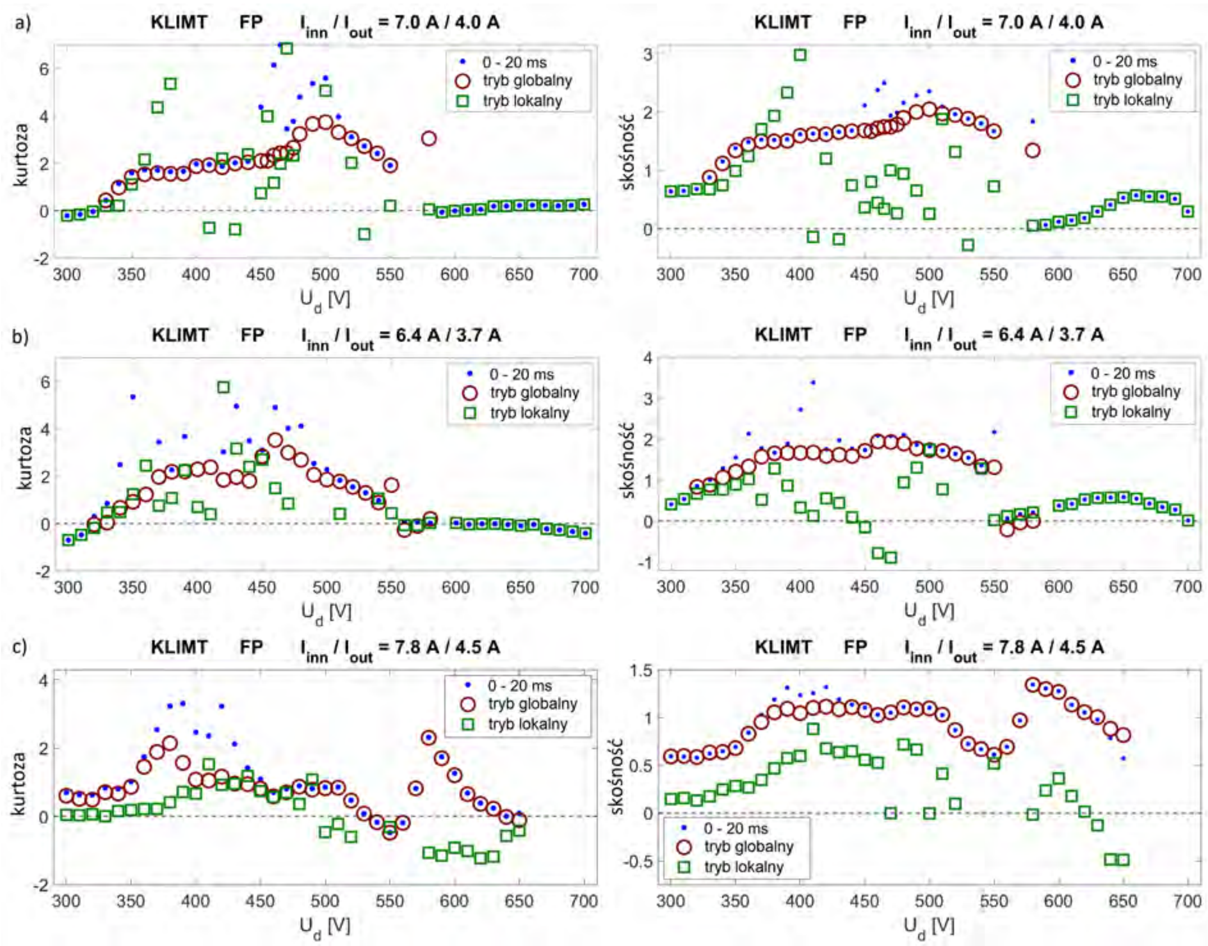
Na Rysunku 4.15 a) i b) można zauważyć, że kurtoza rozkładu prądu jonowego najpierw rośnie, po czym zaczyna opadać, a w regionie wysokich napięć maleje do zera. Podobny trend wykazuje skośność. W sygnale FP dla $I_{inn}/I_{out} = 7.0A/4.0A$ nieintermitentny obszar ($U_d \leq 330$ V i $U_d \geq 590$ V) charakteryzuje się kurtozą i skośnością w pobliżu zera, a więc ma wartości bliskie do rozkładu Gaussa. Dla pozostałych warto-



Rysunek 4.14: Przykład wzrostu natężenia zachowań intermitentnych wraz ze wzrostem napięcia wyładowania U_d od 620 V do 650 V.

ści napięć, tam gdzie dominują oscylacje BM, a mod lokalny występuje rzadko, skośność i kurtoza wykazują znacznie większe wartości. Regiony, w których występują przełączenia, ale sygnał jest zdominowany przez oscylacje BM, można bez trudu zidentyfikować, np. w przypadku a) dla 340 $V \leq U_d \leq$ 440 V. Podobnie regiony z silniejszą intermitencją (odmienne wartości skosności i kurtozy dla poszczególnych trybów) są wyraźnie widoczne np. w przypadku a) dla 450 $V \leq U_d \leq$ 500 V lub w przypadku c) dla 380 $V \leq U_d \leq$ 430 V.

Konfiguracja najsilniejszego pola magnetycznego (patrz Rysunek 4.15 c)) powoduje na-

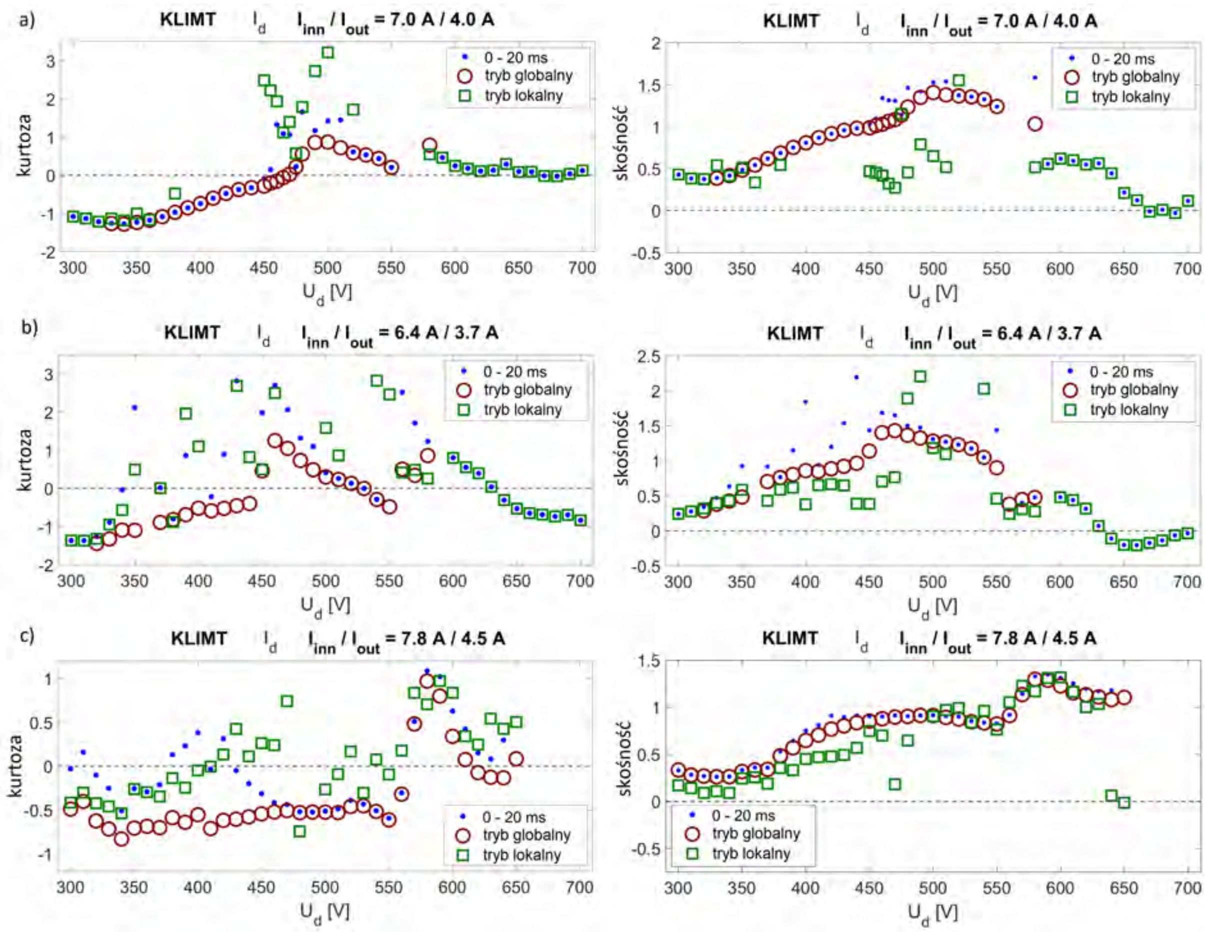


Rysunek 4.15: Kurtoza oraz skośność rozkładu wartości prądu jonowego mierzonego sondą FP w funkcji napięcia wyładowania U_d.

silenie oscylacji trybu BM, który dominuje w całym zakresie napięć z wyjątkiem zakresu $380\ V \leq U_d \leq 430\ V$, gdzie konkuruje z reżimem nisko-amplitudowym. Po przekroczeniu $U_d = 560\ V$ następuje znacząca zmiana charakteru oscylacji BM charakteryzująca się gwałtownym wzrostem skośności i kurtozy, co było raczej obserwowane dla znacznie niższych napięć w pozostałych konfiguracjach.

Oscylacje BM prądu jonowego charakteryzuje niemal zawsze dodatnia kurtoza i dodatnia skośność. Dla trybu lokalnego wartości skośności i kurtozy wykazują silne wahania co wynika z jego krótkotrwałości i ograniczonego statystycznie zestawu danych. Innym godnym uwagi aspektem jest to, że kurtoza i skośność obszaru BM zmienia się wraz ze zmianą napięcia wyładowania, co wskazuje nie tylko na ewolucję zachowania intermitentnego, ale także na jakościową zmianę dynamiki oscylacji BM.

Na Rysunku 4.16 przedstawiono zmienność skośności i kurtozy dla prądu wyładowania w funkcji U_d. Jak widać dla słabszych pól magnetycznych kurtoza i skośność po pewnych wahaniach ulegają niewielkim zmianom przy wyższych napięciach, czego nie można stwierdzić dla najsilniejszego pola magnetycznego. W przypadku napięć, dla któ-

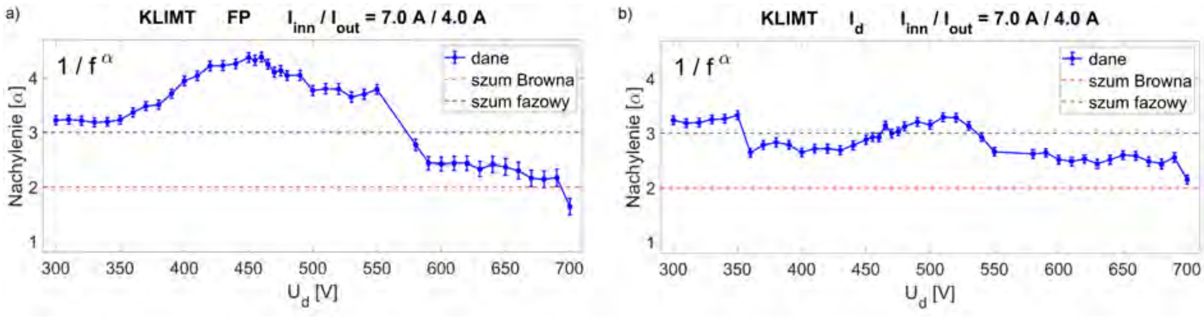


Rysunek 4.16: Kurtoza oraz skośność rozkładu wartości prądu wyładowania I_d w funkcji napięcia wyładowania U_d.

rych szeregi czasowe są zdominowane przez oscylacje BM, prąd wyładowania ma tendencję przechodzenia od rozkładu platykurtycznego do leptokurtycznego przy wzroście napięcia wyładowania U_d.

W sygnale I_d można zaobserwować dość podobną zmienność skośności i kurtozy w stosunku do U_d jak w sygnałach jonowych. Jednak wartości kurtozy są globalnie przesunięte w kierunku wartości ujemnych, co wskazuje na rozkład prądu wyładowania mniej skoncentrowany niż w przypadku prądu jonowego. Ze względu na to, że sygnał I_{FP} odpowiada tylko prądowi jonowemu, a I_d obejmuje również udział elektronów, oba sygnały mogą wykazywać różne wartości skośności oraz kurtozy. Na odmienność wartości może mieć też wpływ różny czas przelotu jonów o odmiennych stopniach jonizacji od silnika do oddalonej o około 0.5 m sondy, co nie ma miejsca w przypadku prądu wyładowania.

Widma mocy pokazane na Rysunkach 4.10 i 4.11 charakteryzują się liniowym zanikiem mocy sygnału od 1 MHz do 2.5 MHz, po którym następuje ustabilizowanie się poziomu widma. Powyższa obserwacja jest interesująca, ponieważ taki rodzaj szumu (zwany szumem typu $1/f$) jest często związany z intermitentnym chaosem [48, 76] lub



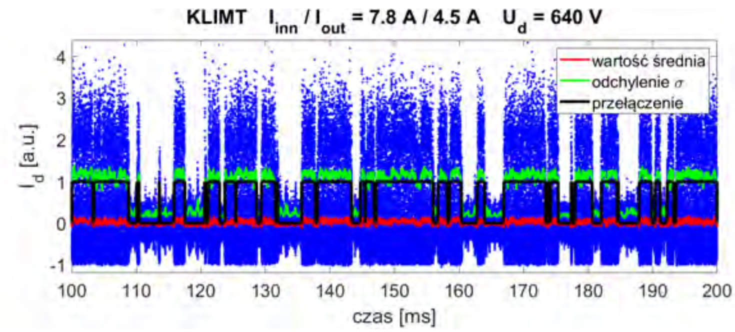
Rysunek 4.17: Porównanie współczynnika nachylenia α widm mocy w zakresie 1 - 2.5 MHz ze współczynnikami nachylenia odpowiadającymi szumowi Browna i szumowi fazowemu dla: a) prądu jonowego zebranego sondą FP, a b) prądu wyładowania.

ze zjawiskiem samoorganizującej się krytyczności [12]. Samoorganizująca się krytyczność stanowi właściwość układów dynamicznych, które posiadają punkt krytyczny jako atraktor [12]. Zjawiska samoorganizującej się krytyczności uważane są za znajdujące się na granicy chaosu, zwanego też „chaosem słabym” [10, 176]. Dlatego też współczynnik nachylenia α ze wzoru $1/f^{\alpha}$ został wyznaczony poprzez dopasowanie liniowe w zakresie 1 - 2.5 MHz dla każdej wartości napięcia wyładowania. Wartości α zostały przedstawione na Rysunku 4.17.

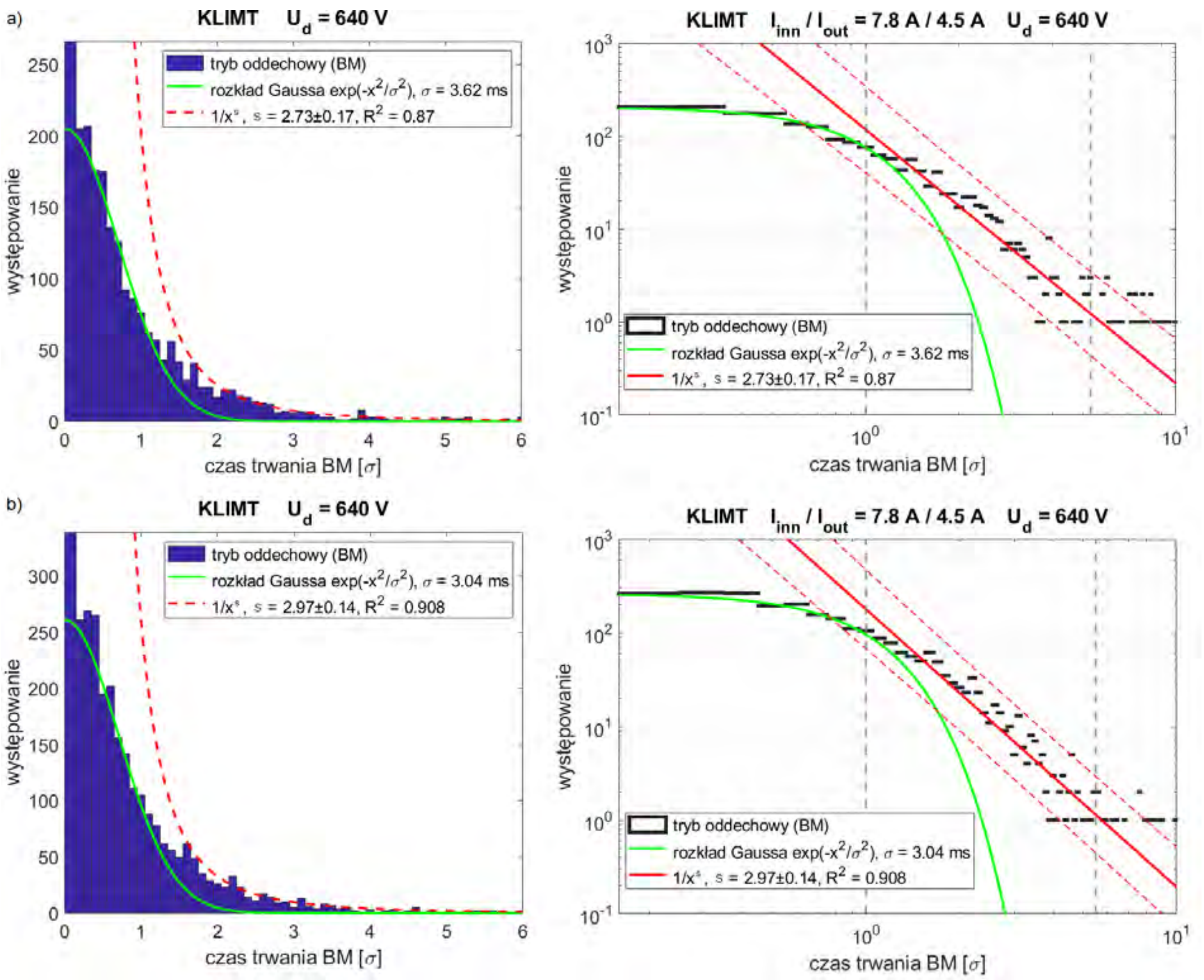
Nachylenia α dla prądu jonowego mają większe wartości w zakresie napięć związanych z oscylacjami BM, natomiast maleją przy wyższych napięciach, po przejściu oscylacji prądowych w reżim nisko-amplitudowy. Wyznaczone nachylenia leżą powyżej wartości 2 dla prawie wszystkich badanych przypadków. Co ciekawe, są one dużo większe niż te wyznaczone dla danych opisanych w literaturze, które pochodzą z różnych dziedzin [12, 47, 48, 76, 245, 248]. Jedynie Taniguchi w artykule [225] badając niestabilność akustyczną jonów w urządzeniu plazmowym, która wykazywała intermitencje typu I, uzyskał w jednym przypadku $\alpha = 2.38$, jednak wartość ta wciąż jest znacznie mniejsza niż wyniki uzyskane w tej rozprawie.

Porównując wykresy z Rysunku 4.17 można zauważyć, że ewolucja nachyleń α wraz ze wzrostem napięcia wyładowania wygląda inaczej dla prądu jonowego i prądu wyładowania, gdzie zależność od U_d jest znacznie słabsza. W przypadku prądu jonowego dla wysokich napięć (od $U_d = 590\ V$) α znajduje się najbliżej nachylenia odpowiadającego szumowi Browna (szumowi czerwonemu) [160], a dla niskich (do $U_d = 350\ V$) raczej nachylenia odpowiadającego szumowi fazowemu [208]. Dlatego też, chociaż obecność szumu typu $1/f$ została wykryta, trudno na razie wnioskować o jego pochodzeniu (czy powoduje ją intermitentny chaos, samoorganizująca się krytyczność lub inne zjawisko) wyłącznie na podstawie tych wyników.

Zgodnie z centralnym twierdzeniem granicznym, rozkład średniej dla prób niezależnych zmiennych losowych będzie dążyć do rozkładu Gaussa przy liczbie prób rosnącej do nieskończoności, co obserwuje się w przypadku wielu procesów fizycznych. Niemniej jednak dla zjawisk wykazujących samoorganizującą się krytyczność, rozkłady badanej zmien-



Rysunek 4.18: Reprezentatywny wycinek sygnału prądu wyładowania I_d o całkowitym czasie akwizycji $10\ s$, który został zarejestrowany w celu badania intermitencji.



Rysunek 4.19: Rozkłady czasu trwania oscylacji typu BM dla: a) prądu jonowego zebranego sondą FP, b) zmierzonego równocześnie prądu wyładowania I_d. Z prawej strony odpowiedniki w skali logarytmicznej. Szarymi liniami zaznaczono zakres danych, do których dopasowano prostą.

nej w zakresie wartości znacznie odbiegających od średniej rozkładu, można przybliżyć prawem potęgowym $1/x^s$ określanym jako „gruby ogon”, gdzie $s \geq 1$. Takie obserwacje zostały poczynione w różnych dziedzinach, takich jak wahania giełdowe w ekonomii [82, 188], trzęsienia ziemi w geofizyce [11], rozbłyski słoneczne lub wielkość miast, i wyjaśnione za pomocą empirycznego prawa Zipfa [81]. Prawo Zipfa głosi, że wiele rodzajów danych odnoszących się do ludzkich zachowań cechuje charakterystyczny rozkład wartości. W rozkładzie tym częstość występowania poszczególnych wartości jest odwrotnie proporcjonalna do ich rangi statystycznej.

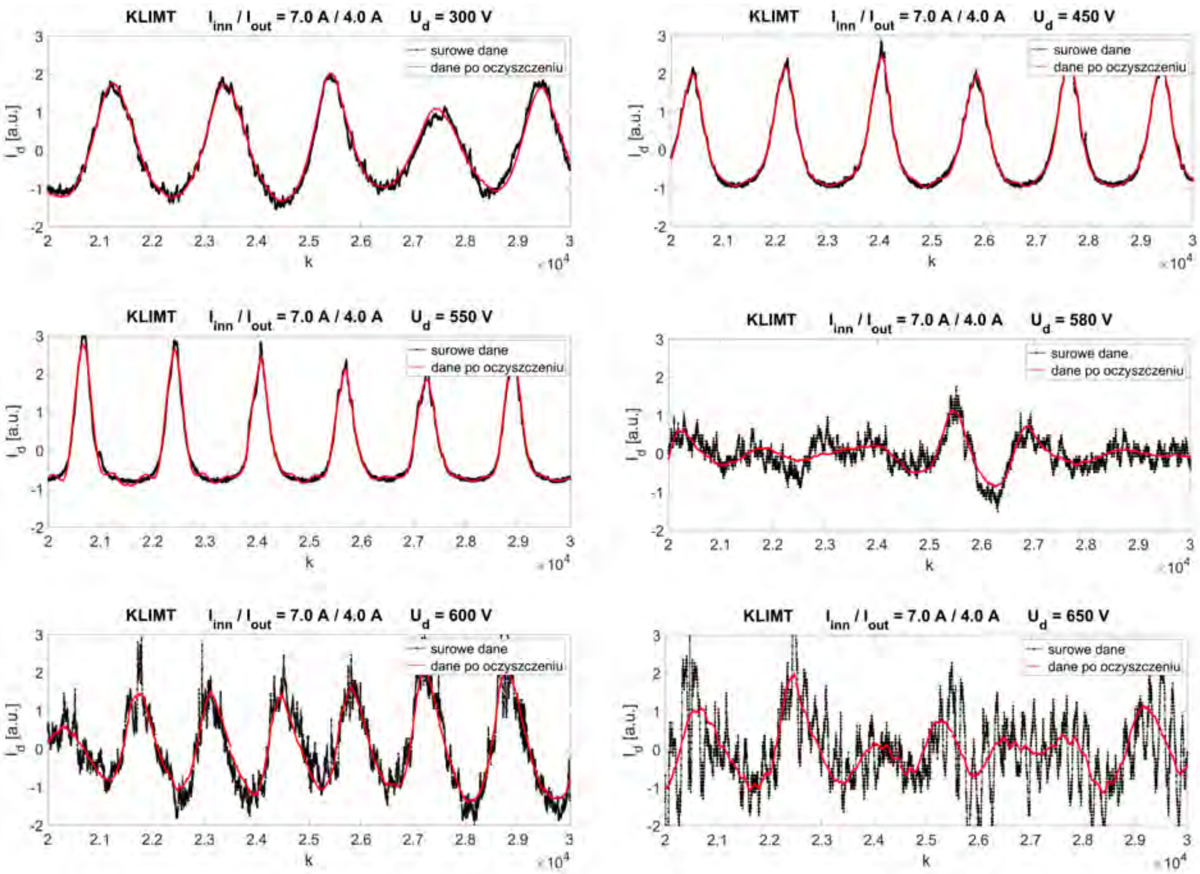
Aby sprawdzić ten aspekt zarejestrowany został dłuższy (10 s) sygnał, na którym przeprowadzona została analiza statystyczna występowania BM i okresu nisko-amplitudowego (czyli trybu lokalnego). Wycinek tego sygnału o długości 0.1 s został przedstawiony na Rysunku 4.18. Dwa reżimy działania silnika można skutecznie zidentyfikować na podstawie uśrednionego w zadanym przedziale czasu odchylenia standardowego sygnału (Rysunek 4.3). Rozkład czasu trwania BM w jednostkach odchylenia standardowego przedstawiono na Rysunku 4.19. Można zauważyć, że podczas gdy krzywa jest zgodna z rozkładem Gaussa dla krótszych czasów trwania, to dla wysokich wartości, pojawia się gruby ogon, co jest charakterystyczne dla samoorganizującej się krytyczności.

Funkcja potęgowa $1/x^s$, gdzie $s \approx 3$ pozwala na dobre dopasowanie wartości eksperymentalnych dla wartości powyżej 1.5 σ zarówno dla prądu wyładowania jak i prądu jonowego. Współczynnik $s = 3$ pojawia się również np. w badaniach wahań giełdowych [82]. Obserwacja prawa potęgowego opisującego ogon rozkładu czasu trwania BM mogłaby zatem wskazywać na zjawisko samoorganizującej się krytyczności.

4.3 Analiza wykresów przestrzeni fazowej

Poszukiwanie niskowymiarowej deterministycznej dynamiki układu fizycznego, można realizować poprzez próbę zrekonstruowania jego atraktora. Do takiej rekonstrukcji została zastosowana metoda zanurzeniowa, oparta na opóźnieniach czasowych opisana w rozdziale 2.2.3. Zrekonstruowany atraktor składa się zatem z szeregu czasowego oraz jego opóźnionych wersji: $I(t), I(t+\tau), \ldots, I(t+(d-1)\tau)$, gdzie d jest wymiarem zanurzenia. Iloczyn $(d-1)\tau$ nazywa się oknem zanurzenia.

Gdy spełniony jest warunek Takensa $d \geq 2D_A + 1$, gdzie D_A jest wymiarem fraktalnym (nierówność 2.6), zanurzenie będzie zachowywać właściwości geometryczne atraktora i informację dynamiczną o badanym układzie. Ale już trójwymiarowe ($d = 3$) wykresy fazowe złożone z oryginalnych i opóźnionych szeregów czasowych są w stanie dostarczyć pewnych informacji o strukturze atraktora, jeśli jego wymiar nie jest zbyt duży. Jednak w przypadku surowych sygnałów pomiarowych poziom szumu jest wysoki i zniekształca zrekonstruowane struktury. W związku z tym wszelkie dalsze analizy, takie jak odtworzenie atraktora przeprowadzone w podrozdziale 4.3.3, szacowanie wymiaru fraktalnego przedstawione w 4.3.4 i szacowanie wartości wykładników Lapunowa zrealizowane w 4.3.6, nie mogły zostać przeprowadzone bez redukcji szumu występującego w zarejestrowanych szeregach czasowych.



Rysunek 4.20: Efekt redukcji szumu dla przebiegów prądu wyładowania uzyskany dzięki algorytmowi Sauera.

4.3.1 Redukcja szumów

Ze względu na to, że zastosowanie zwykłej metody obniżenia poziomu szumu w danych, jaką jest np. metoda średniej ruchomej, powoduje utratę znacznej części dynamiki oryginalnego procesu, bardzo przydatne okazały się specjalne techniki oparte na rzutowaniu na rozmaitość lokalną zawierającą zrekonstruowany atraktor. Rozmaitość lokalna jest podprzestrzenią przestrzeni fazowej charakterystyczną dla układu dynamicznego. Innymi słowy jest to przestrzeń topologiczna, która lokalnie w pobliżu każdego punktu przypomina przestrzeń euklidesową [143].

Algorytm numeryczny przedstawiony przez Sauera w [198] był często stosowany w przypadku analizy danych pochodzących z procesów nieliniowych [87, 139, 143]. Algorytm ten został wykorzystany w tej rozprawie doktorskiej do napisania kodu numerycznego mającego na celu zmniejszenie ilości szumu z dyskretnie próbkowanego sygnału wejściowego jaki stanowiły zebrane przebiegi prądowe. Algorytm Sauera został zaprojektowany tak, aby był użyteczny nawet, gdy stosunek sygnału do szumu jest mniejszy od 1. Metoda ta została dokładniej opisana w Dodatku B, natomiast na Rysunku 4.20 zilustrowano przykładowy efekt jaki wniosło oczyszczanie danych metodą Sauera w przypadku prądu wyładowania.

4.3.2 Kształt funkcji autokorelacji

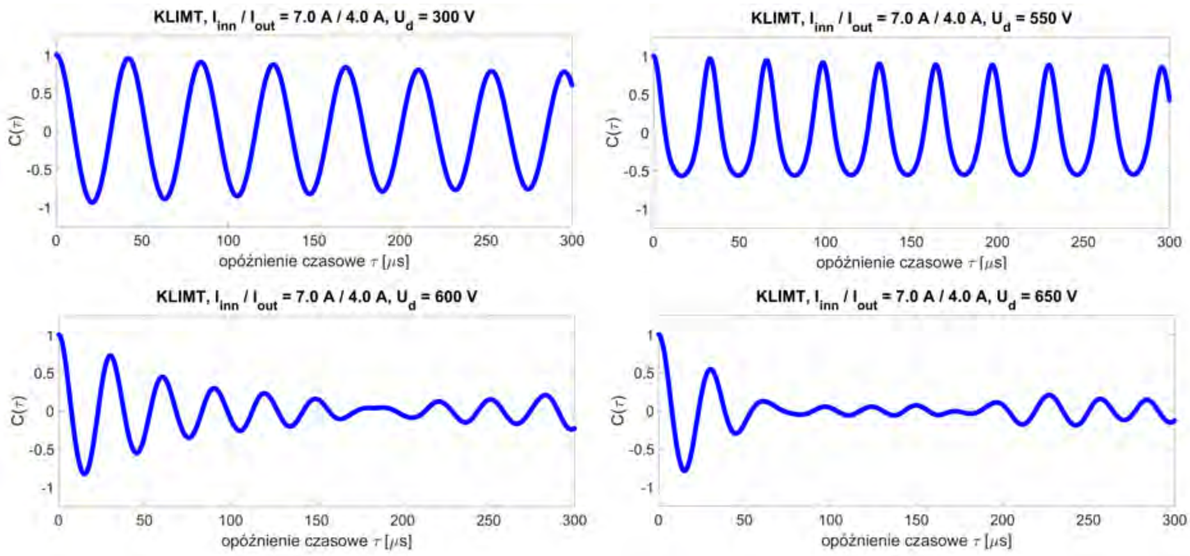
Funkcja autokorelacji $C(\tau)$ (wzór 2.10), informuje o tym, jak szybko pamięć poprzedniego stanu jest w układzie tracona, a jej kształt może pomóc w odróżnieniu procesu chaotycznego od innych zachowań [143].

Ze względu na bardzo podobny wygląd funkcji autokorelacji dla prądu wyładowania oraz prądu jonowego na Rysunku 4.21 zaprezentowano tylko przykładowe funkcje autokorelacji przebiegów prądu wyładowania. Dla niewielkich wartości opóźnień czasowych ($\tau < 20\ \mu s$) korelacje są bardzo silne we wszystkich przedstawionych przypadkach, natomiast dla dłuższych opóźnień funkcja autokorelacji silnie oscyluje w przypadku modu globalnego ($U_d = 300\ V$ i $550\ V$), gdzie amplituda wahań funkcji $C(\tau)$ ma tendencję do bardzo powolnego zmiejszania się wraz ze wzrostem napięcia wyładowania. Dla wyższych napięć ($U_d = 600\ V$ i $650\ V$), gdzie silnik pracuje w trybie lokalnym, amplituda maleje dużo szybciej, ale po przekroczeniu wartości około $200\ \mu s$ nieznacznie wzrasta. We wszystkich przypadkach widoczne są oscylacje o charakterystycznym okresie równym około $30\ \mu s$ (częstotliwość około $30\ kHz$) świadczące o obecności trybu BM.

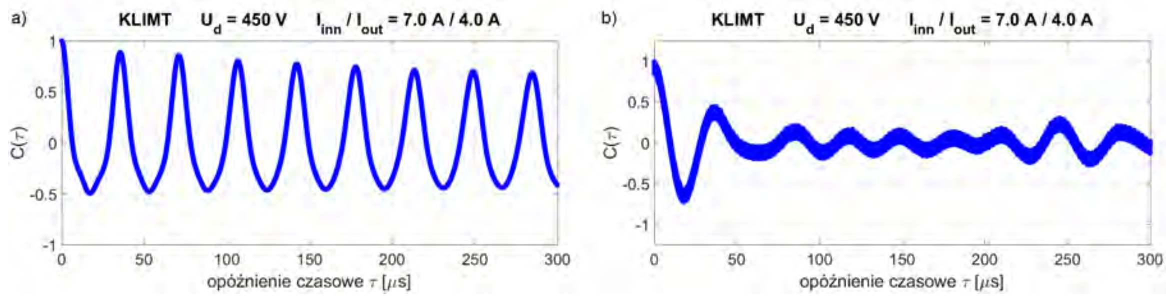
Na Rysunku 4.22 przedstawiono wykresy funkcji autokorelacji prądu jonowego dla $U_d = 450\ V$ w przypadku a) trybu globalnego i b) lokalnego. Kształt funkcji $C(\tau)$ dla trybu lokalnego wykazuje podobieństwo do kształtów funkcji autokorelacji I_d z Rysunku 4.21 otrzymanych dla wysokich napięć (od $U_d \geq 600\ V$), co potwierdza, że reprezentują one ten sam (lokalny) tryb pracy silnika.

Porównując kształty funkcji autokorelacji prądu wyładowania i prądu jonowego z Rysunków 4.21 i 4.22 z kształtami dla układów referencyjnych znajdujących się na Rysunku 2.7 można zauważyć, że dla napięcia $U_d = 300\ V$ i $550\ V$ oraz $450\ V$ w modzie globalnym przypominają one $C(\tau)$ funkcji sinus, a dla wyższego napięcia wyładowania lub dla modu lokalnego kształt funkcji autokorelacji wzbudzanego modelu Lotki-Volterry. Dla wyższych wartości napięć ($U_d = 600\ V$ i $650\ V$) następuje też wyraźna jakościowa zmiana – amplituda maleje dużo szybciej. Można zauważyć również, że w żadnym przypadku nie pojawia się typowe zachowanie podobne do przebiegu funkcji autokorelacji białego szumu ani atraktora Lorenza.

Kształty funkcji autokorelacji dla niskich i średnich napięć ($300\ V \leq U_d \leq 550\ V$) wskazują raczej na zachowanie okresowe, chociaż amplitudy oscylacji mają tendencję niewielkiego spadku. Oscylacyjny charakter $C(\tau)$ pozostaje zgodny z istnieniem wiodącej częstotliowści BM w tym reżimie napięć. Osłabienie się korelacji wraz ze wzrostem τ ma natomiast związek ze złożonością sygnałów prądowych.



Rysunek 4.21: Przykładowe funkcje autokorelacji prądu wyladowania I_d.

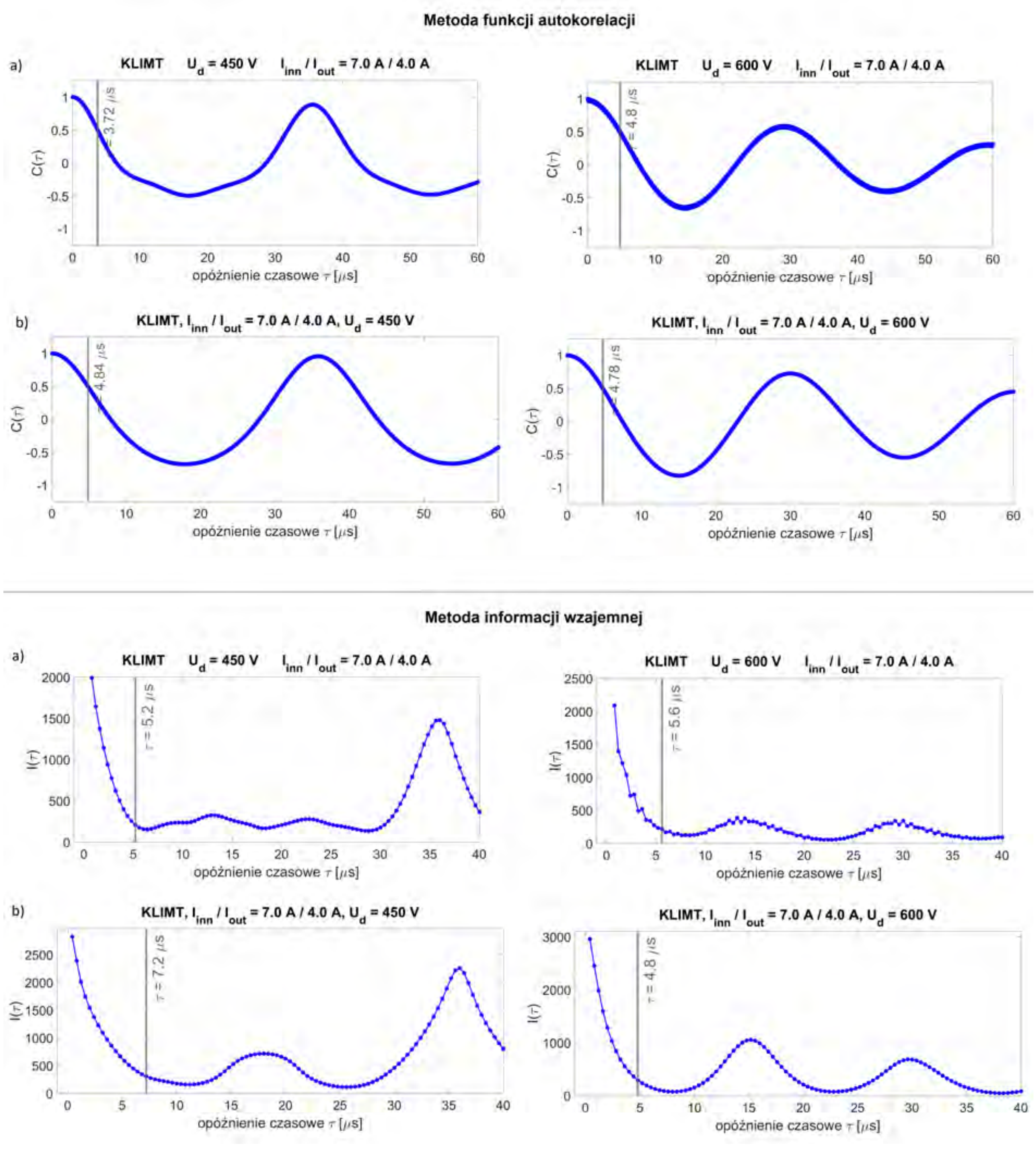


Rysunek 4.22: Funkcje autokorelacji prądu jonowego zebranego sondą FP dla $U_d = 450\ V$ w przypadku: a) modu globalnego i b) lokalnego.

4.3.3 Próba rekonstrukcji atraktora

W celu przedstawienia różnic w dynamice przebiegów prądowych w zależności od rosnącego napięcia U_d, co było również badane przez Gascona i in. w [85], zrekonstruowane zostały trójwymiarowe portrety fazowe przedstawiające mniej lub bardziej regularne struktury atraktorów. W niniejszym rozdziale przedstawiono atraktory prądu wyładowania i prądu jonowego po procesie oczyszczania dla pomiarów z Tabeli 4.1.

Wybór wartości opóźnienia czasowego Odpowiednio dobrana wartość opóźnienia czasowego będzie miała wpływ na poprawność przeprowadzanej rekonstrukcji atraktora [20]. Dobór τ będzie miał znaczenie również przy obliczaniu właściwego wymiaru atraktora (patrz rozdział 4.3.4), przy konstruowaniu wykresów powrotu (patrz rozdział 4.4) oraz tworzeniu symetryzowanych wzorów kropkowych (patrz rozdział 4.5).

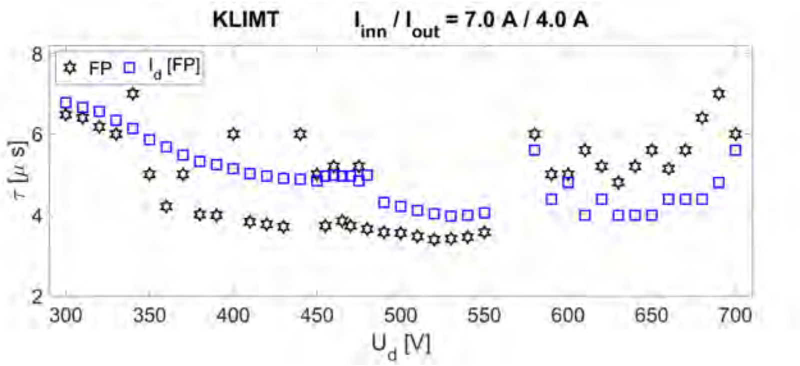


Rysunek 4.23: Przykładowe wyniki wyznaczania opóźnienia czasowego metodą funkcji autokorelacji $C(\tau)$ oraz metodą informacji wzajemnej $I(\tau)$ dla: a) prądu jonowego zebranego sondą FP oraz b) prądu wyładowania rejestrowanego w tym samym czasie.

Istnieje kilka metod określania optymalnej wartości opóźnienia czasowego. Na potrzeby tej rozprawy, zostały zaadoptowane dwie z nich: metoda oparta na analizie funkcji autokorelacji $C(\tau)$ oraz metoda oparta na analizie informacji wzajemnej $I(\tau)$ (rozdział 2.2.3). Ze względu na długi czas obliczeń dla każdej metody zostały dobrane odpowiednie

FP	300 V	450 V	550 V	580 V	600 V	650 V
funkcja autokorelacji	$\tau = \mathbf{6.48}$	$\tau = 3.72$	$\tau = \mathbf{3.58}$	$\tau = 4.8$	$\tau = 4.8$	$\tau = 5.36$
informacja wzajemna	$\tau = 8.4$	$\tau = \mathbf{5.2}$	$\tau = 6$	$\tau = \mathbf{6.4}$	$\tau = \mathbf{5.6}$	$\tau = \mathbf{5.6}$
I_d [FP]	300 V	450 V	550 V	580 V	600 V	650 V
funkcja autokorelacji	$\tau = \mathbf{6.78}$	$\tau = \mathbf{4.84}$	$\tau = \mathbf{4.06}$	$\tau = 4.7$	$\tau = 4.78$	$\tau = 5$
informacja informacji	$\tau = 8$	$\tau = 7.2$	$\tau = 6.4$	$\tau = \mathbf{5.6}$	$\tau = \mathbf{4.8}$	$\tau = \mathbf{4}$

Tabela 4.2: Wyniki wyznaczenia opóźnienia czasowego (podane w μs) uzyskane dwoma metodami. Wytłuszczone wartości przyjęto do dalszej analizy.

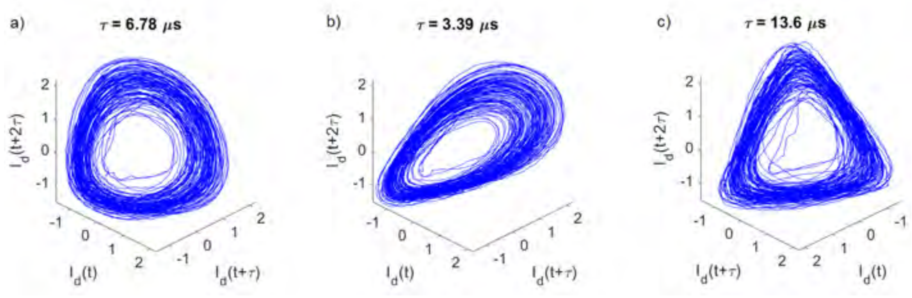


Rysunek 4.24: Wyniki zbiorcze opóźnień czasowych, które zostały przyjęte do rekonstrukcji atraktorów.

wycinki szeregów czasowych. Odcinki te obejmowały oscylacje trybu BM dla napięć $U_d \leq$ 550 V i trybu lokalnego dla napięć wyższych. Do badań funkcji autokorelacji użyto 10 % długości sygnału (czyli 2 ms) próbkowanego z częstotliwością 50 MHz. W przypadku metody informacji wzajemnej do analizy wzięto 15 % całego sygnału (czyli 3 ms), ale obniżono częstotliwość próbkowania do 2.5 MHz. Jak sprawdzono różnica częstotliwości próbkowania nie wpłynęła na wyniki działania tych dwóch metod. Algorytm wyszukiwania opóźnienia czasowego metodą funkcji autokorelacji znajdował τ, dla którego spełniony był warunek: $C(\tau) = 1/2C(0)$. Natomiast algorytm oparty na metodzie informacji wzajemnej znajdował τ, dla którego: $I(\tau)/I(0) \approx 0.1$. Przykładowe wyniki wyznaczania opóźnienia czasowego przedstawia Rysunek 4.23.

Tabela 4.2 prezentuje wyniki oszacowania τ w przypadku prądu jonowego zebranego przez sondę FP oraz mierzonego jednocześnie prądu wyładowania (oznaczonego jako I_d [FP]). Wybór opóźnienia został dokonany a posteriori na podstawie wizualnej oceny zrekonstruowanego atraktora. Aby uwidocznić opóźnienia czasowe, które zostały wybrane do rekonstrukcji odpowiednie wartości zostały przedstawione pogrubioną czcionką.

Na Rysunku 4.24 umieszczono wszystkie przyjęte wartości τ, które zostały użyte do dalszej analizy. Dla napięć $U_d \leq 550$ V opóźnienia wyznaczono dla modu globalnego dominującego w tym przedziale napięć, a dla $U_d \geq 580$ V wyniki dotyczą modu lokalnego. Czasy opóźnienia przeważnie nie ulegały dużym wahaniom. Dane dotyczące prądu wyładowania dla napięć z zakresu $U_d \leq 550$ V wykazywały niemal zawsze dłuższy czas utraty



Rysunek 4.25: Rekonstrukcja przestrzeni fazowej dla trzech różnych wartości opóźnień czasowych dla prądu wyładowania I_d w przypadku $U_d = 300\ V$ (pomiar nr 2).

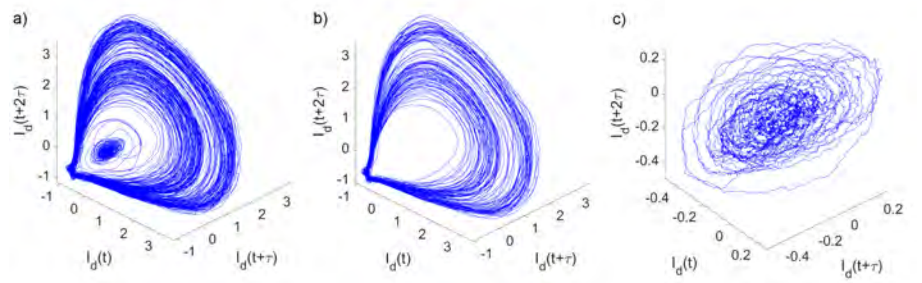
informacji niż dane jonowe sondy FP, czyli wybrane dla nich wartości τ były większe, natomiast dla wyższych napięć sytuacja się odwróciła.

W przypadku wysokich napięć ($U_d \geq 580\ V$) wartości opóźnień były najbardziej rozproszone i wahały się od 3 μs do 7 μs, chociaż dla prądu wyładowania poza kilkoma wyjątkami wykazywały dość stabilne zachowanie. Widoczny jest ogólny spadek wartości τ wraz ze wzrostem napięcia wyładowania aż do osiągnięcia wartości progowej U_d wynoszącej 550 V, przy której następował znaczny wzrost siły ciągu (Rysunek 3.21) i zmiana trybu oscylacji (Rysunek 3.20 a)). Podejrzewa się, że spadek wartości τ wraz ze wzrostem napięcia U_d może być związany z rosnącą wartością podstawowej częstotliwości BM (Rysunek 4.13).

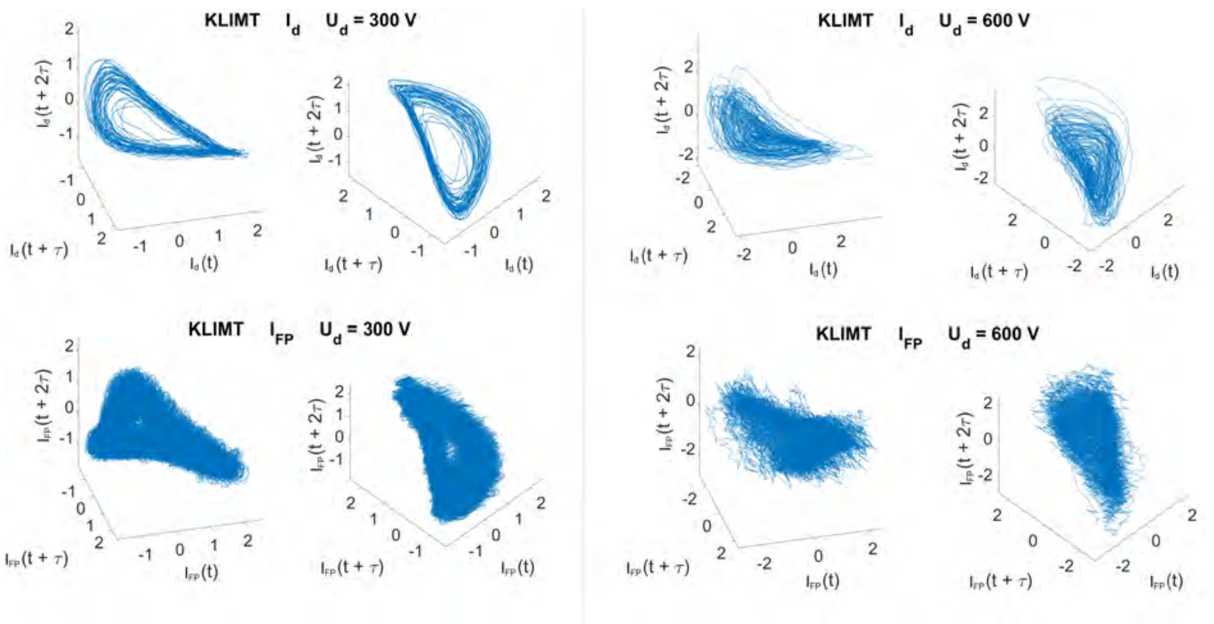
Rekonstrukcja przestrzeni fazowej Podczas przeprowadzonej analizy danych z I etapu projektu KLIMT, zrekonstruowane zostały przestrzenie fazowe przy użyciu wszystkich τ uzyskanych dzięki dwóm metodom, a następnie w sposób wizualny (tzn. ocena polegała na rekonstruowaniu przestrzeni fazowej dla dwóch różnych τ i ocenie czy dana wartość zezwala na poprawną rekonstrukcję) zostały wybrane właściwe wartości opóźnień czasowych.

Wszystkie zaprezentowane w tym rozdziale rekonstrukcje zostały przedstawione dla odcinka czasu 2 ms, co stanowi 10 % długości zarejestrowanego szeregu. Do prezentacji wybrane zostały odcinki zawierające dominujący tryb oscylacji podczas pracy silnika w danych warunkach. Wcześniej wykonane zostały testy, w których stwierdzono, że wybór danego odcinka nie wpływał na kształt odtworzonego atraktora. Dla napięć dla których występuje tryb BM struktury atraktorów przypominają te uzyskane przez Gascon i in. w [85], ale są mniej rozmyte, gdyż nie stosował on redukcji szumów.

Na Rysunku 4.25 pokazano jak wartość opóźnienia wpływa na rekonstrukcję atraktora. W przypadkach b) i c) przedstawiono przykłady niewłaściwego doboru τ, gdzie dobrane wartości były odpowiednio za małe i za duże. Niemniej jednak struktury, które się otrzymuje dla optymalnej wartości τ, widoczne na tym rysunku w przypadku a), są odtwarzane nawet przy dwukrotnym zmniejszeniu lub zwiększeniu wytypowanej wartości opóźnienia.



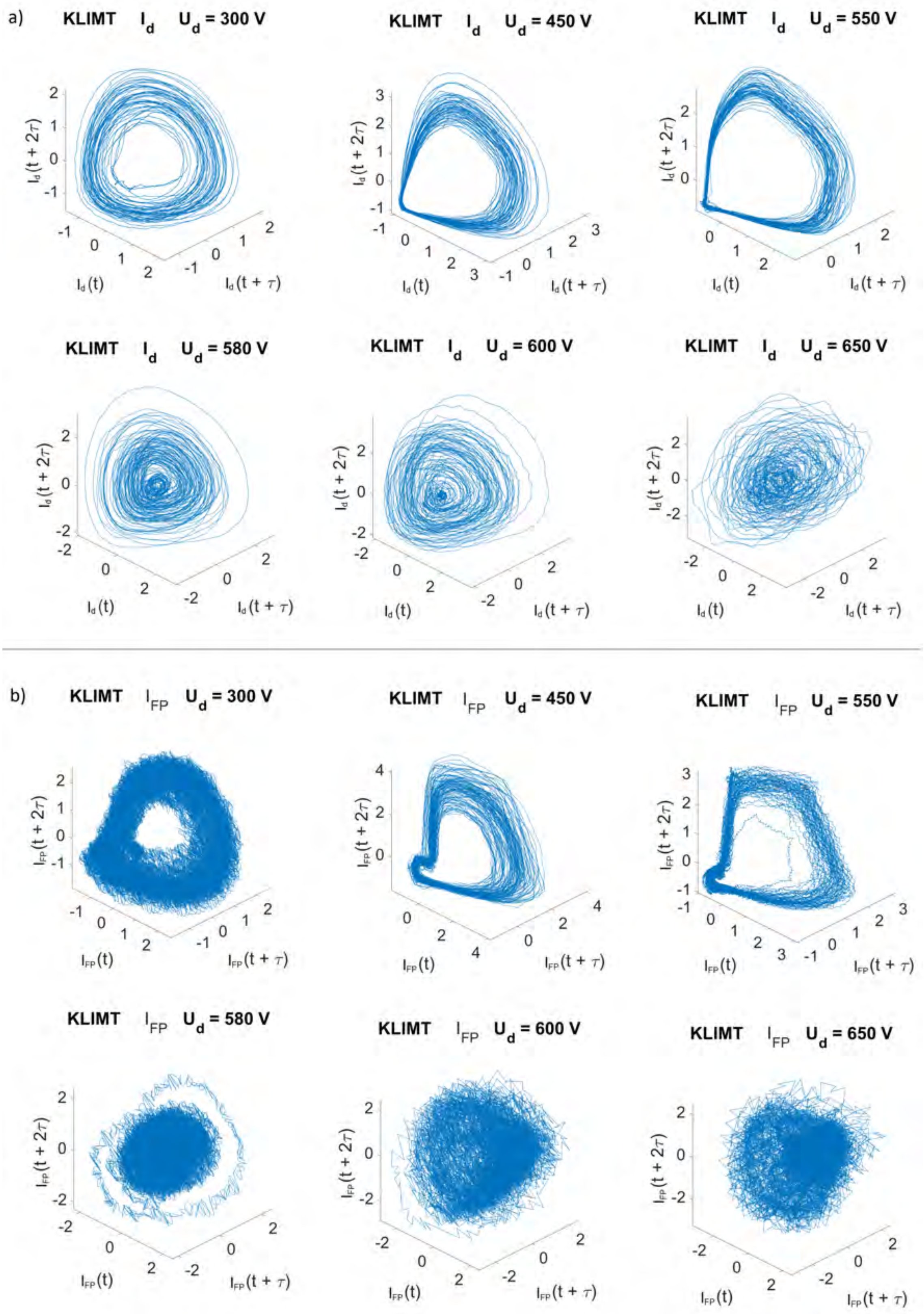
Rysunek 4.26: Przykład zrekonstruowanych przestrzeni fazowych prądu wyładowania I_d w przypadku $U_d = 450\ V$ (pomiar nr 17) dla odcinków czasu zawierających: a) obydwa mody działania silnika, b) mod globalny, c) mod lokalny.



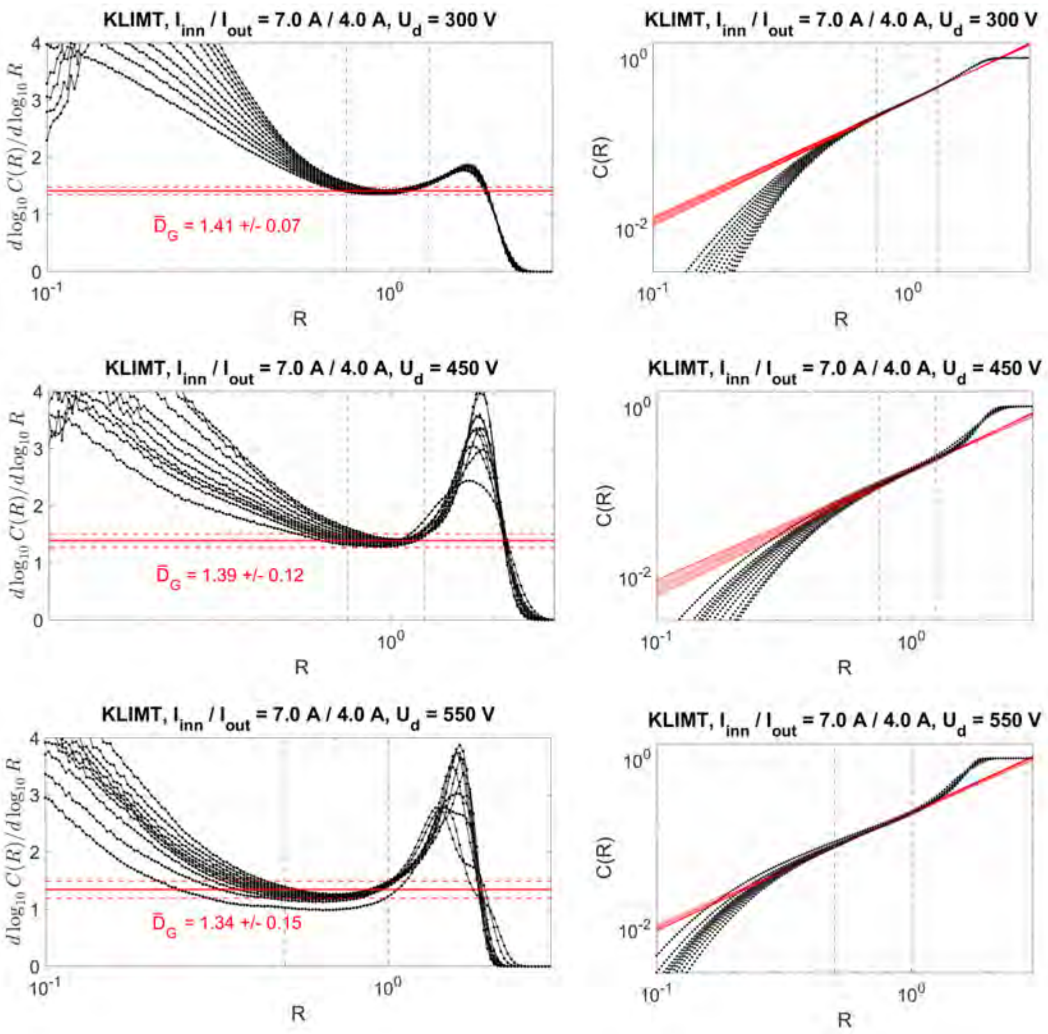
Rysunek 4.27: Przykłady zrekonstruowanych przestrzeni fazowych prądu jonowego zebranego sondą FP oraz rejestrowanego jednocześnie prądu wyładowania I_d widziane pod dwoma różnymi kątami.

Na Rysunku 4.26 przedstawiono przypadek odtworzonego kształtu atraktora prądu wyładowania, gdzie został użyty odcinek czasu zawierający dwa mody pracy silnika, co objawia się innym wyglądem atraktora niż gdyby wybrany odcinek zawierał tylko mod globalny dominujący przy tym napięciu. Na tym przykładzie widać, że dla trybu lokalnego, zgodnie z tym, że posiada on mniejszą amplitudę (Rysunki 4.6 – 4.8 a)), obszar przestrzeni fazowej zajmowany przez atraktor jest mniejszy, natomiast w trybie globalnym trajektoria zatacza kształty zbliżone do pętli o większym promieniu. Chociaż atraktor trybu lokalnego jest bardziej zwarty, w obu przypadkach czas trwania obiegu po trajektorii wokół środka atraktora odpowiada pojedynczej oscylacji BM.

Na Rysunku 4.27 zostały przedstawione przykładowe kształty uzyskanych atraktorów



Rysunek 4.28: Zrekonstruowane przestrzenie fazowe a) prądu wyładowania zebranego podczas pomiarów sondą FP, b) prądu jonowego zebranego w tym samym czasie.



Rysunek 4.29: Przykładowe wyniki wyznaczania wymiaru korelacyjnego dla prądu jonowego sondy FP. Granice obszaru skalowania, dla którego wyznaczono D_G, zaznaczono pionowymi liniami przerywanymi.

widziane pod różnymi kątami, aby lepiej pokazać jaką część przestrzeni fazowej zajmują. Rekonstrukcje dotyczące prądu jonowego bez względu na wartości przyłożonego napięcia są bardziej rozmyte na skutek obecności szumu niż ich odpowiedniki dla prądu wyładowania, które wykazują bardziej skoncentrowane struktury. Niemniej jednak one również nie wypełniają kulistej objętości w sposób całkowity, co świadczy o tym, że nie prezentują procesów w pełni losowych.

Na Rysunku 4.28 zaprezentowano zrekonstruowane atraktory prądu wyładowania oraz prądu jonowego zebranego sondą FP dla pomiarów z Tabeli 4.1. Zrekonstruowane kształty atraktorów dla danego napięcia pozostawały ze sobą zgodne. Ponieważ istnienie atraktora o zagęszczonej i subtelnej strukturze jest cechą układów chaotycznych powyższe wyniki wskazują na istnienie zachowań chaotycznych w badanych przebiegach prądowych.

4.3.4 Wyznaczenie wymiaru fraktalnego

Jedną z ważniejszych cech atraktora jest jego wymiar [69, 202]. Jeśli dla badanego układu dynamicznego okaże sie, że nie jest on liczbą całkowitą, to będzie oznaczać, że układ posiada dziwny atraktor. Zwykle oznacza to również, że system jest chaotyczny [143].

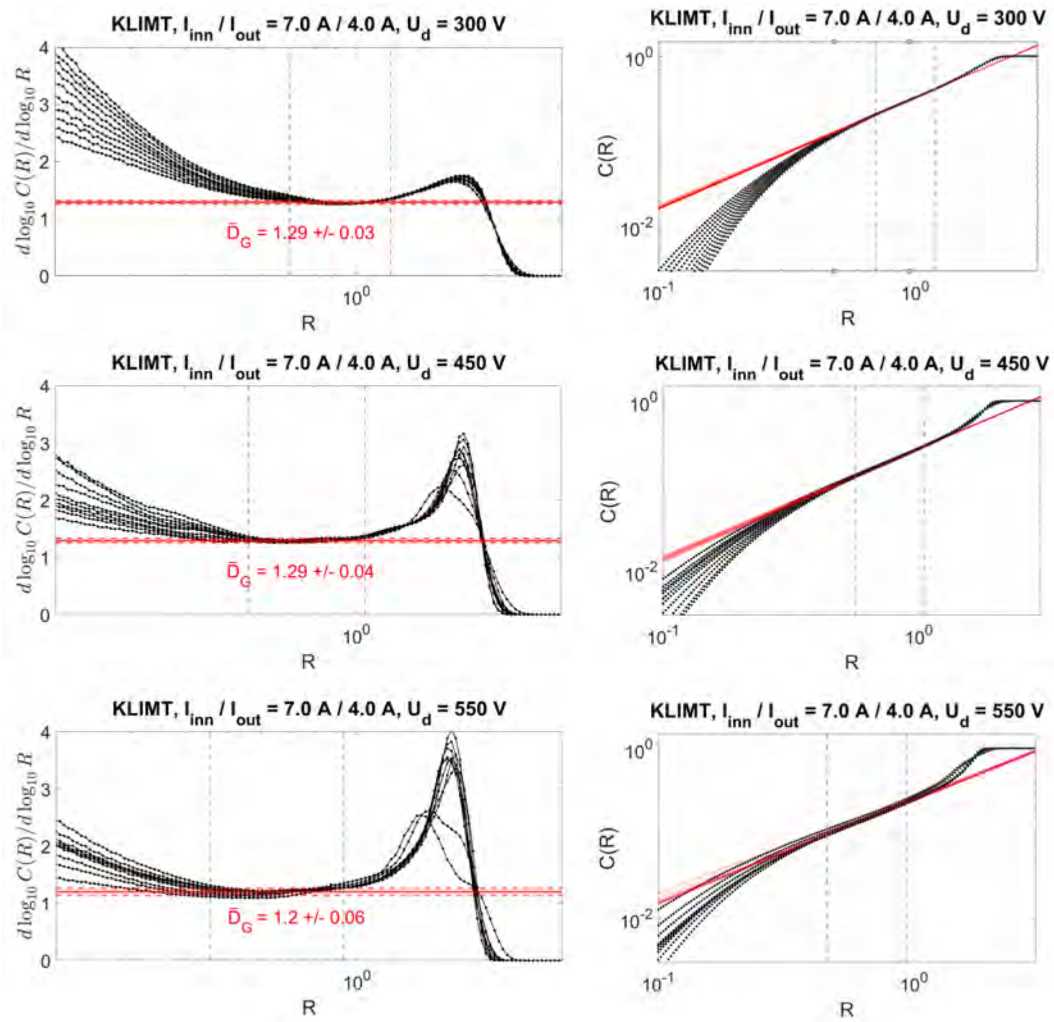
Podczas poszukiwania wymiaru fraktalnego D_G przyjęto maksymalny wymiar zanurzenia d równy 15, z krokiem $\Delta d = 1$ pomiędzy kolejnymi obliczeniami. Wybrany przedział długości dla promieni hiperkuli został podzielony na 151 części, co oznacza, że całkę korelacyjną $C(R)$ (wzór 2.14) obliczano dla tylu różnych wartości separacji punktów. Do analizy wzięto 20 % całego sygnału, czyli 4 ms. Dane poddane analizie numerycznej były próbkowane z częstotliwością 50 MHz. Ze względu na to, że algorytm używany do obliczania wymiaru korelacyjnego jest wrażliwy na poziom szumu, został on zastosowany tylko dla oczyszczonych serii danych. Badania przeprowadzono dla pomiarów pochodzących z I etapu projektu KLIMT.

Jednym z wymiarów fraktalnych jest tzw. wymiar korelacyjny D_G (opisany w podrozdziale 2.2.5), który może dostarczyć cennych informacji o rodzaju dynamiki występującej w szeregach czasowych. Wartość 1 będzie on przyjmować w przypadku dynamiki czysto okresowej lub cyklu granicznego, natomiast wartość 2 w przypadku dynamiki quasi-okresowej, która w przestrzeni fazowej generuje torus. Niecałkowity wymiar korelacyjny będzie wskazywać na obecność dynamiki chaotycznej w szeregach czasowych [6, 27].

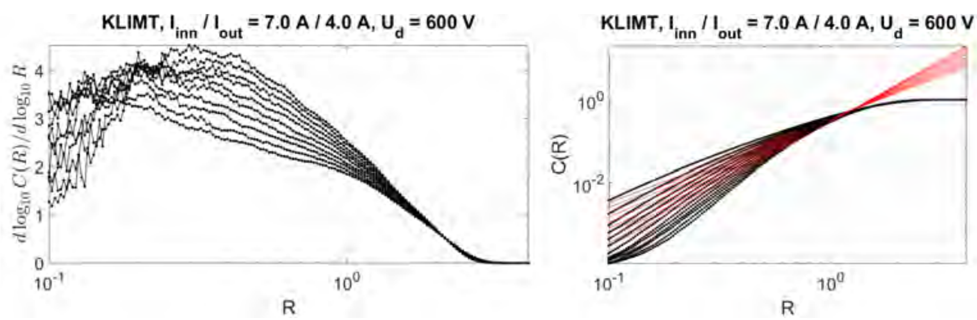
Całki korelacyjne $C(R)$ i odpowiadające im funkcje $d\log_{10} C(R)/d\log_{10} R$ zostały zaprezentowane na Rysunkach 4.29 i 4.30, odpowiednio dla prądu jonowego i mierzonego równocześnie prądu wyładowania. Na rysunkach tych zaznaczono obszary skalowania, czyli przedziały promienia R gdzie funkcja $d\log_{10} C(R)/d\log_{10} R$ osiągała podobne, mniej więcej stałe wartości [6, 15]. Na przedstawionych wykresach podobnie jak w pracy Mc Mahon i in. [168], gdzie pokazano w jaki sposób określa się obszar skalowania, w sytuacji kiedy obszar stałej wartości funkcji $d\log_{10} C(R)/d\log_{10} R$ jest stosunkowo wąski, udało się znaleźć regiony w których skalowanie było możliwe. Przykład danych, dla których nie można było znaleźć takiego regionu umieszczono na Rysunku 4.31.

Na Rysunku 4.32, podobnie jak na Rysunku 2.16, przedstawione zostały wyniki dopasowań funkcji liniowych w zależności od wymiaru zanurzenia dla $U_d = 550\ V$. Widać, że wymiar D_G wyraźnie się stabilizuje przy wartościach około 1.34 i 1.2 odpowiednio dla prądu jonowego i prądu wyładowania.

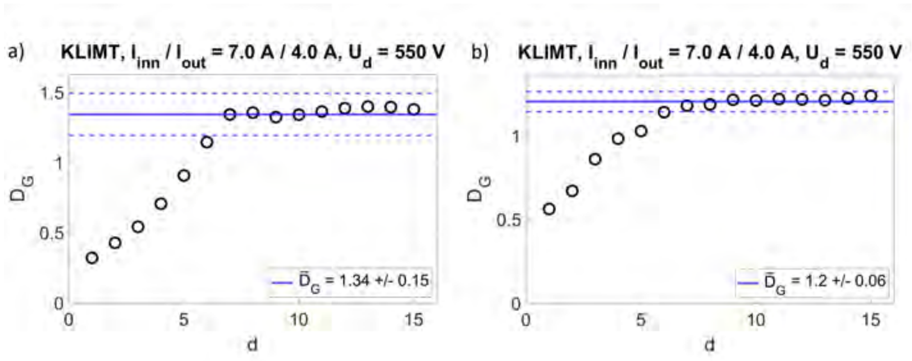
Jeśli zrekonstruowane przestrzenie fazowe będą zdominowane przez szum nie wykażą zwartej charakterystycznej struktury i niemal całkowicie wypełnią przestrzeń fazową, co oznacza, że ich wymiar korelacyjny jest praktycznie nieskończony. To powoduje, że dla szeregów czasowych o dużym wkładzie szumu nie pojawi się obszar skalowania. W przypadku danych eksperymentalnych dzieje się tak dla wszystkich pomiarów dla napięć począwszy od 580 V, czyli tam, gdzie oscylacje przeszły w tryb lokalny. Na Rysunku 4.33 przedstawiono wyznaczone wymiary korelacyjne D_G w funkcji napięcia wyładowania U_d, gdzie tylko dla napięć nie przekraczających 550 V można było zidentyfikować obszar, gdzie nachylenie funkcji $d\log_{10} C(R)/d\log_{10} R$ pozostawało stałe. Wyniki te pokazują, że wymiar fraktalny podstawowej dynamiki prądu jonowego D_G w zasadzie mieści się w za-



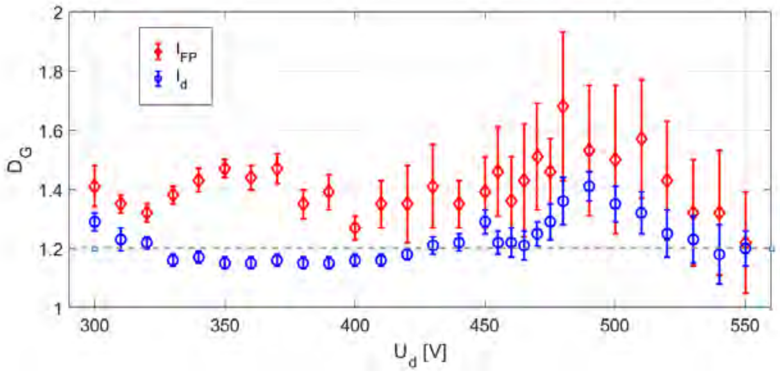
Rysunek 4.30: Przykładowe wyniki wyznaczania wymiaru korelacyjnego dla prądu wyładowania I_d. Granice obszaru skalowania, dla którego wyznaczono D_G, zaznaczono pionowymi liniami przerywanymi.



Rysunek 4.31: Przykład niemożliwego wyznaczenia wymiaru korelacyjnego w przypadku prądu wyładowania, gdzie nie pojawia się obszar skalowania.



Rysunek 4.32: Przykłady dopasowania funkcji stałej do zależności wymiaru korelacyjnego D_G od wymiaru zanurzenia d w zakresie od 6 do 15 dla $U_d = 550\ V$ w przypadku: a) prądu jonowego zebranego sondą FP, b) prądu wyładowania I_d zarejestrowanego w tym samym czasie.



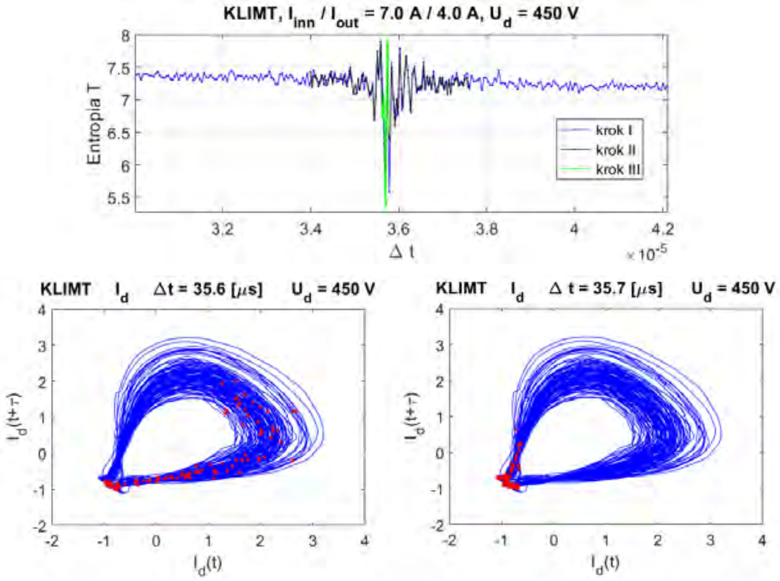
Rysunek 4.33: Wyniki zbiorcze wyznaczania wymiaru korelacyjnego D_G w funkcji napięcia wyładowania U_d.

kresie 1.2 - 1.6, a wartości wymiaru dynamiki prądu wyładowania znajdują się w węższym przedziale przy średniej wartości wynoszącej 1.2.

Podsumowując, można stwierdzić, że niskie i niecałkowite wartości wyznaczonego wymiaru korelacyjego D_G dla napięć U_d z przedziału 300 - 550 V wskazują, że atraktory, których rekonstrukcję opisano w rozdziale 4.3.3 są atraktorami dziwnymi. Stanowi to dość mocny argument za niskowymiarową dynamiką chaotyczną trybu globalnego obydwu przebiegów prądowych.

4.3.5 Przekroje Poincarégo

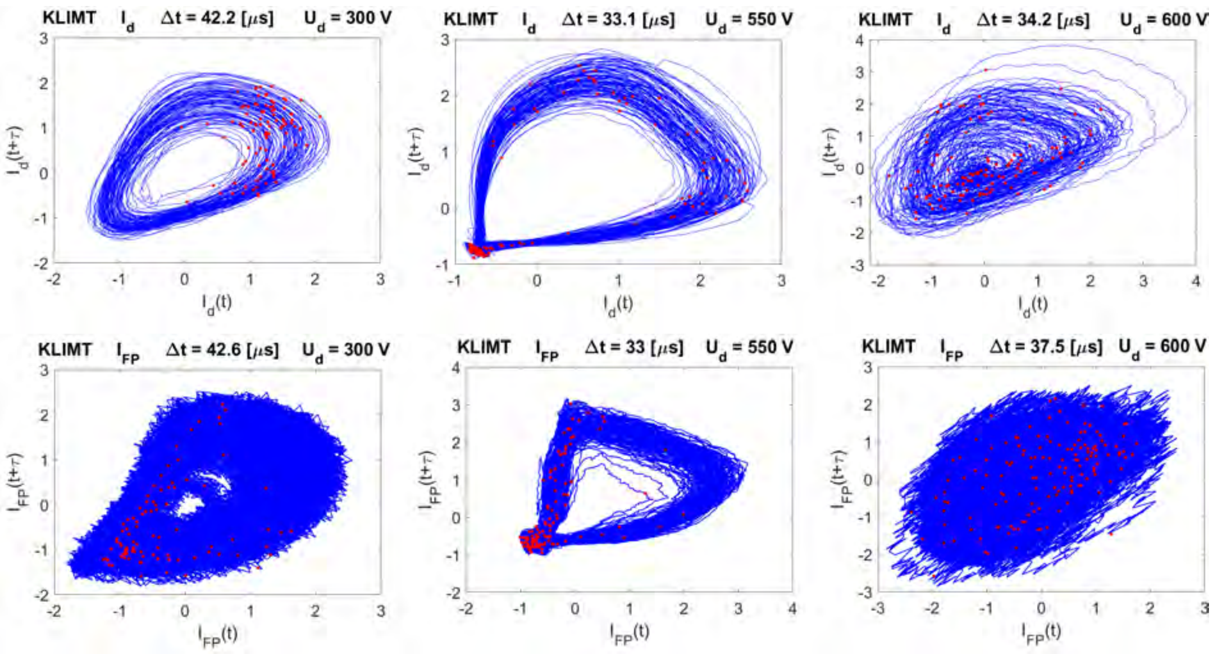
Przekroje Poincarégo stanowią jedno z ważniejszych narzędzi służących do analizy układów chaotycznych [20]. Poniżej zaprezentowano wyniki wykorzystania tej metody do przebiegów prądowych.



Rysunek 4.34: U góry przykładowy wycinek zmian entropii T dla trzech iteracji, gdzie Δt oznacza przedział czasu służący do wykonania przekroju metodą stroboskopową. Na dole po lewej stronie przekrój Poincarégo po zastosowaniu Δt równego $1/f_{BM}$, po prawej przekrój po zastosowaniu Δt otrzymanego po przejściu trzech kroków algorytmu. Atraktory zrekonstruowano dzięki metodzie opóźnień czasowych, gdzie $I_d(t)$ oznacza oczyszczony szereg czasowy danych, a $I_d(t+\tau)$ ten sam szereg z opóźnieniem τ.

Przy konstrukcji map Poincarégo najpierw posłużono się metodą stroboskopową (opisaną w podrozdziale 2.2.4). Do tego celu użyto 20% długości sygnału (4 ms). Aby znaleźć optymalną wartość przesunięcia czasowego Δt, które miało posłużyć do stworzenia przekroju, zostały wzięte pod uwagę częstotliwości podstawowe trybu oddechowego $f_1 = f_{BM}$ zidentyfikowane podczas analizy widmowej i przedstawione na Rysunkach 4.10 - 4.11. Za pomocą algorytmu numerycznego przeskanowano wartości przesunięć czasowych odpowiadających częstotliwościom z przedziału od $0.8 f_{BM}$ do $1.2 f_{BM}$, szukając minimum entropii $T_{min,1}$ w tym przedziale, tzn. metoda polegała na odnalezieniu takiego przesunięcia Δt, przy których liczba punktów należących do przekroju była najmniejsza. Następnie obszar został zawężony do przedziału $[0.9 T_{min,1}, 1.1 T_{min,1}]$, gdzie odnalezione w nim minimum entropii $T_{min,2}$ stanowiło podstawę do ostatecznego skanu $[0.998 T_{min,2}, 1.002 T_{min,2}]$. Kryterium zbieżności algorytmu stanowiła zmiana minimum entropii o 2 %. W każdym kroku iteracji badano wartość entropii dla 2000 punktów.

Rysunek 4.34 przedstawia przykład wyników uzyskanych dzięki zastosowaniu metody stroboskopowej do tworzenia przekrojów Poincarégo. Jak widać, że wraz ze wzrostem dokładności wyznaczenia entropii liczba punktów tworzących mapę Poincarégo (czerwone punkty na niebieskim portrecie fazowym) drastycznie maleje, tzn., że procedura jest zbieżna oraz że dobrana wartość Δt była właściwa. Pokazuje to również w jakim stopniu różnica w doborze przesunięcia czasowego Δt wynosząca około 0.1 μs wpływa na wygląd przekroju.

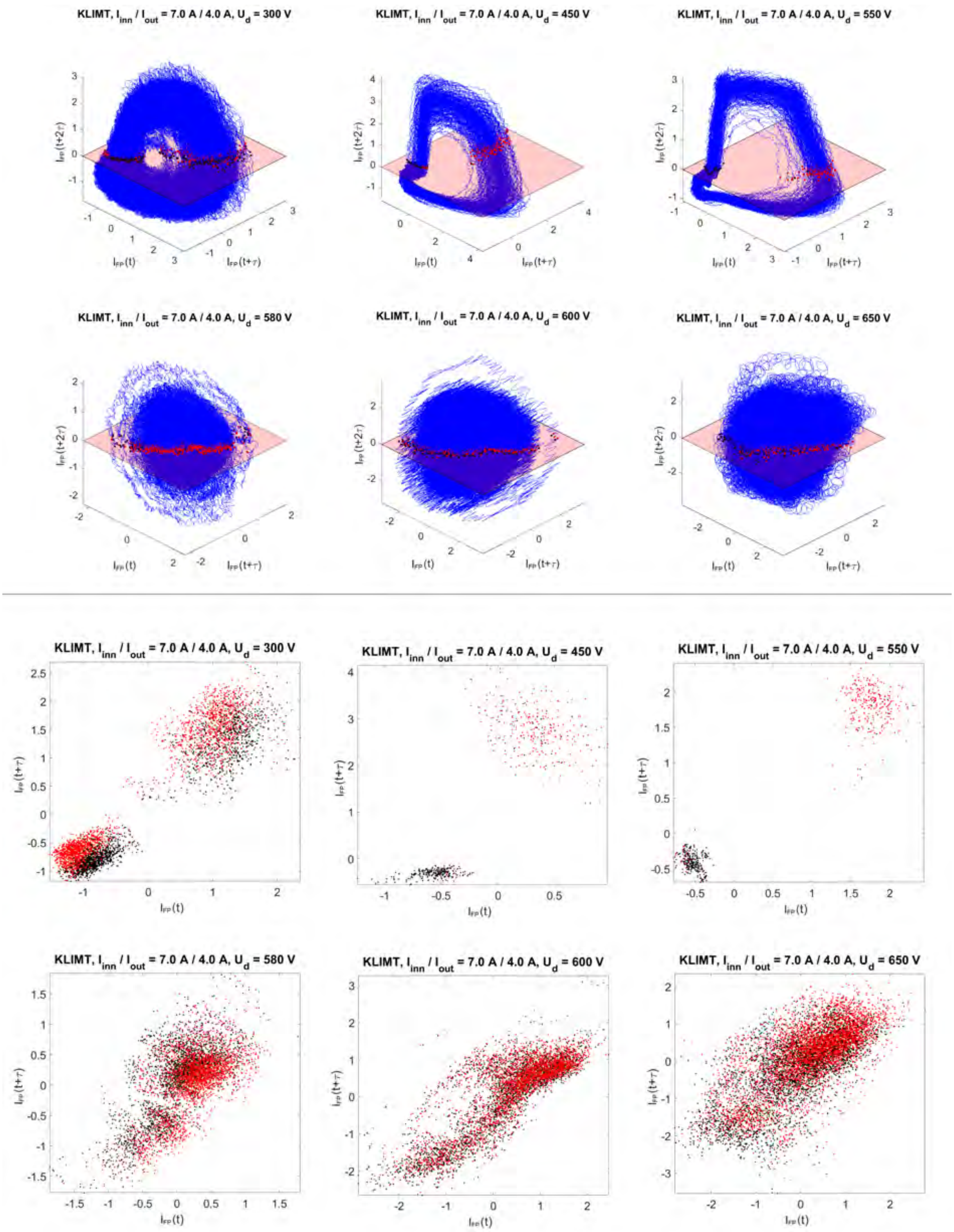


Rysunek 4.35: Przykładowe przekroje Poincarégo (kolor czerwony) uzyskane metodą stroboskopową dla przebiegów prądu wyładowania (górny panel) oraz prądu jonowego zebranego sondą FP (dolny panel).

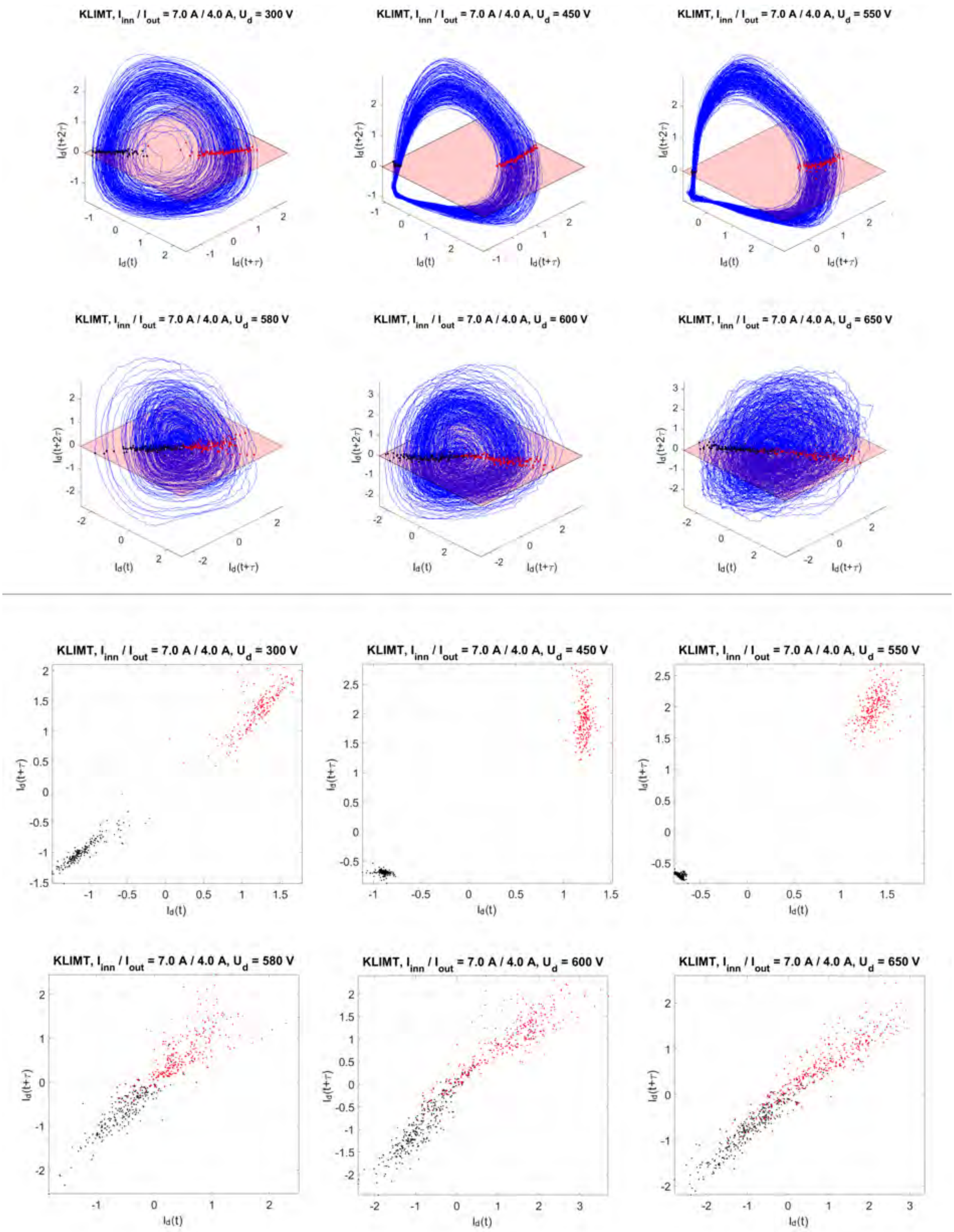
Na Rysunku 4.35 przedstawiono przykładowe przekroje Poincarégo dla prądu wyładowania i prądu jonowego, które uwidoczniły, że istnieją bardziej uprzywilejowane miejsca na atraktorze, w których punkty tworzące przekrój się kumulują. Dla $U_d = 550\ V$ punkty te preferują te same miejsca w obu przypadkach i kumulują się w specyficznym regionie stanowiącym miejsce zagęszczenia trajektorii fazowych. Dla wysokiego napięcia ($U_d = 600\ V$), gdzie oscylacje przeszły w tryb lokalny, mapa jest rozproszona na całym atraktorze, a w przypadku napięcia niskiego ($U_d = 300\ V$) punkty przekroju skumulowały się po jednej części atraktora.

Podczas analizy przekroji Poincarégo przetestowano również zwiększoną liczbę punktów pomiarowych (30 % zamiast 20 %) i zauważono, że wraz ze wzrostem branej pod uwagę liczby danych wciąż powstawały nowe punkty mapy, które rozchodziły się w dostępnej przestrzeni fazowej i struktura stawała się bardziej rozproszona. Ze względu na to, że pik BM jest szeroki (Rysunki 4.10 i 4.11), zastosowana metoda nie przyniosła oczekiwanego rezultatu, czyli chociaż punkty zdają się grupować w pewnych miejscach nie można stwierdzić, że uwidacznia się zwarta, zlokalizowana struktura, taka jak w przypadku stalowej belki czy modelu L-V omawianych w rozdziale 2.2.4 (patrz Rysunki 2.14 i 2.15). Scharakteryzowanie chaotycznego zachowania sygnału wymaga zatem innej metody analizy.

Z powodu nie odnalezienia bądź nie istnienia częstotliwości własnej układu, przy której metoda stroboskopowa wskazałaby na zachowanie chaotyczne przeprowadzono również analizę w standardowy sposób. Mianowicie wykreślono atraktory i przecięto je płaszczy-



Rysunek 4.36: Przekroje Poincarégo przestrzeni fazowych dla przebiegów prądu jonowego zarejestrowanych podczas pomiaru sondą FP. Na górnym panelu kolorem niebieskim wykreślono zrekonstruowane atraktory. Kolorami czerwonym i czarnym odróżniono punkty przecięcia płaszczyzny przekroju odpowiednio od góry i od dołu.



Rysunek 4.37: Przekroje Poincarégo przestrzeni fazowych dla przebiegów prądu wyładowania zarejestrowanych jednocześnie z przebiegami z Rysunku 4.36. Na górnym panelu kolorem niebieskim wykreślono zrekonstruowane atraktory. Kolorami czerwonym i czarnym odróżniono punkty przecięcia płaszczyzny przekroju odpowiednio od góry i od dołu.

zną odniesienia spełniającą warunek $I_d(t + 2\tau) = 0$, co zostało pokazane na górnych panelach na Rysunkach 4.36 i 4.37. Płaszczyzna przekroju została wybrana w ten sposób, aby przechodziła przez środek atraktora i aby orbity nie były do niej styczne.

Porównując otrzymane mapy Poincarégo dla niskich napięć $U_d \leq 550\ V$ (czyli dla trybu globalnego) z mapami dotyczącymi układów referencyjnych (patrz Rysunki 2.11 i 2.12) można stwierdzić, że układ punktów jest najbardziej zbliżony do tego występującego dla modelu L-V w przypadku, gdy wartość parametru kontrolnego ω wynosi 3.766, czyli dla którego układ przejawia zachowanie chaotyczne. Jednak dla prądu jonowego rozkład punktów pozostaje bardzo rozproszony, co wynika z dużej ilości występującego w nim szumu. Dla napięć wysokich ($U_d \geq 600\ V$), gdzie silnik pracuje w trybie lokalnym, punkty mapy prądu wyładowania grupują się w dość wąskim pasie, co przypomina ułożenie punktów w przypadku przekroju układu Lorenza.

Podsumowując, ze względu na to, że rozkład punktów na mapach nie był losowy, a punkty nie skupiały się wzdłuż krzywej zamkniętej i tworzyły dość zwarte struktury, można stwierdzić, że przekroje Poincarégo wskazują na istnienie zachowania chaotycznego w badanym układzie, co ze względu na mniejszą ilość szumu jest bardziej widoczne w przypadku prądu wyładowania.

4.3.6 Wyznaczenie wykładników Lapunowa

Jedną z technik odróżniania dynamiki chaotycznej od niechaotycznej jest wyznaczenie największego wykładnika Lapunowa λ_{max}, który reprezentuje średnie tempo rozbiegania się sąsiednich trajektorii fazowych. Mierzy on wrażliwość na warunki początkowe.

Wedle opisu przedstawionego w rozdziale 2.2.6, największy dodatni wykładnik z całego spektrum wykładników Lapunowa charakteryzuje szybkość średniej rozbieżności trajektorii fazowych [69] i może być określony równaniem:

$$d(t) = d_0 e^{\lambda_{max} t}, \tag{4.3}$$

gdzie d_0 jest początkową odległością dzielącą dwa stany, a $d(t)$ ich odległością po czasie t [143]. Jeżeli wiadomo, że trajektoria jest zamknięta w ograniczonym podzbiorze przestrzeni fazowej, obecność dodatniego wykładnika wystarcza do zdiagnozowania chaosu deterministycznego, a im wyższa będzie wartość największego dodatniego wykładnika Lapunowa, tym bardziej nieprzewidywalna będzie dynamika badanego układu.

W celu wyznaczenia λ_{max} został napisany program numeryczny w oparciu o metodę opisaną w artykule [237] przez Vibe i in. Algorytm, którym się posłużono został specjalnie stworzony tak, aby pozwalał na uzyskanie wiarygodnych wyników dla niewielkich zestawów danych, czyli można go używać nawet do krótkich serii czasowych. Po zrekonstruowaniu atraktora metodą Takensa algorytm ten lokalizuje najbliższych sąsiadów dla każdego punktu $x(i)$ należącego do trajektorii. Odległość pomiędzy dwoma punktami $x(i)$ i $x(j)$, gdzie $x(j)$ jest najbliższym sąsiadem punktu $x(i)$ w chwili $t_0 = 0$, jest określona przez [193]:

$$d_i(t_0) = \|x(j) - x(i)\|, \tag{4.4}$$

gdzie $\|.\|$ oznacza normę euklidesową. Po czasie t_k odległość między tymi dwoma punktami jest podana przez:

$$d_i(t_k) = \|x(j+k) - x(i+k)\| \,. \tag{4.5}$$

Następnie korzystając z relacji $d_i(t_k) \approx d_i(t_0)e^{\lambda_{max} t_k} = d_i(t_0)e^{\lambda_{max} k \Delta t}$, gdzie Δt oznacza czas próbowania sygnału, wyznacza się największy dodatni wykładnik Lapunowa. Jednak w praktyce określa się go najczęściej poprzez dopasowanie metodą najmniejszych kwadratów linii prostej do nachylenia średniej krzywej rozbieżności zdefiniowanej w następujący sposób:

$$y(t_k) = \langle \ln d_i(t_k) \rangle_i \,, \tag{4.6}$$

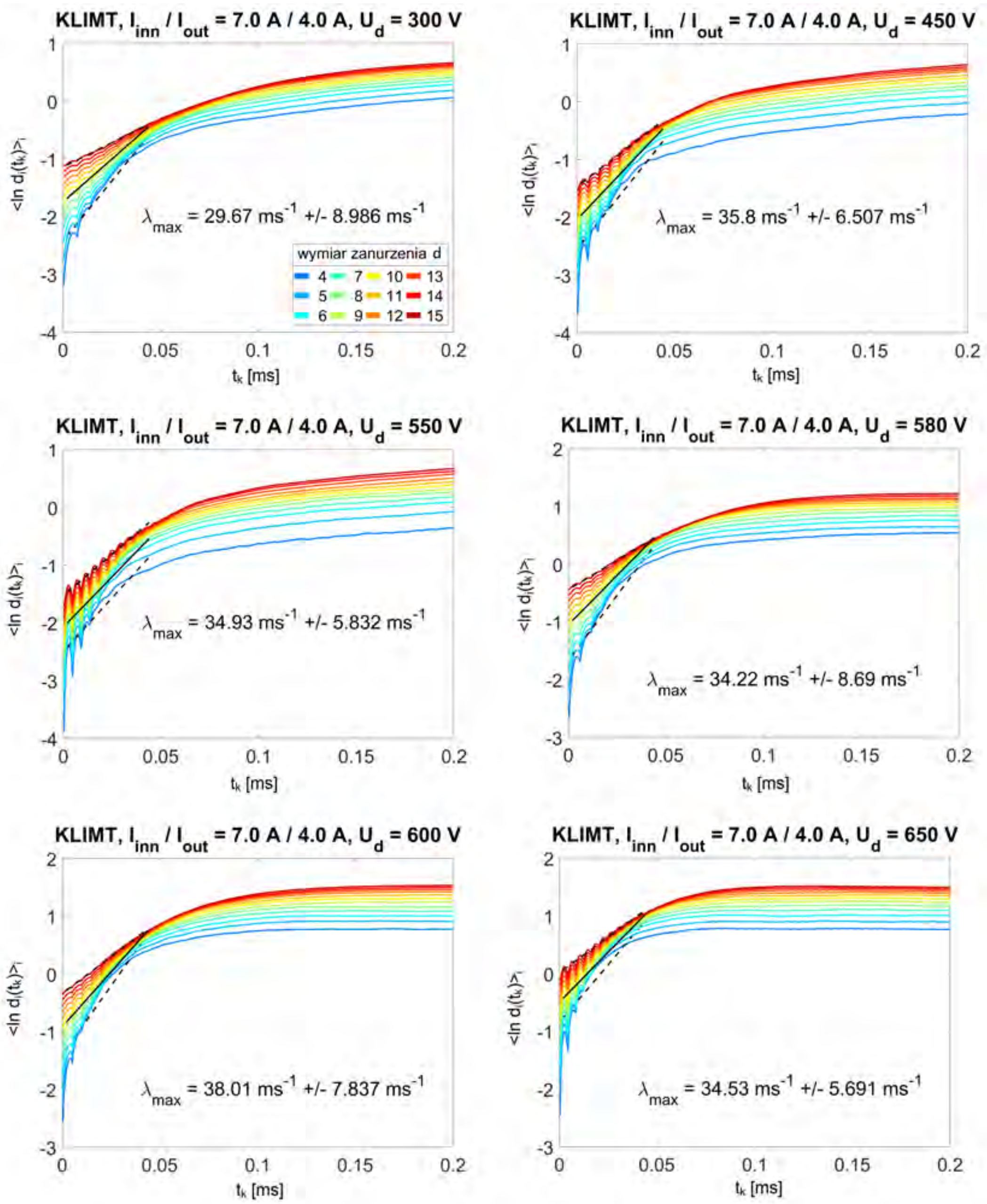
gdzie $\langle . \rangle$ oznacza średnią ze wszystkich wartości $i = 1, \ldots, N$. To końcowe uśrednienie pozwala na oszacowanie λ_{max} nawet dla krótkich i zaszumionych serii czasowych. W przypadku danych eksperymentalnych przyjęto liczbę punktów N równą 5000.

Niestety powyższa procedura stwarza pewne problemy w interpretacji wyniku – z równania 4.6 wynika, że wykładnik może przyjmować tylko wartości dodatnie [237]. Istnieje jednak wyjście z tego impasu: jeśli badany sygnał jest chaotyczny nachylenie $\langle \ln d_i(t_k) \rangle_i$ pozostanie niezależne od wymiaru zanurzenia. Wskazane jest zatem obliczenie największego wykładnika Lapunowa dla różnych wartości d. Podczas zawartej tutaj analizy przyjęto zakres $4 \leq d \leq 15$.

Ponieważ funkcja $\langle \ln d_i(t_k) \rangle_i$ ulega przegięciu dla wyższych wartości t_k, na skutek zaniku korelacji sygnału dla dużych opóźnień, wykładnik Lapunowa powinien być obliczany tylko dla części liniowej opisującej wzrastającą odległość orbit. Zatem jeśli funkcje będą wykazywały liniowy wzrost z identycznym nachyleniem dla wszystkich wartości wymiaru zanurzenia d większych niż wartość progowa (wynosząca w przypadku danych eksperymentalnych 4), takie nachylenie można przyjąć jako oszacowanie maksymalnego wykładnika Lapunowa [100].

Szacowanie największego wykładnika Lapunowa dla eksperymentalnych szeregów czasowych jest szczególnie trudne, ze względu na ograniczone próbkowanie danego sygnału pod względem rozdzielczości czasowej, niepewności pomiarowe i szum statystyczny [193, 229]. W szczególności fluktuacje w szeregach czasowych wywołane szumem utrudniają jednoznaczną identyfikację nachylenia liniowego $\langle \ln d_i(t_k) \rangle_i$ jako funkcji czasu t_k w badanym zakresie. Zastosowanie algorytmu redukcji szumów staje się zatem niezbędne dla prawidłowego oszacowania λ_{max}. Mimo tego wciąż wskazana jest ostrożność przy wyznaczaniu największego wykładnika Lapunowa, co było dyskutowane w pracach Baillie i inn. [9] oraz Glass [88]. Biorąc pod uwagę ograniczoną efektywność metody oczyszczania sygnału z szumu, nie można wykluczyć błędnego wyznaczenia wartości λ_{max} w analizowanych przebiegach prądowych. Testy wpływu szumu na wyznaczenie największego wykładnika Lapunowa zostały przeprowadzone dla układu Lorenza i przedstawione w Dodatku C.

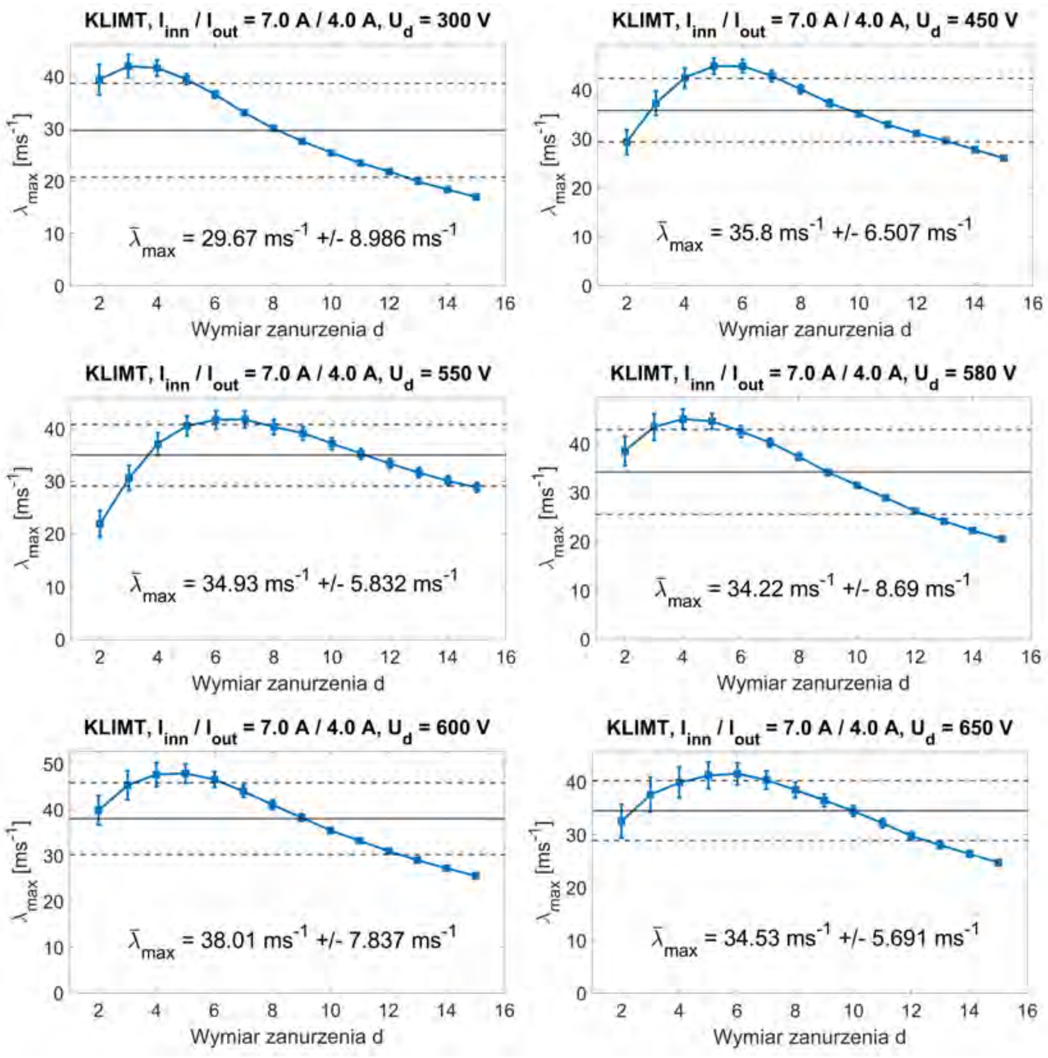
Rysunek 4.38 przedstawia przykłady dopasowań prostych do krzywych $\langle \ln d_i(t_k) \rangle_i$ w zakresie ich liniowego wzrostu dla pomiarów prądu wyładowania I_d. Jak widać, szum obecny w przebiegach prądowych nawet po zastosowaniu metody oczyszczania danych Sauera powoduje fluktuacje badanych krzywych w zakresie niewielkich opóźnień, a obszar liniowy funkcji rozbieżności trajektorii $\langle \ln d_i(t_k) \rangle_i$ jest mniej wyraźny niż w przypadku nie-



Rysunek 4.38: Przykładowe funkcje rozbieżności trajektorii $\langle \ln d_i(t_k) \rangle_i$ dla wymiarów zanurzenia z zakresu $4 \leq d \leq 15$ dla danych I_d. Czarna ciągła linia przedstawia uśrednioną wartość dopasowania prostej do funkcji rozbieżności trajektorii, a linie przerywane dopasowania prostych dla $d = 4$ i $d = 15$, w przedziale $0.004 \leq t_k \leq 0.044$.

zaburzonego szumem atraktora Lorenza (patrz Rysunek C.1 z Dodatku C), co prowadzi do większej niepewności oszacowania λ_{max}.

Na Rysunku 4.39 zaprezentowano oszacowane wartości λ_{max} w funkcji wymiaru d wraz z odchyleniem standardowym dla przedziału $4 \leq d \leq 15$, odpowiadające przykładom



Rysunek 4.39: Zależność $\lambda_{max}(d)$ dla wyników zareprezentowanych na Rysunku 4.38.

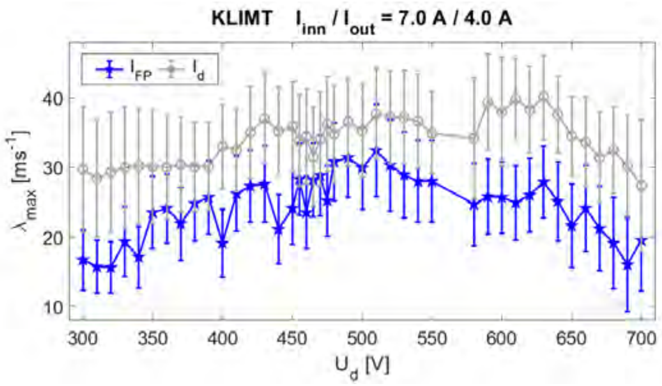
pokazanym na Rysunku 4.38. Wyniki te wraz z wynikami dotyczącymi prądu jonowego zostały również zebrane w tabeli 4.3.

Znaczące fluktuacje sygnału, pomimo zastosowania procedury redukcji szumu, mogą budzić wątpliwości co do wiarygodności oszacowania λ_{max}. Tym niemniej obecność obszaru liniowego w krzywych dopasowania $\langle \ln d_i(t_k) \rangle_i$ dla krótkich skal czasowych, który pozostaje względnie stabilny wraz ze wzrostem wymiaru zanurzenia (co nie występuje dla typowych sygnałów quasi-okresowych lub modelu L-V – patrz Rysunek C.3 z Dodatku C), w połączeniu z istnieniem atraktora o niecałkowitym wymiarze korelacyjnym, wskazują na występowanie niskowymiarowego deterministycznego chaosu w badanym układzie.

Rysunek 4.40 przedstawia zbiorcze wyniki oszacowań maksymalnego wykładnika Lapunowa w funkcji parametru kontrolnego, czyli napięcia wyładowania. Wartości λ_{max} mieszczą się w zakresie 15 - 30 ms^{-1} dla prądu jonowego oraz w zakresie 30 – 40 ms^{-1} dla

FP	300 V	450 V	550 V	580 V	600 V	650 V
λ_{max}	16.66 ± 4.35	24.15 ± 5.18	27.98 ± 5.84	24.66 ± 5.93	25.72 ± 5.14	21.58 ± 5.96
$I_d\ [FP]$	300 V	450 V	550 V	580 V	600 V	650 V
λ_{max}	29.67 ± 8.99	35.8 ± 6.51	34.93 ± 5.83	34.22 ± 8.69	38.01 ± 7.84	34.53 ± 5.69

Tabela 4.3: Oszacowania największego wykładnika Lapunowa podane w jednostkach ms^{-1} dla wybranych napięć w przypadku danych prądu jonowego zebranego sondą FP oraz mierzonego równocześnie prądu wyładowania.



Rysunek 4.40: Wyniki oszacowań największego wykładnika Lapunowa λ_{max} w funkcji napiącia wyładowania U_d dla prądu wyładowania I_d i prądu jonowego I_{FP}.

prądu wyładowania. Nie jest jasne, czy tę różnicę można wytłumaczyć wyższym poziomem szumu w sygnale pochodzącym z sond (na układzie Lorenza w Dodatku C pokazano, że szum zmniejsza wartość λ_{max}), czy też faktem, że sondy zawierają tylko wkład jonowy plazmy, w przeciwieństwie do napięcia wyładowania. Jednakże, ponieważ wartości λ_{max} są znacząco większe od zera można wnioskować, że system jest wysoce nieprzewidywalny.

Testy przeprowadzone dla układu Lorenza, których wyniki przedstawiono w Dodatku C, wykazały, że obecność szumu może zmniejszyć szacowaną wartość λ_{max} o około 20 %. Dlatego oczekiwany zakres λ_{max} w przypadku danych eksperymentalnych mógłby również wzrosnąć. Gdyby zastosować poprawkę tego rzędu do wyników uzyskanych dla przebiegów prądowych, odpowiedni czas przewidywania mieściłby się w zakresie $\tau = 1/\lambda_{max} \approx 20$ – 50 μs, czyli byłby porównywalny z okresem pojedynczej oscylacji BM.

Można zauważyć, że λ_{max} zmienia się wraz z napięciem wyładowania, zgodnie z tym samym trendem, co częstotliwość podstawowa trybu oddechowego f_{BM} (Rysunek 4.13). Zmniejszająca się wartość λ_{max} dla U_d powyżej 600 V jest również zgodna ze zmniejszającą się wartością podstawowego piku BM w PSD. Zatem λ_{max} wydaje się być związana z f_{BM} zarówno w przypadku prądu wyładowania jak i prądu jonowego, co by świadczyło o tym że przewidywalność układu zanika po wystąpieniu pojedynczej oscylacji BM.

4.4 Analiza wykresów rekurencyjnych

By uzyskać lepszy wgląd w dynamikę przebiegów prądowych wykorzystano jedno z głównych narzędzi graficznych służących do analizy szeregów czasowych tzw. wykres rekurencyjny RP. Do konstrukcji diagramu użyto 1 ms odcinki czasu próbkowane z częstotliwością 2.5 MHz (tzn. 5 tysięcy punktów pomiarowych), które nie zawierały przełączeń między trybami działania silnika. Te same opóźnienia τ, które posłużyły do rekonstrukcji atraktorów (rozdział 4.3.3) zostały użyte przy konstrukcji wykresów rekurencyjnych. Minimalny wymiar zanurzenia, który pozwala na rekonstrukcję cech atraktora, określony został przy użyciu metody opartej na identyfikacji fałszywych najbliższych sąsiadów FNN (podrozdział 2.2.3) [123].

Warunek identyfikacji dwóch punktów przestrzeni fazowej $I(t_i)$ i $I(t_j)$ jako sąsiadów (oznaczonych w RP przy pomocy kropki) został wybrany przez określenie promienia sąsiedztwa [1]:

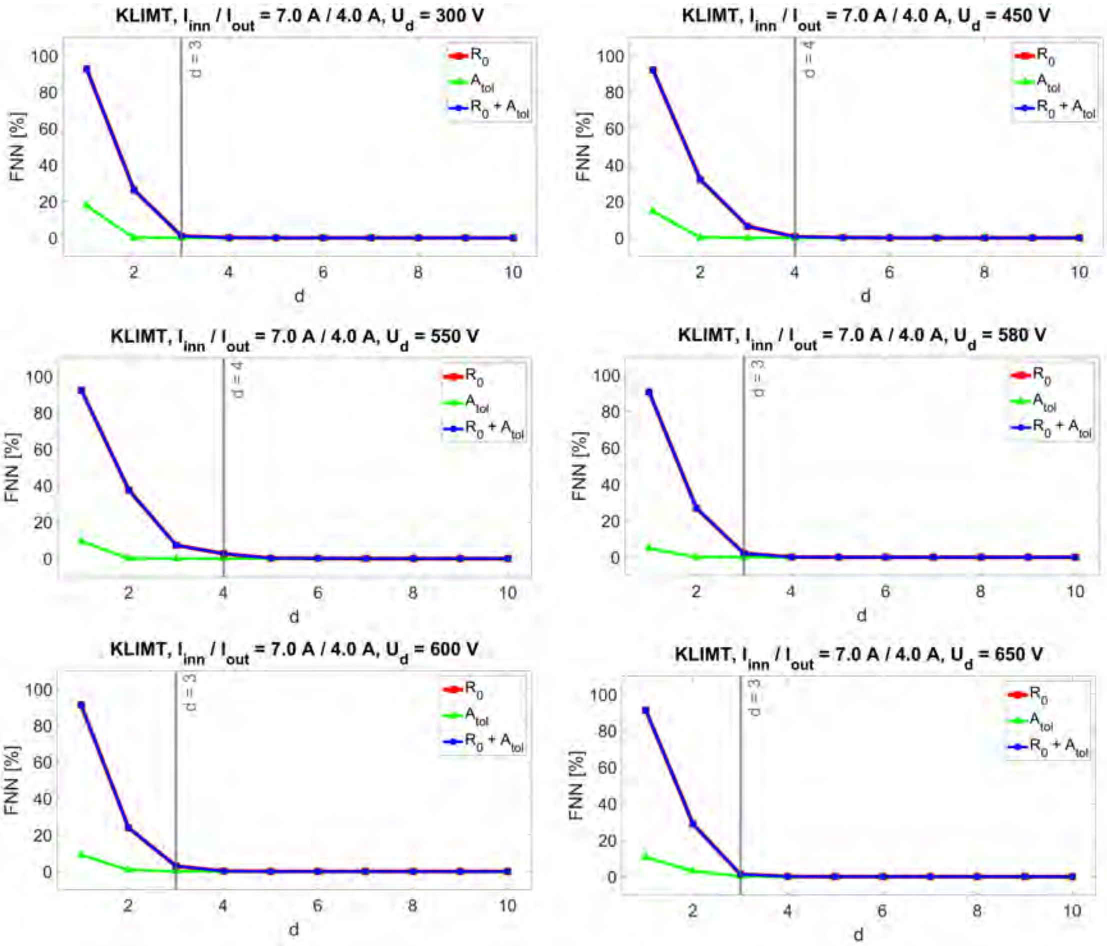
$$R = \epsilon L_{śr}, \tag{4.7}$$

gdzie ϵ to wielkość progu, a $L_{śr}$ średnica atraktora w przestrzeni zanurzenia o wymiarze d.

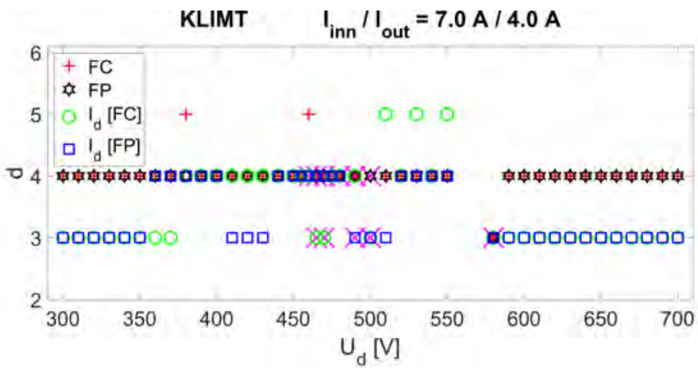
W podrozdziale 2.2.7 przedstawiono dyskusję na temat poprawnego doboru progu ϵ. Ponieważ sugeruje się wziąć nie więcej niż 10% średniej lub maksymalnej średnicy przestrzeni fazowej zajmowanej przez dany układ tak, aby stopień rekurencji RR sięgał kilku procent [137, 241, 253], w badaniach opisanych w tym rozdziale za ϵ przyjęto wartość 0.1, która pozwala na uzyskanie wystarczających statystyk na RP [1]. Ponieważ wysoki poziom szumu w układzie zniekształca każdą strukturę na diagramie, należy czasem wybrać większy próg [163]. Tak też postępiono podczas analizy przedstawionej w artykule [123], gdzie badano prąd jonowy zebrany przez sondę FP bez zastosowania algorytmu oczyszczania danych. Przyjęto wtedy $\epsilon = 0.2$.

Wybór wymiaru zanurzenia W celu znalezienia odpowiedniego wymiaru zanurzenia posłużono się metodą fałszywych najbliższych sąsiadów FNN opisaną w podrozdziale 2.2.3. Do analizy użyto 10 ms sygnał próbkowany z częstotliwością 10 MHz (5000 punktów pomiarowych). Na Rysunku 4.41 zostały przedstawione przykładowe wyniki użycia tej metody.

Na Rysunku 4.42 przedstawiono wynik zbiorczy wyznaczenia wymiaru zanurzenia d. Wartości tego wymiaru w funkcji napięcia U_d dla obu sond są niemal zawsze ze sobą zgodne. Natomiast wymiar wyznaczony dla prądu wyładowania jest równy lub niższy od wymiaru dla prądu jonowego. Różnica występuje głównie dla bardzo niskich napięć ($U_d \leq 350\ V$) jak i napięć wysokich ($U_d \geq 590\ V$), gdzie wymiar zanurzenia dla prądu wyładowania wynosił zawsze 3, a wymiar zanurzenia dla prądu jonowego 4. W związku z powyższym podczas tworzenia wykresów rekurencyjnych jako wymiar zanurzenia została wybrana liczba 4, co przy oszacowanej wartości wymiaru fraktalnego $D_G \leq 1.4$ pozostaje również zgodne z warunkiem Takensa (nierówność 2.6). Co ciekawe, wystąpienie przełączeń między trybami działania silnika w sygnałach poddanych analizie powodowało czasami obniżenie wymiaru zanurzenia.



Rysunek 4.41: Wyniki wyznaczania wymiaru zanurzenia metodą FNN w przypadku prądu wyładowania I_d mierzonego równocześnie z sondą FP. Linia czerwona i niebieska uległy nałożeniu.



Rysunek 4.42: Wynik zbiorczy wyznaczenia wymiaru zanurzenia metodą FNN. Różowe ukośne krzyżyki oznaczają sytuacje, w których do szacowania wymiaru zanurzenia został wzięty wycinek danych, w którym pojawiały się dwa mody pracy silnika.

4.4.1 Interpretacja wizualna

Jak opisano w rozdziale 2.2.7, charakterystyczne wzorce pojawiające się na diagramie RP często można wykorzystać do klasyfikacji procesów dynamicznych. Na przykład wzór wyróżniający układy okresowe stanowi zestaw odcinków równoległych do przekątnej $i = j$ (odcinki są tutaj rozumiane jako struktury utworzone z pobliskich punktów, których ciągi są liczniejsze do 1). W przypadku szumu na RP pojawiają się losowo rozrzucone punkty. Natomiast dla układów o bardziej złożonej dynamice (w tym układów chaotycznych) pojawiają się określone struktury [123].

Pojawienie się na diagramie ukośnych odcinków równoległych do przekątnej $i = j$ oznacza, że w różnych epokach ewolucja stanów jest podobna i proces może być deterministyczny. Co ważniejsze, jeśli te ukośne odcinki występują obok pojedynczych izolowanych punktów, proces może być chaotyczny. Dodatkowo jeśli te ukośne odcinki są rozłożone na wykresie w regularnych odstępach, pradwopodobnie ma się do czynienia z niestabilnymi orbitami okresowymi [163].

Na Rysunkach 4.43 – 4.48 przedstawiono wykresy rekurencyjne dotyczące pomiarów z Tabeli 4.1. Dla przypadku $U_d = 450\ V$ oddzielnie zaprezentowane zostały RP odpowiadające dwóm różnym modom działania silnika. Na żadnym z wykresów nie występowały odcinki, które byłyby prostopadłe do głównej diagonali, co potwierdza, że wymiar zanurzenia został dobrany poprawnie [163]. Powstałe struktury rozkładają się na wykresach mniej więcej równomiernie, co świadczy o stacjonarności badanego procesu. Zanikanie punktów w lewym górnym i prawym dolnym rogu wykresu oznaczałoby, że dane zawierają trend lub dryf i proces jest niestacjonarny [163].

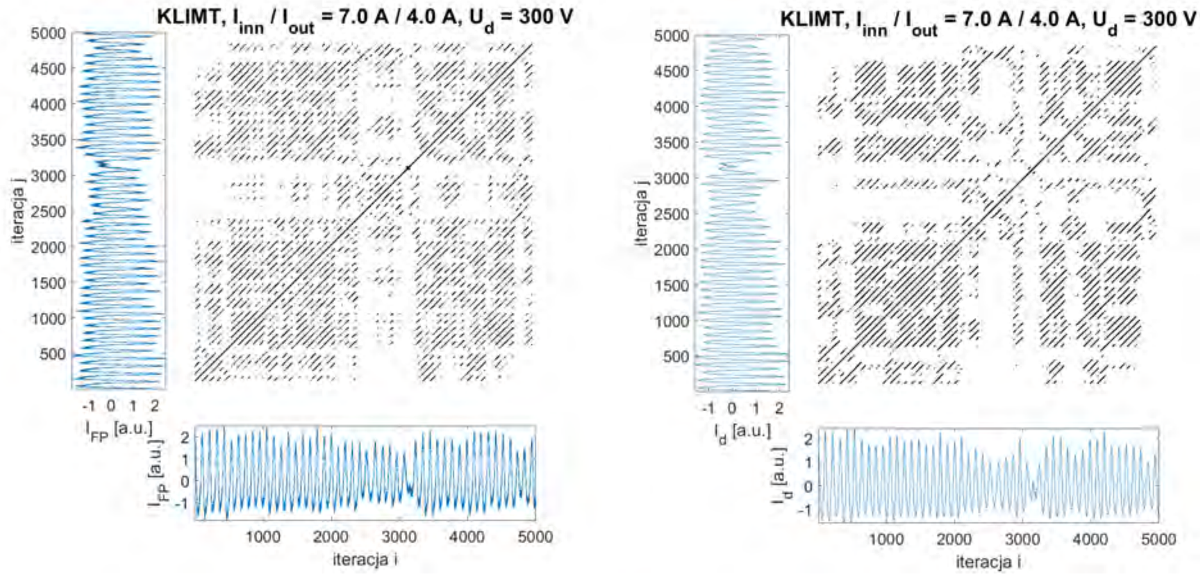
Na wszystkich zaprezentowanych rysunkach diagramy RP dla prądu wyładowania zostały zsynchronizowane z diagramami dla prądu jonowego przy pomocy korelacji wzajemnej:

$$CC(\tau_C) = \frac{1}{N - \tau_C} \sum_{k=1}^{N-\tau_C} I_d(k + \tau_C) I_{FP}(k), \tag{4.8}$$

gdzie τ_C jest opóźnieniem czasowym pomiędzy sygnałem prądu wyładowania I_d a sygnałem jonowym I_{FP}. Synchronizację dwóch sygnałów otrzymano poprzez wyznaczenie maksymalnej wartości powyższej funkcji.

Diagramy RP dla $U_d = 300\ V$ prezentują równo oddalone od siebie odcinki równoległe do przekątnej $i = j$, zatem wzory wydają się wskazywać na proces okresowy. Pojawiają się też tutaj dość regularne zaburzenia rozkładu punktów, co manifestuje się pojawieniem jaśniejszych i ciemniejszych obszarów [123].

Na diagramach RP pewne podobieństwo zachowań prądu jonowego i prądu wyładowania jest zauważalne. Powstałe wzory różnią się jednak znacznie w przypadku modu lokalnego przy 450 V, gdzie dla prądu wyładowania nie obserwuje się tak wyraźnych zagęszczeń na RP przy tym napięciu. W przypadku modu globalnego można zauważyć, że okresowość sygnału jest często przerywana, a utrata stabilności tworzy regularną mapę o niewielkich wahaniach gęstości punktów. Białe obszary (obszary pozbawione punktów, w których nie ma przewidywalności) są dość dobrze określone (czyli tworzą oddzielne struktury) na pasach poziomych i pionowych. Natomiast biorąc pod uwagę obszar nisko-



Rysunek 4.43: Wykres rekurencyjny dla prądu jonowego zebranego sondą FP (po lewej) oraz zsynchronizowany z nim przy pomocy wzoru 4.8 wykres prądu wyładowania (po prawej) dla napięcia $U_d = 300\ V$.

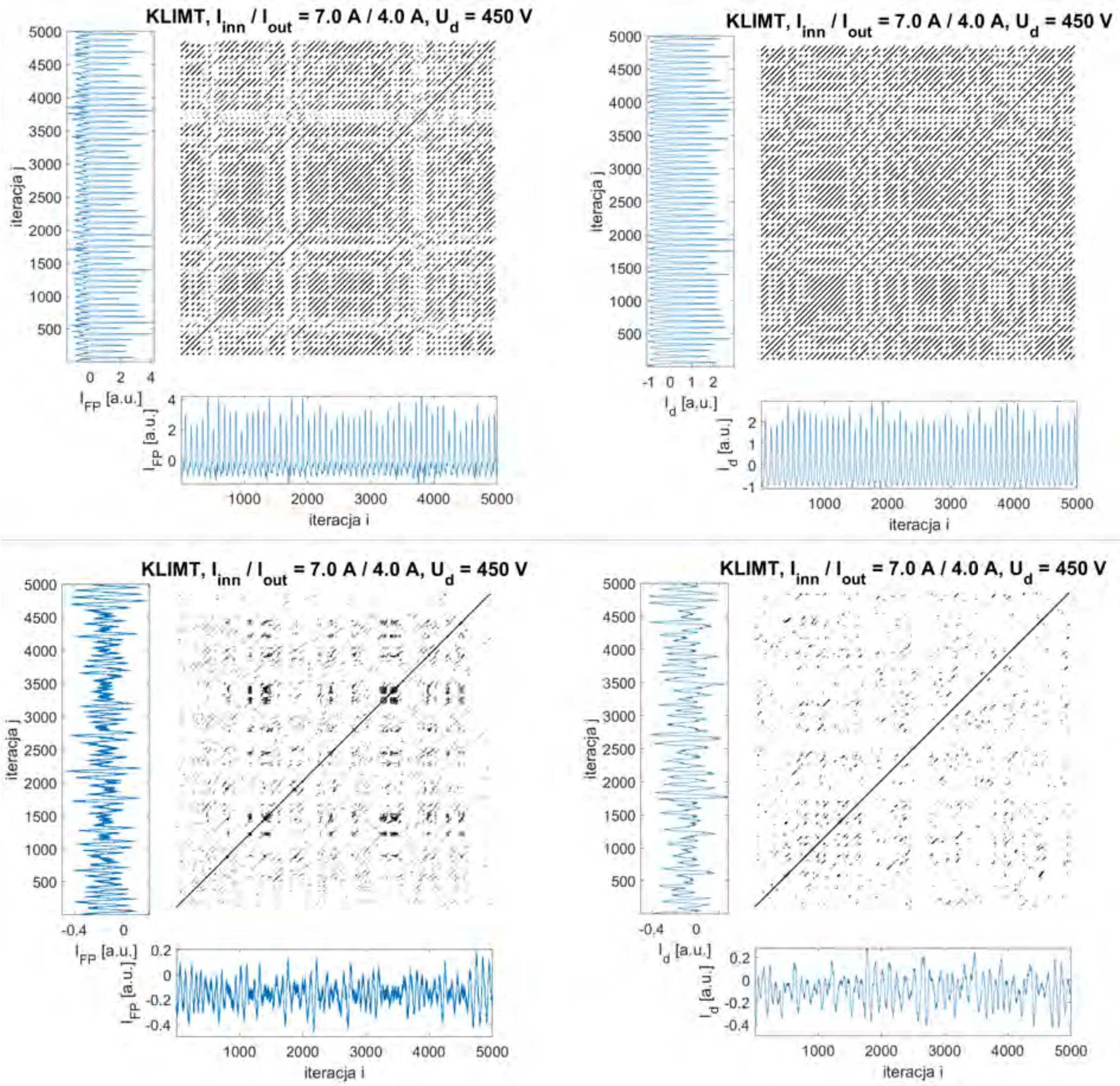
amplitudowy (mod lokalny) nie obserwuje się długich odcinków diagonalnych. Na RP dla prądu jonowego pojawiają się natomiast pewne preferowane zagęszczone obszary, czego nie obserwuje się w prądzie wyładowania.

Wzory na RP dla $U_d = 550\ V$ są podobne do tych, które występują dla modu globalnego dla $450\ V$, z tą różnicą, że dla $550\ V$ układ punktów wskazuje na mniej zaburzone oscylacje harmoniczne. Odcinki równoległe do przekątnej $i = j$ są wyraźnie widoczne, świadcząc o cykliczności badanego procesu. Ukośne odcinki odpowiadające stanowi laminarnemu są przełamane białymi pionowymi i poziomymi pasami, wykazując na bardzo regularną utratę przewidywalności [123]. Białe pasy pojawiają się wtedy, gdy układ przechodzi między oscylacjami o różnym zakresie wartości amplitudy sygnału.

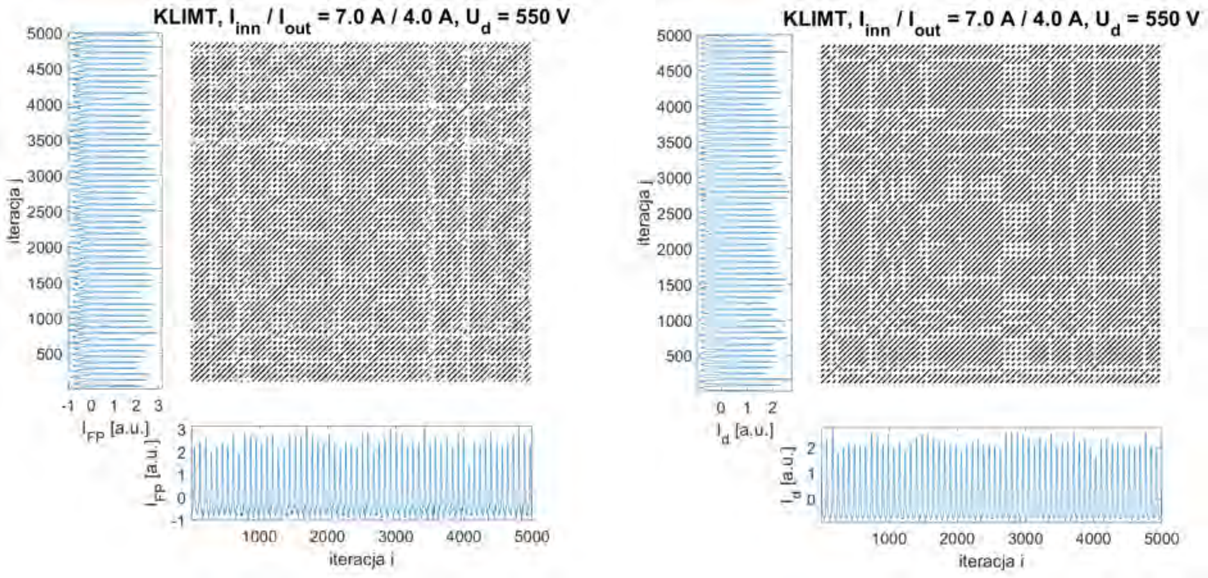
Przy napięciach $U_d = 600\ V$ i $U_d = 650\ V$ metoda RP generuje znacznie mniejszą liczbę punktów, ale obserwuje się pojawienie pewnych regularnych zachowań. Punkty znów kumulują się w pewnych miejscach wykresu (podobnie jak w przypadku modu lokalnego).

Diagram bifurkacyjny ujawnił drastyczne przejście między reżimami oscylacyjnymi o dużej i małej amplitudzie przy zmianie napięcia wyładowania z $550\ V$ do $580\ V$ (Rysunki 4.6 – 4.8 a)). Wykresy RP w podobny sposób dla tego przejścia pokazują jakościową zmianę z okresowego (lub quasi-okresowego) reżimu oscylacyjnego do znacznie bardziej turbulentnej dynamiki objawiającej się oscylacjami o zmiennej amplitudzie i częstotliwości.

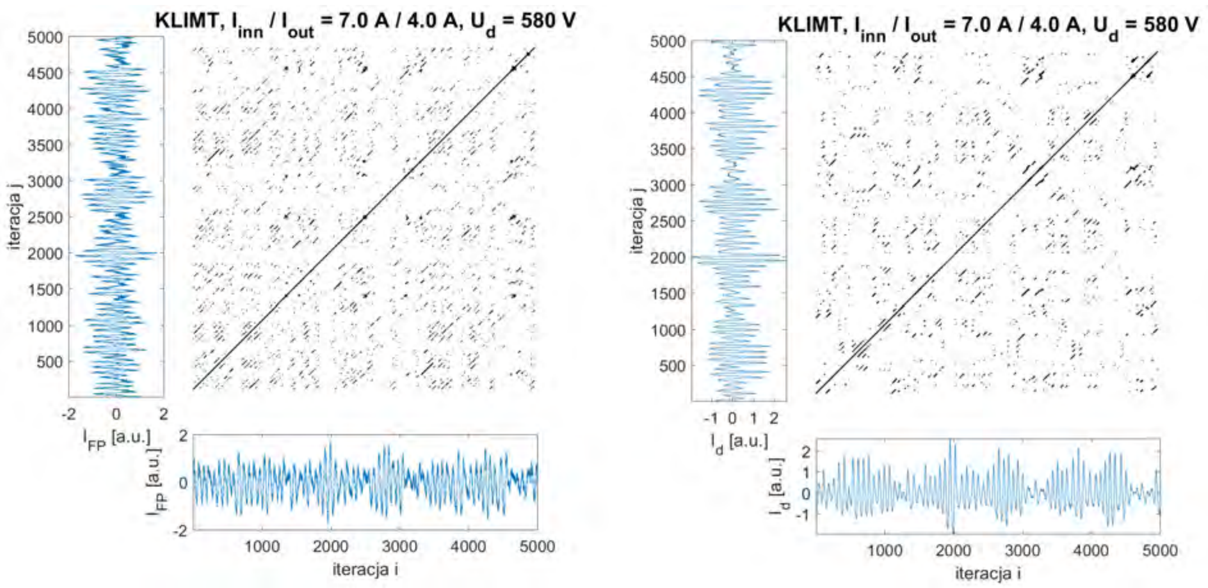
Na wszystkich utworzonych diagramach RP dotyczących przebiegów prądowych dominują odcinki diagonalne. Struktury dla niskich napięć ($U_d \leq 550\ V$) przypominają struktury RP dla wzbudzanego modelu Lotki–Volterry dla wartości ω, przy których występował



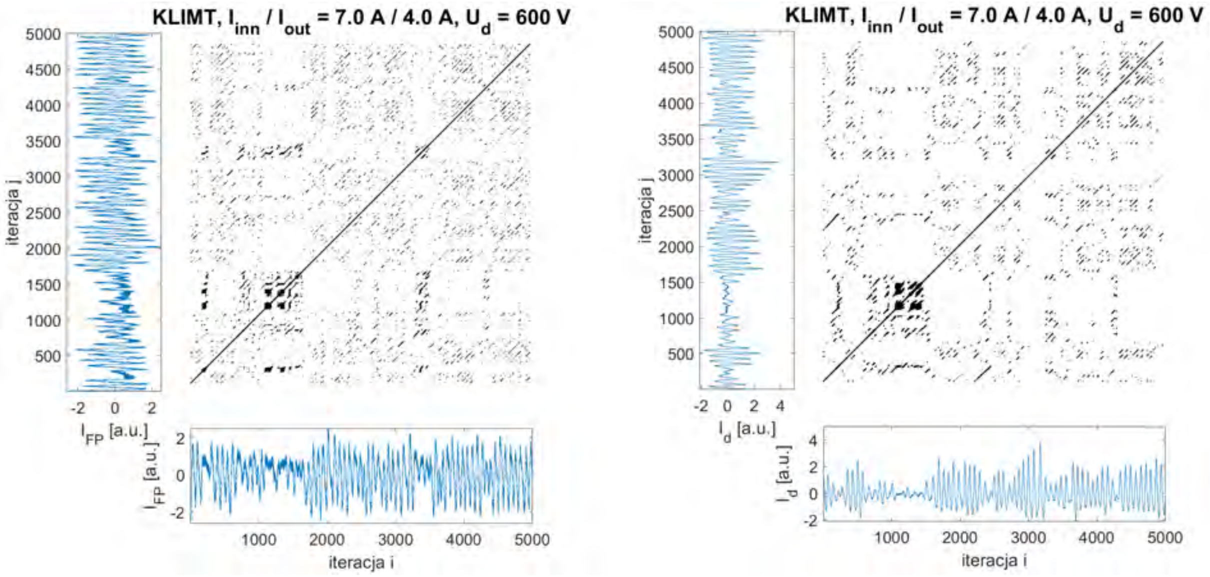
Rysunek 4.44: Wykresy rekurencyjne dla prądu jonowego zebranego sondą FP (po lewej) oraz zsynchronizowane z nimi przy pomocy wzoru 4.8 wykresy prądu wyładowania (po prawej) dla napięcia $U_d = 450\ V$. Górny panel odpowiada trybowi globalnemu, a dolny lokalnemu.



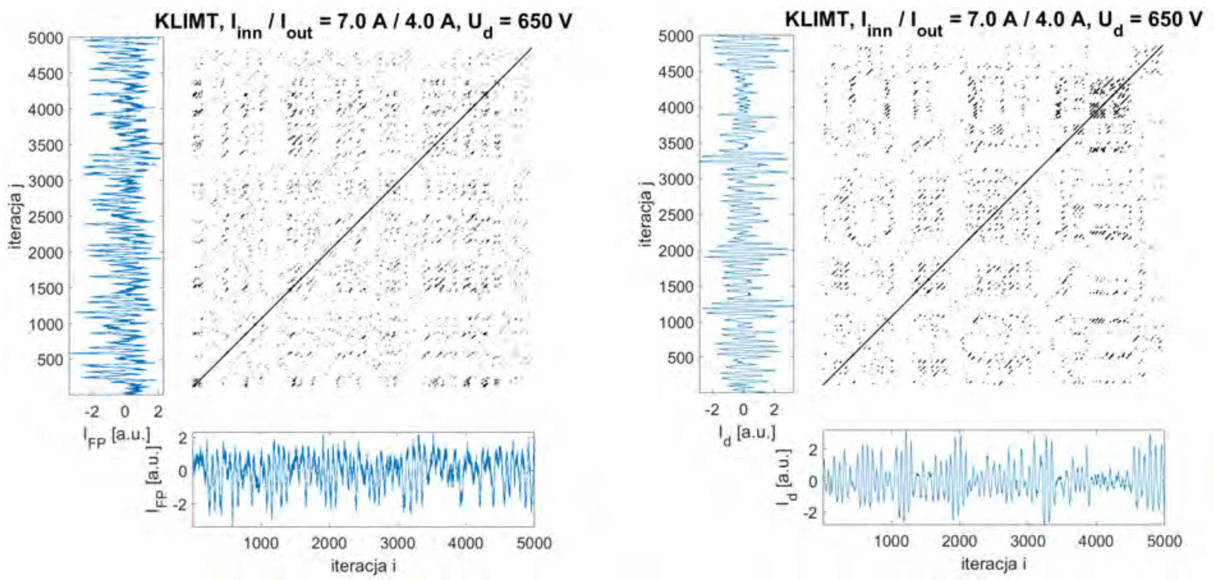
Rysunek 4.45: Wykres rekurencyjny dla prądu jonowego zebranego sondą FP (po lewej) oraz zsynchronizowany z nim przy pomocy wzoru 4.8 wykres prądu wyładowania (po prawej) dla napięcia $U_d = 550\ V$.



Rysunek 4.46: Wykres rekurencyjny dla prądu jonowego zebranego sondą FP (po lewej) oraz zsynchronizowany z nim przy pomocy wzoru 4.8 wykres prądu wyładowania (po prawej) dla napięcia $U_d = 580\ V$.



Rysunek 4.47: Wykres rekurencyjny dla prądu jonowego zebranego sondą FP (po lewej) oraz zsynchronizowany z nim przy pomocy wzoru 4.8 wykres prądu wyładowania (po prawej) dla napięcia $U_d = 600\ V$.



Rysunek 4.48: Wykres rekurencyjny dla prądu jonowego zebranego sondą FP (po lewej) oraz zsynchronizowany z nim przy pomocy wzoru 4.8 wykres prądu wyładowania (po prawej) dla napięcia $U_d = 650\ V$.

chaos w układzie (Rysunek 2.18), są one również podobne do wyników uzyskanych przez Marwana in. [163] dla chaotycznego układu Rosslera [194].

Kształty na RP dla atraktora Lorenza powtarzają swój wzór w różnych skalach (patrz Rysunek 2.18). W danych eksperymentalnych nieco podobną teksturę obserwuje się dla modu lokalnego i dla napięć od 580 V wzwyż, gdyż wtedy dynamika nie jest zdominowana przez podstawową oscylację trybu oddechowego.

4.4.2 Analiza ilościowa

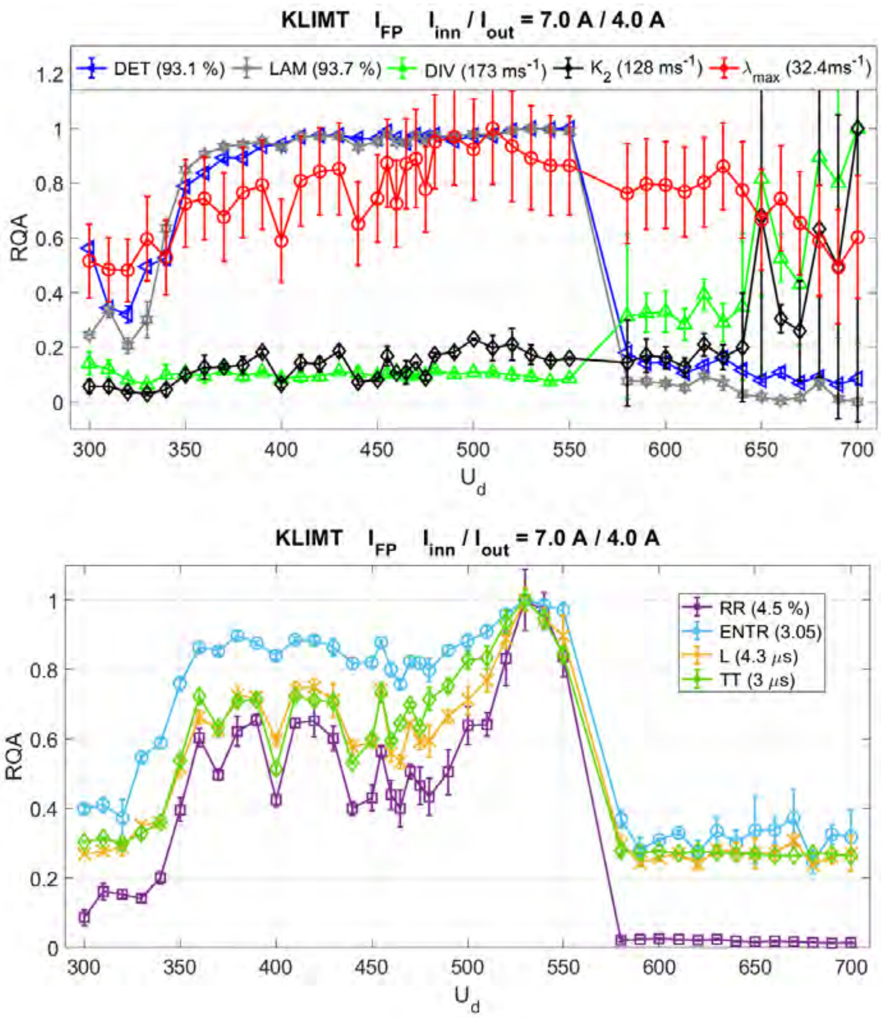
Analiza ilościowa diagramu RP została przeprowadzana przy użyciu kilku typowych wielkości opisanych w rozdziale 2.2.7. Są nimi: stopień rekurencji RR, determinizm DET, laminarność LAM, entropia Shannona $ENTR$, rozbieżność DIV, trend $TREND$, czas pułapkowania TT oraz średnia długość odcinków diagonalnych L.

Rysunki 4.49 i 4.50 przedstawiają wyniki zbiorcze analizy ilościowej wykresów rekurencyjnych (RQA) w funkcji napięcia wyładowania U_d dla sygnałów FP i prądu wyładowania. Jedynie zmienna $TREND$ nie została na nich przedstawiona, ponieważ wszystkie jej wartości były bliskie zeru, co stanowi jedynie dodatkowe potwierdzenie, że badany proces jest stacjonarny.

Współczynnik RR dla prądu wyładowania rośnie w zakresie napięć 300 $V \leq U_d \leq$ 400 V, czyli wraz ze wzrostem regularności trybu BM. Poziom RR się stabilizuje od $U_d =$ 450 V do około 490 V, a następnie wykazuje ostry wzrost z maksimum przy $U_d = 540$ V, które następuje jeszcze przed przejściem do trybu nisko-amplitudowego. Po osiągnięciu napięcia progowego liczba powtarzających się punktów znacznie maleje. Dla wszystkich zebranych sygnałów współczynnik rekurencji RR jest powiązany z amplitudą oscylacji BM, ze wzrostem stosunku sygnału do szumu oraz szybkością zmniejszania się amplitudy funkcji autokorelacji, gdzie dla niskich napięć amplituda ta szybko maleje, potem maleje wolniej, a po przekroczeniu napięcia progowego bardzo szybko zanika (rozdział 4.3.2).

Z powodu istnienia szumu wartość L_{max} (wzór 2.25) może zostać zmniejszona, ponieważ jego obecność powoduje rozdzielenie danego odcinka na kilka części. Zatem zmienna DIV, która ma powiązanie z sumą dodatnich wykładników Lapunowa, pozostaje bardzo wrażliwa na poziom szumu. Krótkie odcinki występują zwłaszcza w przypadku modu lokalnego. Ułożenie punktów na RP nie wskazuje jednak na wysoki poziom szumu - tekstura nie składa się tylko z pojedynczych izolowanych punktów jak ta, którą prezentuje biały szum z Rysunku 2.18.

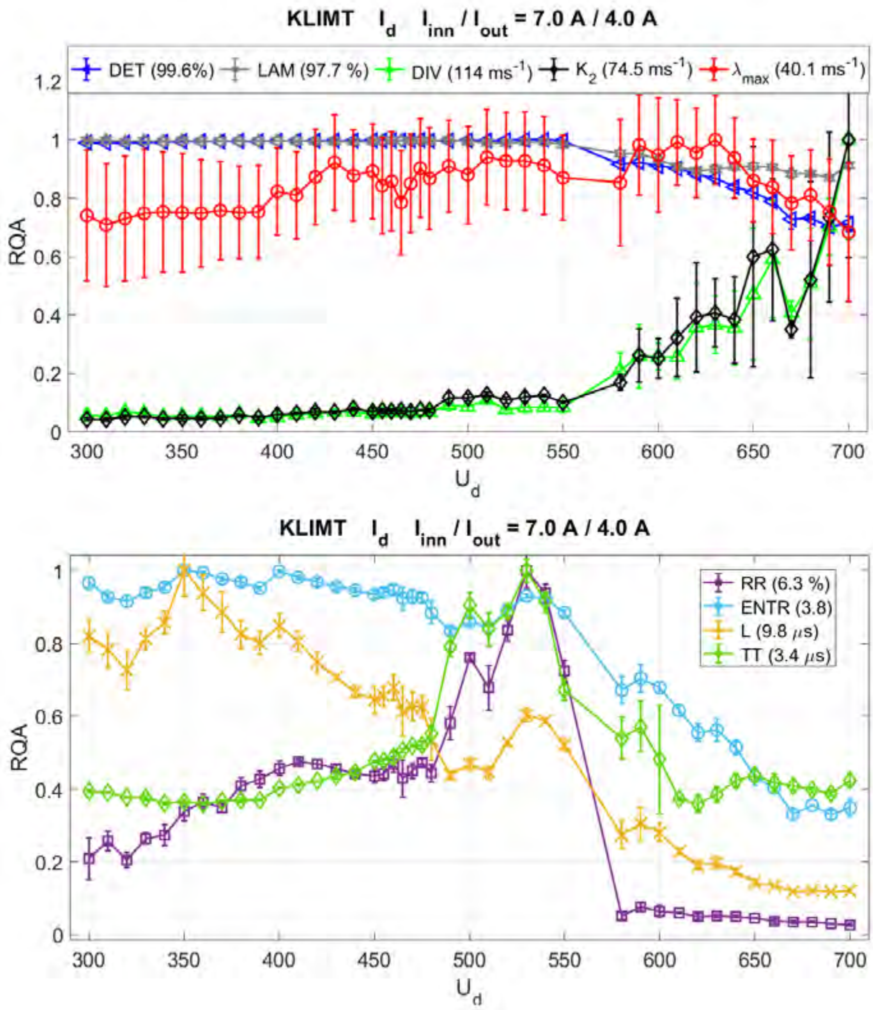
Determinizm DET mierzy proporcję powtarzających się punktów tworzących ukośne struktury liniowe i jest miarą determinizmu systemu [163]. W celu jego wyznaczenia za minimalną długość odcinka przyjęto 2 punkty (tzn. $l_{min} = 2$). W przypadku prądu wyładowania DET jest na poziomie 100 % dla napięć poniżej 550 V, gdyż w tych warunkach sygnał oscylacji jest w bardzo niewielkim stopniu zaburzony i oscyluje bardzo regularnie. Dla zakresu napięć $U_d \geq 580$ V wartość ta stopniowo maleje wraz ze wzrostem napięcia, gdyż dla wysokich napięć proces rządzący dynamiką prądu jest raczej turbulentny i losowy. W przypadku prądu jonowego początkowe wartości DET (od $U_d = 300$ V do około 350 V) są na dużo niższym poziomie wynoszacym 40 %, od 350 V do 550 V osiągają



Rysunek 4.49: Wyniki analizy ilościowej wykresów rekurencyjnych w funkcji napięcia wyładowania U_d dla prądu jonowego zebranego przez sondę FP obejmujące: determinizm DET, laminarność LAM i dywergencję DIV, entropię K_2 oraz największy wykładnik Lapunowa λ_{max} (górny wykres) oraz: stopień rekurencji RR, entropię Shannona $ENTR$, średnią długość odcinków ukośnych L, średnią długość konstrukcji pionowych TT (dolny wykres). Wszystkie uzyskane wartości zostały unormowane do zakresu 0 - 1, gdzie 1 odpowiada danej wartości maksymalnej, podanej w nawiasie w legendzie wykresu.

około 90 %, a od $U_d = 580\ V$ szybko maleją do 10 %, co oznacza, że sygnały przestają być deterministyczne.

Wartości średnich długości odcinków ukośnych L przeważnie maleją wraz ze wzrostem U_d dla prądu wyładowania i w tym przypadku nie zaobserwowano korelacji z innymi wskaźnikami. Natomiast w przypadku prądu jonowego przebieg zmian L i TT jest bardzo podobny, a pod względem trendów zmian także $ENTR$ i RR wykazują podobne zachowanie. Nie wiadomo skąd biorą się takie różnice w zachowaniu prądu jonowegi i prądu wyładowania. Maksymalna wartość L prądu jonowego jest około 2 razy mniejsza niż



Rysunek 4.50: Wyniki analizy ilościowej wykresów rekurencyjnych w funkcji napięcia wyładowania U_d dla prądu wyładowania zebranego podczas pomiarów sondą FP obejmujące: determinizm DET, laminarność LAM i dywergencję DIV, entropię K_2 oraz największy wykładnik Lapunowa λ_{max} (górny wykres) oraz: stopień rekurencji RR, entropię Shannona $ENTR$, średnią długość odcinków ukośnych L, średnią długość konstrukcji pionowych TT (dolny wykres). Wszystkie uzyskane wartości zostały unormowane do zakresu 0 - 1, gdzie 1 odpowiada danej wartości maksymalnej, podanej w nawiasie w legendzie wykresu.

w przypadku prądu wyładowania, czego można się spodziewać ze względu na większą ilość szumu występującego w szeregach czasowych prądu jonowego.

Ze wzgledu na to, że ukośne odcinki na wykresie RP w przypadku napięć, dla których występuje BM, mają szerokość większą niż 1 punkt, wartość parametru LAM jest wysoka. Za minimalną długość takiego odcinka przyjęto 2 punkty (tzn. $v_{min} = 2$). W przypadku prądu jonowego i prądu wyładowania krzywa wartości LAM zachowuje się jak krzywa DET, z tą tylko różnicą, że dla I_d wartości LAM od $U_d = 640\ V$ są nieznacznie większe.

Czas pułapkowania TT dla prądu jonowego osiąga maksymalną wartość równą 3.0

μs, a dla prądu wyładowania 3.4 μs. Oznacza to, że prąd wyładowania posiada więcej krótkoczasowych stanów laminarnych (czyli stanów stałych) ze względu na niski poziom szumu w sygnale.

Gdy sygnałowi na RP odpowiadają długie, ale przerywane odcinki, entropia $ENTR$ będzie miało dużą wartość. Dzieje się tak zwłaszcza w przypadku prądu wyładowania dla niskich napięć ($U_d \leq 550\ V$). Średnia długość odcinka ukośnego L i entropia Shannona $ENTR$ są skorelowane z innymi wielkościami takimi jak RR i TT w przypadku prądu jonowego, podczas gdy dla prądu wyładowania te korelacje są słabe. Wydaje się, że wskazuje to na pewną różnicę w charakterze (dynamice) tych różnych sygnałów na skutek obecności składowej elektronowej w prądzie wyładowania oraz odmiennym czasie przelotu jonów o różnych stopniach jonizacji od silnika do sondy co nie występuje w przypadku I_d.

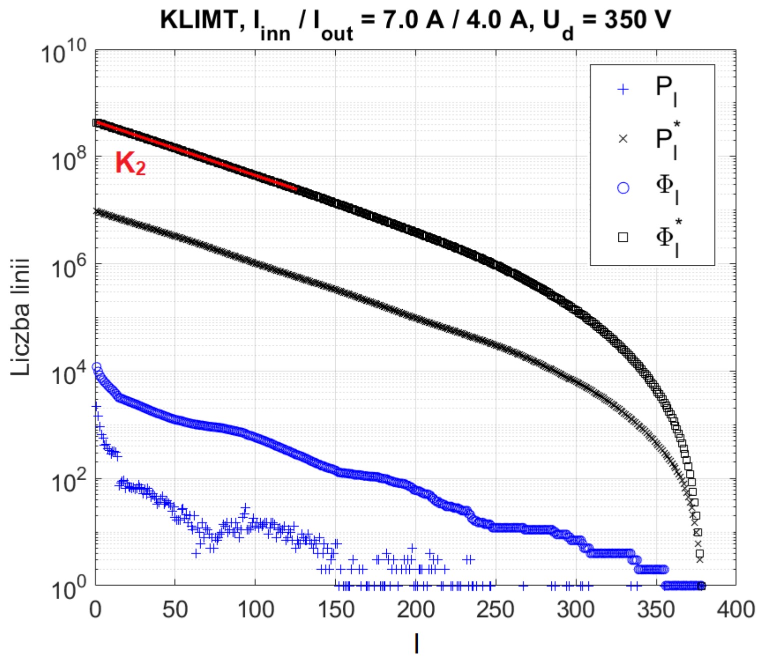
Oszacowanie entropii Kołmogorowa h_K na podstawie danych eksperymentalnych z istotną domieszką szumu nie jest łatwym zadaniem, ale użycie wykresów rekurencyjnych daje proste, wiarygodne i ilościowe oszacowanie dolnej granicy tej wartości – entropii K_2 (wzór 2.34). Z kolei entropia ta pozwala szacować dolną granicę wartości λ_{max} [163, 240]. (Z tego powodu obliczone wartości największego wykładnika Lapunowa również zostały umieszczone na wykresach parametrów RQA.) Wartości K_2 mogą być mocno przeszacowane w obecności szumu, ponieważ statystyczne fluktuacje prowadzą do częstego przerywania ukośnych odcinków na RP, co zmniejsza nachylenie ich rozkładu. Można to zauważyć na wykresach RQA, gdzie K_2 oraz DIV chociaż mają ogólnie podobny trend w funkcji napięcia wyładowania, wydają się bardziej wrażliwe na zakłócenia niż pozostałe wskaźniki RQA. Zgodnie z oczekiwaniami entropia K_2 pozostawła równa lub leżała poniżej szacowanych wartości λ_{max}, za wyjątkiem napięć U_d powyżej 550 V (tryb lokalny), w których wpływ szumu mógł być bardziej znaczący.

Na Rysunku 4.51 przedstawiono rozkład długości odcinków ukośnych P_l, rozkład długości odcinków ukośnych z nakładaniem się[1] P_l^*, jak i rozkład Φ_l będący skumulowanym[2] rozkładem długości odcinków ukośnych powstałym na podstawie P_l dla przykładowego przebiegu prądu wyładowania. Ostatni zaprezentowany rozkład – Φ_l^* jest skumulowanym rozkładem długości odcinków ukośnych stworzonym na podstawie P_l^*. Przekątna wykresu RP nie była uwzględniona w powyższych rozkładach. Entropia K_2 została wyznaczona na podstawie dopasowania prostej do liniowej części rozkładu Φ_l^*.

Podsumowując wyniki analizy RQA dla prądu jonowego można stwierdzić, że parametry zmieniały się w trzech głównych grupach napięć: pierwszy region (300 $V \leq U_d \leq$ 350 V) charakteryzuje się niskimi wartościami parametrów DET, LAM, RR, TT, L i $ENTR$, jak i niższą wartością λ_{max}, region drugi (350 $V \leq U_d \leq$ 550 V) charakteryzuje się znacznie wyższymi wartościami tych parametrów. Natomiast w strefie trzeciej (580 $V \leq U_d \leq$ 700 V) następuje stabilizacja wartości wskaźników na znacznie niższym poziomie (tylko wartości λ_{max} nie odnotowują spadku). Można zauważyć, że charaktery-

[1] Nakładanie się oznacza na przykład, że odcinek ukośny o długości 4 będzie liczony jako jeden odcinek o długości 4, dwa odcinki o długości 3, trzy odcinki o długości 2 i cztery odcinki o długości 1.

[2] Skumulowanie oznacza, że zamiast odcinków o konkretnej długości jest brana pod uwagę liczba odcinków o co najmniej tej długości.



Rysunek 4.51: Rozkłady długości odcinków ukośnych: P_l, P_l^*, Φ_l i Φ_l^* dla prądu wyładowania.

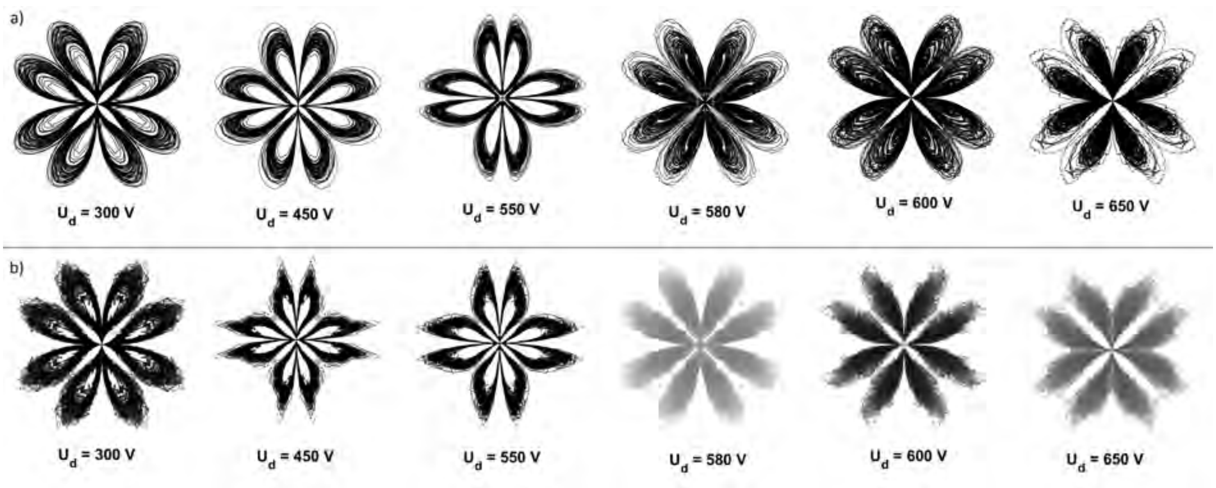
styczna zmienność sygnału jest silnie skorelowana z natężeniem harmonicznych BM, co zaobserwowano w PSD (Rysunek 4.13).

W przypadku prądu wyładowania dane reprezentują proces deterministyczny dla całego zakresu badanego napięcia wyładowania. W przeciwieństwie do prądu jonowego wskaźniki RR, L i $ENTR$ nie są ze sobą skorelowane. Krzywa zmian parametru RR odpowiadającego za ilość punktów na wykresie i krzywa zmian parametru TT odpowiadającego za średnią długość odcinka pionowego mają podobny przebieg jak w przypadku prądu jonowego, co pozostaje zgodne z analizą wizualną diagramów RP.

4.5 Symetryzowany wzór kropkowy

Tak jak to zostało przedstawione w rozdziale 2.2.8, metoda symetryzowanego wzoru kropkowego SDP jest jakościową metodą wizualizacji funkcji korelacji w szeregach czasowych, ale pozwala również na wyznaczenie poziomu entropii informacyjnej Shannona. By ułatwić interpretację sposobu zachowywania się badanego układu, dane są odwzorywowane w sposób, który sztucznie indukuje symetrię. Poniżej zostały zaprezentowane wyniki zastosowania tej metody do danych pomiarowych dla silnika KLIMT dla stosunku prądów w cewkach I_{inn}/I_{out} równego 7.0 A do 4.0 A (pomiary 2 - 43).

Do konstrukcji wszystkich wykresów SDP umieszczonych w tym rozdziale wzięto pod uwagę pierwsze 100 tys. punktów pomiarowych (co stanowiło 1 / 10 sygnału o długości 20 ms). Za kąt ζ odpowiadający przyrostowi wykresu przyjęta została wartość $\pi/4$, a liczba linii odniesienia m określająca liczbę odbijających płaszczyzn została ustawiona na 4.



Rysunek 4.52: Wykresy SDP dla: a) oczyszczonych i b) surowych danych prądu wyładowania I_d zebranych podczas pomiaru sondą FC.

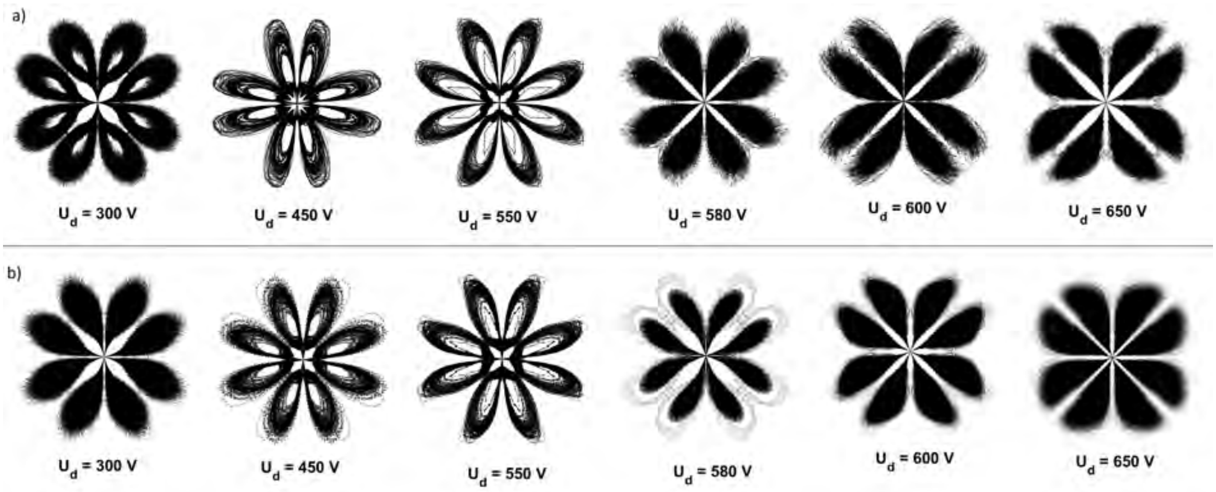
Natomiast opóźnienia czasowe τ pozostawały zgodne z tymi wyznaczonymi w rozdziale 4.3.3.

4.5.1 Interpretacja wizualna

Pierwszym krokiem analizy SDP była interpretacja wizualna. Wykresy pozwoliły na sprawną i szybką wizualizację ewolucji dynamiki zebranych sygnałów w funkcji napięcia wyładowania.

Rysunek 4.52 przedstawia wykresy SDP dla prądu wyładowania I_d w przypadku surowych danych oraz danych oczyszczonych przy użyciu metody Sauera opisanej w Dodatku B. Dzięki redukcji szumów udało się odzyskać bardziej uporządkowane kształty niż w przypadku nieoczyszczonych sygnałów prądowych, zwłaszcza od $U_d = 580\ V$, gdzie wzory te wcześniej wskazywały ewidentnie na szum o rozkładzie normalnym (Rysunek 2.21). Wszystkie wyniki dotyczące prądu wyładowania uwidaczniają więcej szczegółów niż w przypadku prądu jonowego (Rysunek 4.53), ale tutaj również najwyraźniejsza zmiana ma miejsce przy $U_d = 580\ V$, gdzie następuje zaciemnienie wewnętrznych części przestrzeni ograniczonych przez powstałe struktury.

Na Rysunku 4.54 wykreślone zostały diagramy SDP dla prądu wyładowania po redukcji szumu. Dla napięć poniżej 580 V zasadniczy kształt rozkładu kropek zmienia się w nieznacznym stopniu, a począwszy od $U_d = 580\ V$ rozkład ulega wyraźnej zmianie – wnętrza struktur ulegają wypełnieniu przez punkty odpowiadające zagęszczającym się trajektoriom fazowym. Podobna sytuacja ma miejsce dla oczyszczonych danych zebranych przez sondy FP i FC (patrz Rysunek 4.53). Wyniki dla sondy FP dla niskich napięć uwidoczniają jednak znacznie subtelniejsze struktury niż w przypadku sondy FC, co świadczy o tym, że dane te były początkowo mniej zaszumione i/lub zabieg oczyszczania przebiegł dla nich wydajniej.



Rysunek 4.53: Wykresy SDP dla oczyszczonych danych prądu jonowego zebranego sondą: a) FP oraz b) FC.

Przy niektórych napięciach w SDP można było zidentyfikować dwie różne struktury. Bardziej rozłożyste kształty odpowiadają oscylacjom BM, a mniejsze struktury leżące wewnątrz tych kształtów odpowiadają trybowi lokalnemu. Te dwie struktury mogą pojawiać się z różnymi względnymi intensywnościami w zależności od stosunku występowania okresu trybu globalnego do okresu nisko-amplitudowego (lokalnego) w próbce danych użytej do wytworzenia SDP.

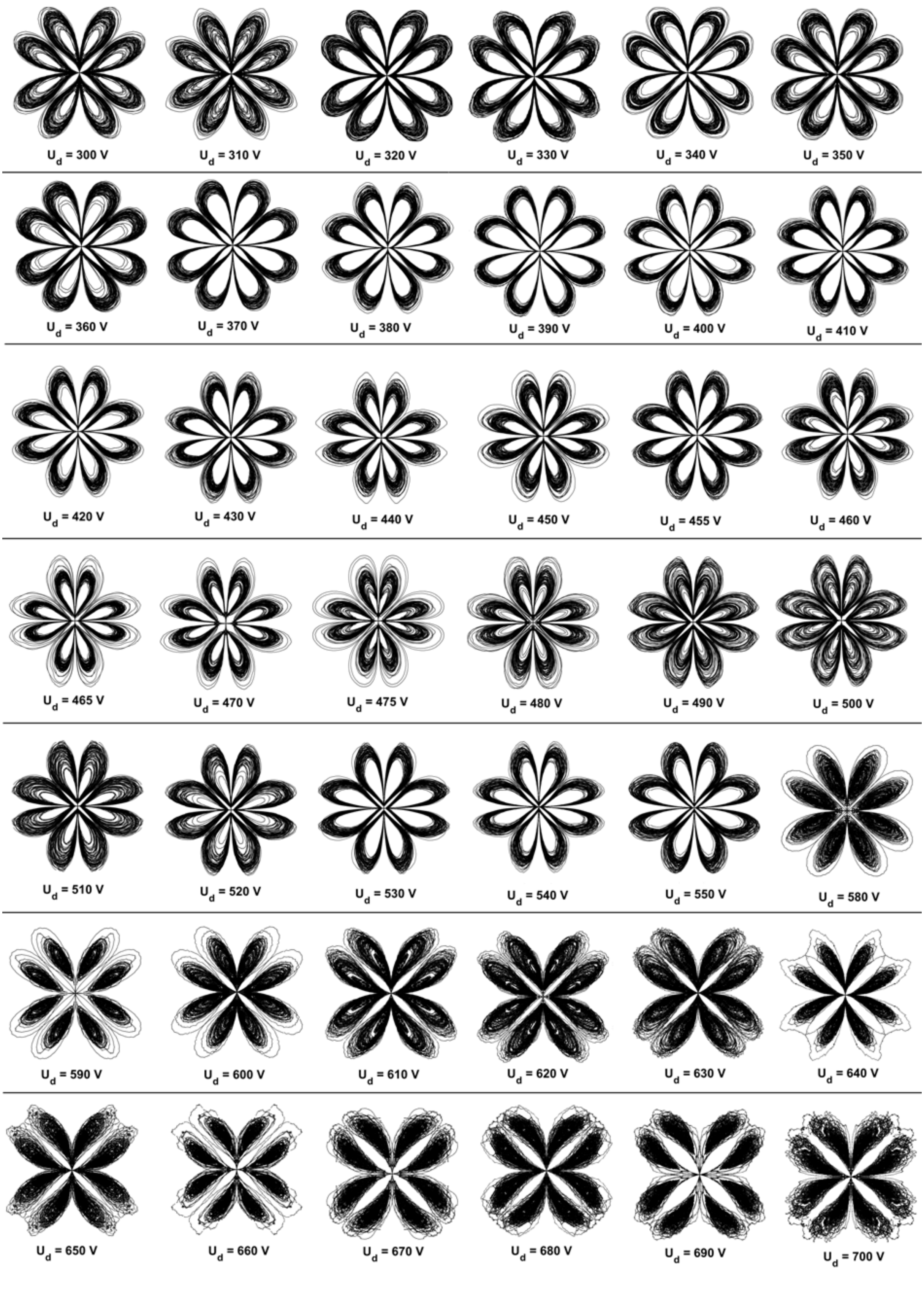
Podsumowując analizę wizualną można stwierdzić, że wykresy SDP wyraźnie pokazują, że dynamika sygnału przy wysokich napięciach ($U_d \geq 580\ V$) posiada inny charakter. Nagła zmiana dynamiki prądu jonowego oraz prądu wyładowania przy 580 V, ma związek z przejściem pracy silnika do trybu lokalnego.

4.5.2 Entropia

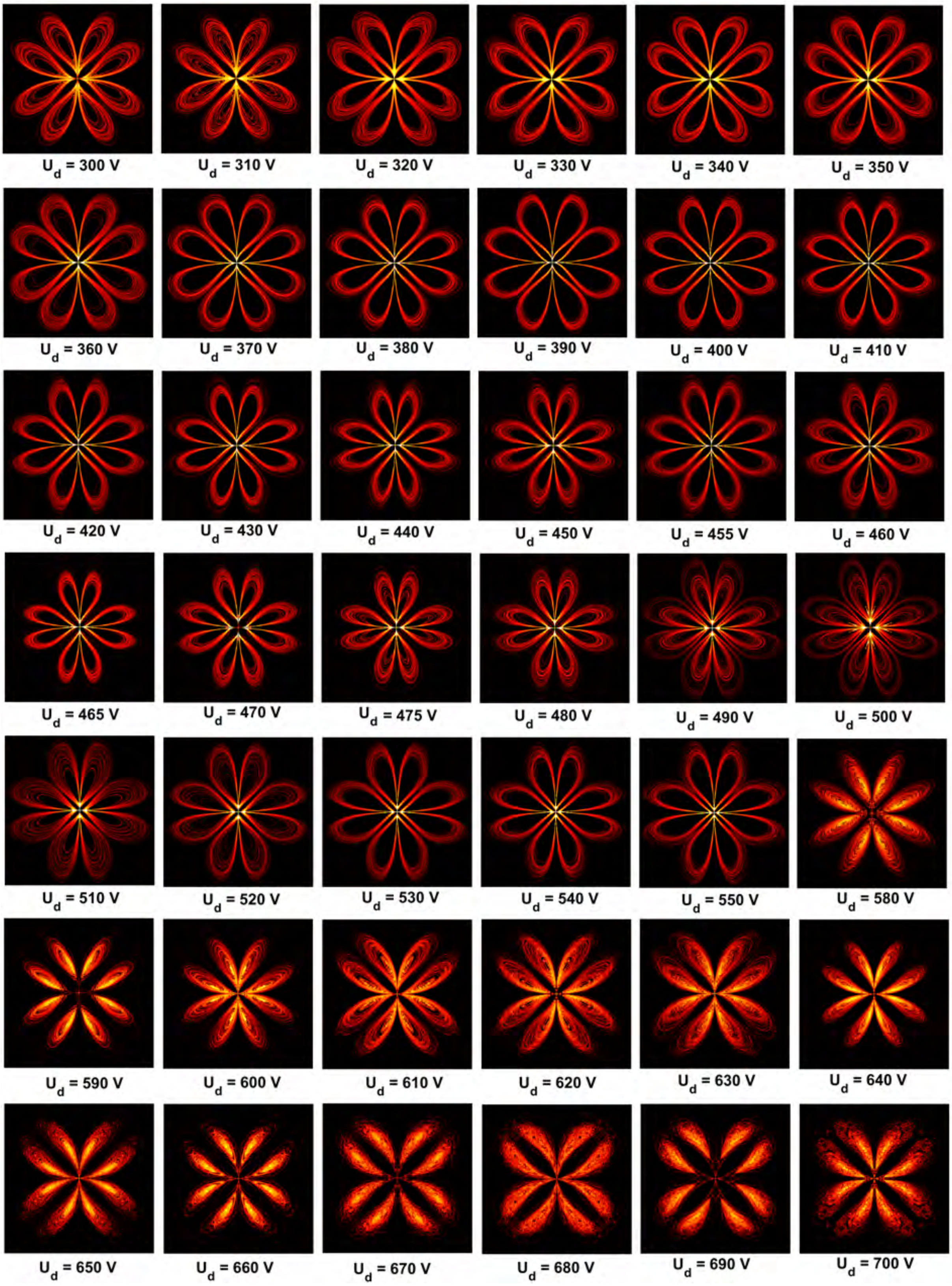
Drugim etapem analizy SDP było obliczenie entropii Shannona dla danych eksperymentalnych silnika Halla i porównanie jej poziomu dla kilku układów referencyjnych przedstawionych w rozdziale 2.2.8. Aby tego dokonać stworzono diagramy gęstościowe.

Na Rysunku 4.55 przedstawione zostały rozkłady gęstości odpowiadające wykresom SDP z Rysunku 4.54. Punkty na strukturach rozkładają się mniej więcej równomiernie dla napięć U_d nieprzekraczających 580 V. Po przejściu pracy silnika w tryb lokalny obserwuje się zagęszczenie punktów wykresu SDP w środkach utworzonych kształtów, co przypomina rozkład punktów dla szumu Gaussa (Rysunek 2.24).

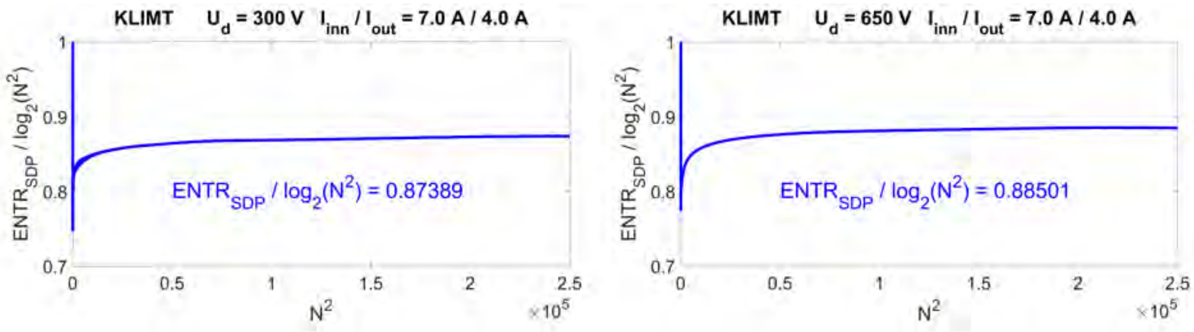
Przykłady wyznaczenia entropii $ENTR_{SDP}$ zostały przedstawione na Rysunku 4.56. Widać, że wraz ze wzrostem liczby kwadratów, na które dzieli się wykres gęstościowy przy danej liczbie próbkowanych obszarów N, poziom entropii podzielonej przez $\log_2(N^2)$ się stabilizuje. Rysunek 4.57 przedstawia unormowaną w ten sposób entropię $ENTR_{SDP}$



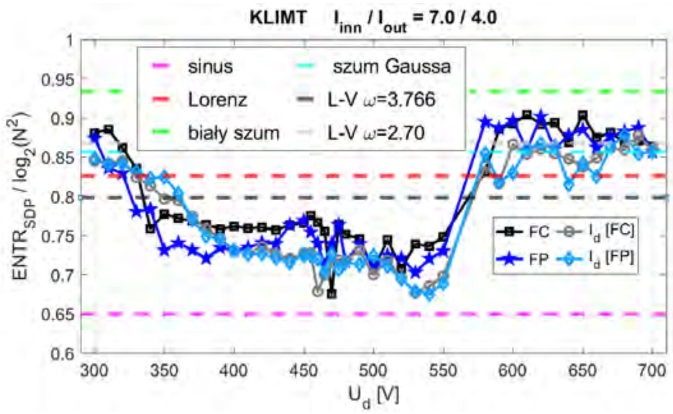
Rysunek 4.54: Wykresy SDP dla oczyszczonych danych I_d zebranych podczas pomiaru sondą FP.



Rysunek 4.55: Wykresy gęstościowe SDP dla oczyszczonych danych I_d zebranych podczas pomiaru sondą FP.



Rysunek 4.56: Przykład wyznaczenia entropii $ENTR_{SDP}$ w oczyszczonych danych pomiarowych prądu jonowego zebranego przez sondę FC dla dwóch napięć wyładowania.



Rysunek 4.57: Unormowana entropia $ENTR_{SDP}$ wyznaczona dla oczyszczonych danych pomiarowych. Zaznaczono też poziomy entropii sygnału periodycznego na przykładzie sinusoidy, układu Lorenza, modelu L-V dla kilku wartości parametru ω, białego szumu i szumu o rozkładzie normalnym obliczone tą samą metodą.

dla oczyszczonych danych dotyczących pomiarów wykonanych sondami FC i FP oraz dla wykonywanych jednocześnie pomiarów prądu wyładowania. Wszystkie wyniki zgodnie wykazują dość szybki spadek entropii w funkcji rosnącego napięcia dla niskich napięć wyładowania (U_d poniżej 350 V), znacznie wolniejszy spadek dla napięć pośrednich i bardzo szybki wzrost (dla napięć powyżej 550 V). Dla najwyższych napięć ($U_d \geq 580$ V) można stwierdzić, że entropia $ENTR_{SDP}$ dla wszystkich sygnałów prądowych pozostaje mniej więcej stabilna i osiąga wartości zbliżone do wartości entropii dla szumu o rozkładzie normalnym, co pozostaje zgodne z analizą wizualną.

Podsumowując powyższa analiza wykazała, że dla wysokich napięć sygnał wykazuje raczej zachowanie losowe tzn. osiąga poziom entropii obserwowanej dla szumu Gaussa, chociaż poziom unormowanej entropii $ENTR_{SDP}$ w tym zakresie leży na podobnym poziomie co dla modelu L-V przy $\omega = 2.7$ (przypadek nie chaotyczny) i jest nieznacznie wyższy od poziomu dla układu Lorenza. Można też stwierdzić, że entropia przyjmuje najniższe wartości dla średnich wartości napięcia wyładowania (od $U_d = 350\ V$ do $550\ V$), tam gdzie wskaźnik RR jest najwyższy. Wtedy poziom entropii znajduje się pomiędzy poziomem entropii dla modelu L-V przy $\omega = 3.766$ (przypadek chaotyczny) a poziomem entropii dla sinusoidy.

Rozdział 5

Podsumowanie

Chociaż silnik Halla jest również nazywany stacjonarnym silnikiem plazmowym i może działać niemalże stabilnie tak długo, jak dostarczana jest energia i paliwo, niestabilności plazmy powodują oscylacje prądu wyładowania w bardzo szerokim zakresie częstotliwości. Pojawienie się głębokich oscylacji prądu wyładowania stanowi ważny problem, ponieważ działają one niekorzystnie na wydajność silnika i mogą uszkodzić jednostkę zasilającą.

Głównym celem tej dysertacji było sprawdzenie, czy w przebiegach prądowych można wykryć niskowymiarową dynamikę chaotyczną. Podczas gdy analizę oscylacji przeprowadzano zwykle ograniczając się tylko do prądu wyładowania, w niniejszej pracy zbadano również oscylacje prądu jonowego, niezakłócone przez prąd elektronowy. Ze względu na to, że w zebranych danych pomiarowych występował znaczny poziom szumu, zastosowano odpowiednią metodę jego redukcji.

W rozprawie doktorskiej zastosowano szeroki wachlarz metod badawczych dotyczących analizy nieliniowej dynamiki szeregów czasowych. Obejmowały one analizę widm mocy, diagramy bifurkacyjne i badanie zjawiska intermitencji, jak również rekonstrukcję przestrzeni fazowych i stworzenie map Poincarégo. Ponadto obliczono wymiar korelacyjny atraktorów, oszacowano największy wykładnik Lapunowa, stworzono wykresy rekurencyjne oraz dokonano ich analizy ilościowej. Oprócz tego wykreślono również symetryzowane wzory kropkowe. Wymienione powyżej techniki wykrywania zachowań chaotycznych zostały po raz pierwszy zastosowane do tego typu danych w tak szerokim zakresie. Uzyskanych rezultatów jeszcze nigdzie nie publikowano, poza wstępnymi badaniami przedstawionymi w artykule [123], gdzie zastosowano tylko kilka z użytych tutaj wskaźników chaosu do nieoczyszczonych sygnałów prądu jonowego.

5.1 Konkluzje

Od czasu pierwszych konstruktorów i badaczy zastanawiano się w jaki sposób kategoryzować zachowanie się silnika Halla podczas zmiany parametrów operacyjnych. W trakcie przeprowadzanej tu analizy badano szeregi czasowe pod względem występowania zachowań chaotycznych, co pozwoliło na stworzenie podwalin nowej kategoryzacji.

Przy pomocy diagramów bifurkacyjnych, widm mocy PSD oraz wykresów skośności i kurtozy w funkcji napięcia wyładowania U_d zidentyfikowano główne obszary, w których zmieniała się dynamika przebiegów prądowych wraz ze wzrostem napięcia wyładowania. Ze względu na rozszczelnienie dystrybutora gazu w silniku HIKHET niemożliwe stało się przeprowadzenie rzetelnych badań tego protopypu. Dlatego analizę pod względem zachowań chaotycznych przedstawiono tylko dla silnika KLIMT wybierając reprezentatywną grupę danych, gdy silnik pracował przy konfiguracji prądów w cewkach 7.0 A / 4.0 A. Dzięki temu udało sie wyróżnić pięć regionów pracy silnika w funkcji rosnącego napięcia wyładowania U_d:

1. Dla napięcia wyładowania poniżej 350 V występował reżim oscylacji BM (tryb globalny pracy silnika) kształtem zbliżonych do sinusoidy z częstotliwością podstawową w zakresie 20-30 kHz, gdzie amplituda tych oscylacji pozostawała względnie niewielka.

2. Dla U_d z przedziału od około 350 V do 450 V występowało przejście od oscylacji sinusoidalnych do bardziej piłokształtnych pulsacji charakteryzujących się wyższym natężeniem harmonicznych BM w widmie mocy oraz zwiększaniem się amplitudy tych oscylacji wraz ze wzrostem napięcia wyładowania.

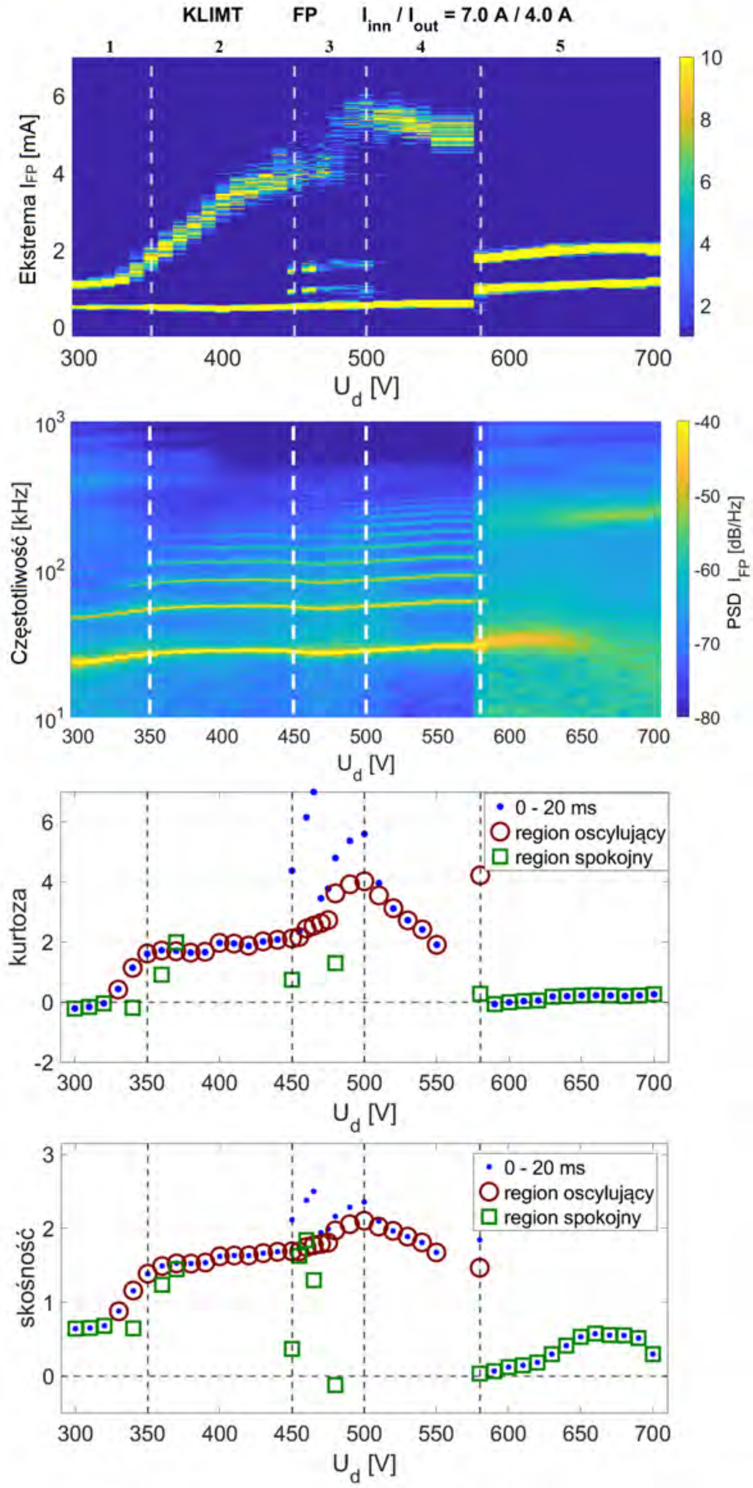
3. Dla napięcia z przedziału od 450 Vdo 500 Voscylacje BM nadal miały charakter pulsacyjny, lecz zaczęły się pojawiać przełączenia między globalnym trybem pracy silnika a trybem lokalnm. Tryb lokalny charakteryzował się oscylacjami o niskiej amplitudzie i nieregularnym przebiegu.

4. Dla przedziału 500 $V < U_d \leq 550$ Vprzełączenia między trybami zaniknęły, a układ wrócił do reżimu wysokoamplitudowych oscylacji trybu globalnego. Natężenie harmonicznych w widmie wciąż wzrastało.

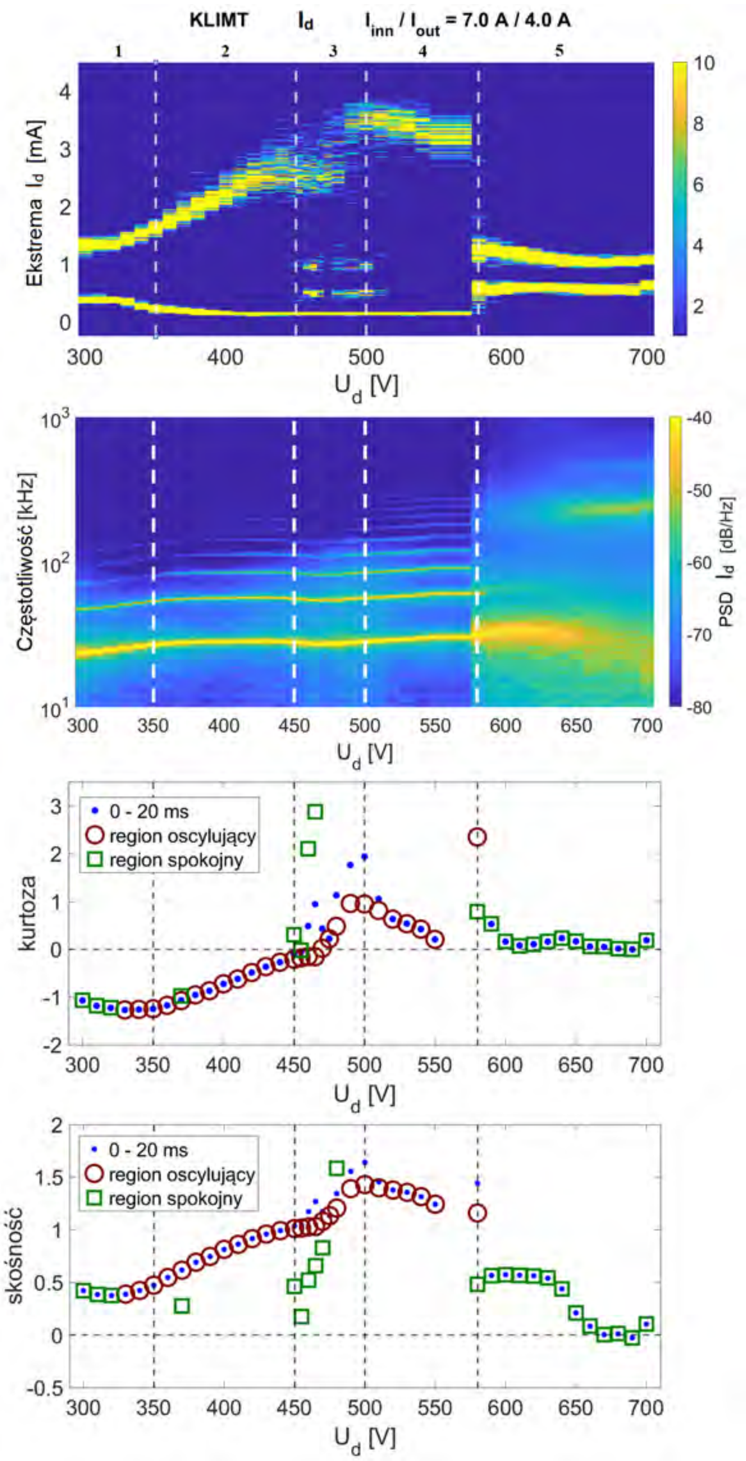
5. Po przekroczeniu napięcia U_d równego około 580 V nastąpiło nagłe przejście pracy silnika do reżimu lokalnego, charakteryzującego się niskoamplitudowymi oscylacjami i zanikiem harmonicznych w widmie oraz wyraźnym wzmocnieniem się piku przy około 250 kHz odpowiadającego częstotliwości przejścia jonów (*transit time oscillations*). Silnik pozostał w tym trybie oscylacji dla wszystkich wyższych przebadanych wartości napięcia (590 $V \leq U_d \leq 700$ V).

Powyżej opisane regiony odróżniono pionowymi liniami przerywanymi na Rysunkach 5.1 i 5.2 przedstawiających diagramy bifurkacyjne, widma mocy oraz skośność i kurtozę w funkcji napięcia wyładowania kolejno dla prądu jonowego i prądu wyładownia. Różnica w dynamice prądu wyładowania i prądu jonowego wynika z faktu, że prąd zebrany przez sondę zawiera tylko składową jonową, a I_d obejmuje również udział elektronów. Należy też wziąć pod uwagę różny czas przelotu zebranych jonów o odmiennych stopniach jonizacji od silnika do sondy, co nie ma miejsca w przypadku prądu wyładowania.

Zaobserwowano, że oscylacje trybu BM ulegają pewnej ewolucji objawiającej się zmianą skośności i kurtozy wraz ze wzrostem przykładanego napięcia, co wskazuje na jakościową zmianę dynamiki tych oscylacji. Zmianę kształtu oscylacji występującej podczas



Rysunek 5.1: Gęstościowy diagram bifurkacyjny, widmo mocy oraz kurtoza i skośność w funkcji napięcia wyładowania dla prądu jonowego.



Rysunek 5.2: Gęstościowy diagram bifurkacyjny, widmo mocy oraz kurtoza i skośność w funkcji napięcia wyładowania dla prądu wyładowania I_d.

pracy silnika w trybie BM można wyjaśnić tym, że wraz ze stopniowym wzrostem napięcia wyładowania U_d, prędkość jonów przyspieszanych przez pole elektryczne sukcesywnie rośnie, co powoduje szybszy ubytek jonów w obszarze jonizacji. W konsekwenacji następuje wydłużenie czasu podczas którego strefa jonizacyjna pozostaje przesunięta w głąb kanału silnika, gdzie nateżęnie pola magnetycznego jest słabsze i jonizacja staje się mniej efektywna. Natomiast podczas trwania reżimu lokalnego położenie efektywnej strefy jonizacyjnej nie podlega aż tak głębokim wahaniom, bez względu na siłę pola elektrycznego.

Obserwacje nietrywialnej dynamiki przebiegów prądowych związane z występowaniem intermitencji i powstaniem struktury na diagramie bifurkacyjnym zbliżonej do bifurkacji Hopfa, dawały wystarczającą motywację do dalszego badania hipotezy istnienia chaosu, chociaż nie dostarczały jeszcze żadnych dowodów na poparcie tej hipotezy.

W związku z tym przeprowadzono również rekonstrukcję przestrzeni fazowej przebiegów prądu wyładowania oraz prądu jonowego przy pomocy metody opóźnień czasowych Takensa, która pozwoliła zidentyfikować obecność atraktorów zarówno dla trybu globalnego BM, jak i trybu lokalnego. Wymiar korelacyjny D_G tych atraktorów szacowano dla pełnego zakresu napięcia wyładowania, ale niecałkowite wartości równe około 1.2 dla prądu wyładowania i około 1.4 dla prądu jonowego (patrz Rysunki 5.3 i 5.4) , dość stabilne względem parametru kontrolnego U_d, stwierdzono tylko dla zakresu 300 $V \leq U_d \leq 550$ V, i tylko dla oscylacji trybu oddechowego, co wskazuje na obecność dziwnego atraktora dla tych warunków. W przypadku trybu lokalnego podczas badania całki korelacjyjnej $C(R)$ nie pojawił się obszar mniej więcej stałych wartości (obszar skalowania). Może to oznaczać albo wysokowymiarową naturę trybu lokalnego (np. z powodu turbulentnego zachowania plazmy w tym reżimie), albo zbyt duże zanieczyszczenie szumem. Identyfikacja dziwnego atraktora o niskim wymiarze niecałkowitym jest mocnym argumentem przemawiającym za występowaniem w trybie BM niskowymiarowego chaosu deterministycznego w dynamice obydwu przebiegów prądowych.

Mapy Poincarégo pozwoliły zobrazować własności atraktorów, redukując przestrzeń fazową do dwóch wymiarów. Metoda stroboskopowa konstrukcji tych map wykazała, że dynamiki badanego układu nie da się sprowadzić do dominującego zachowania okresowego, ponieważ stworzone w ten sposób mapy rozciągały się na całą przestrzeń fazową pokrytą atraktorem, podczas gdy układ okresowy lub quasi-okresowy byłby reprezentowany przez ograniczoną liczbę punktów. Fakt ten wzmacnia hipotezę o chaotycznym zachowaniu sygnału. Następnie przy zastosowaniu standardowej techniki tworzenia map Poincarégo zobrazowano regiony, w których atraktor przecina wybraną płaszczyznę. Punkty skupiały się w kilku preferowanych obszarach nawet w przypadku danych powyżej $U_d = 580\ V$, co stanowi dowód na to, że atraktory również w przypadku wysokiego napięcia posiadają zwartą strukturę w postaci zdeformowanego dysku.

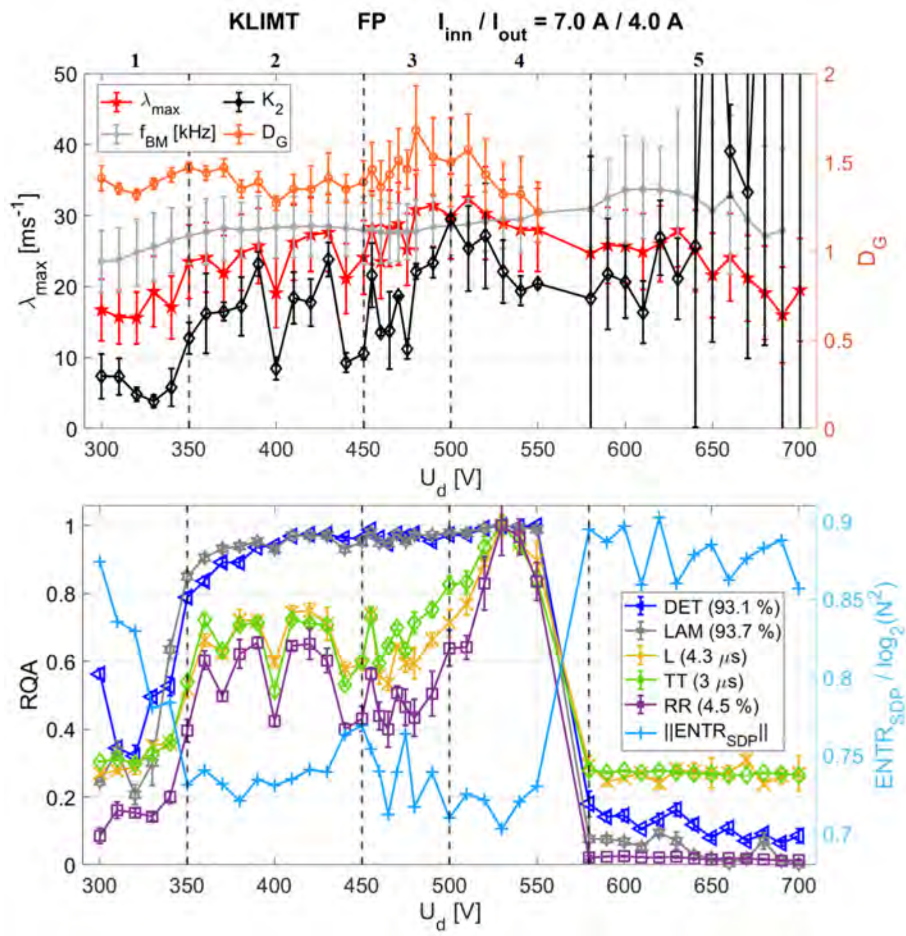
Ponieważ chaotyczna dynamika charakteryzuje się wykładniczą dywergencją sąsiednich trajektorii w przestrzeni fazowej, wyznaczenie dodatniej wartości dla największego wykładnika Lapunowa λ_{max} jest jednym z najsilniejszych argumentów, które mogą potwierdzić hipotezę obecności chaosu deterministycznego. Stwierdzono, że dla sygnałów prądowych w całym zbadanym zakresie napięcia U_d (300 V – 700 V) wartości λ_{max} mieszczą się w przedziale 20 – 40 ms^{-1} (patrz Rysunki 5.3 i 5.4), co odpowiada zakresowi

25 – 30 kHz częstotliwości podstawowej oscylacji BM. Oznacza to, że przewidywalność zachowań systemu szybko zanika dla czasu dłuższego niż okres oscylacji BM. Ponieważ badane funkcje rozbieżności trajektorii, pomimo zastosowania specjalnej procedury redukcji szumu w sygnale użytym do ich wyznaczenia, wciąż wykazywały silne fluktuacje, wyznaczone wartości λ_{max} i ich niepewności mogą być obciążone przez efekty nieuwzględnione w analizie. Dlatego też na tym etapie nie można całkowicie wykluczyć możliwości zawyżenia wartości λ_{max}. Niemniej jednak w celu weryfikacji metody wyznaczania λ_{max} zastosowanej do danych eksperymentalnych, poddano testom tę metodę w zastosowaniu do kilku modelowych układów referencyjnych. Wyniki uzyskane po wprowadzeniu do tych układów szumu o różnym nasileniu, a następnie jego redukcji tą samą techniką, wykazały, że wykrycie obecności zachowań chaotycznych jest możliwe nawet dla znacznej domieszki szumu w sygnale.

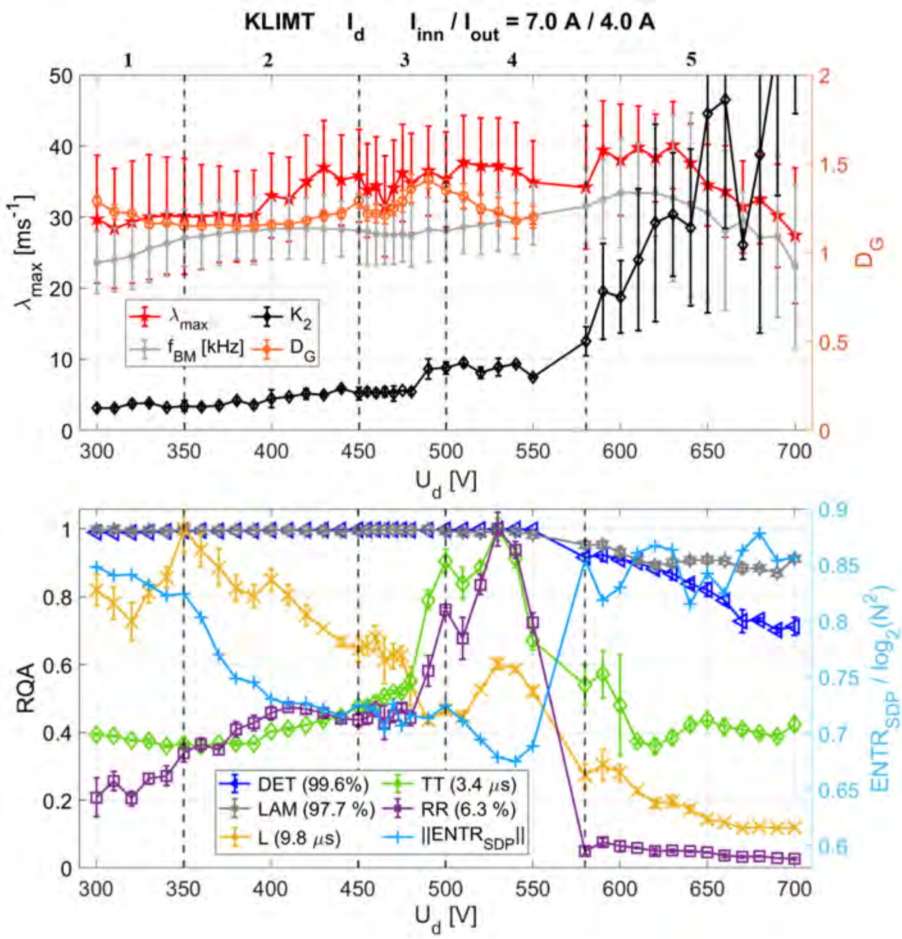
Do analizy złożonej dynamiki sygnału wykorzystano także wykresy rekurencyjne RP, poddając je analizie ilościowej (RQA). Zastosowanie RQA potwierdziło obecność regionów zidentyfikowanych wcześniej dzięki diagramom bifurkacynym czy PSD, dla których to regionów uzyskano wiele dodatkowych informacji. Dla wartości napięcia U_d leżących w zakresie 300 $V \leq U_d \leq$ 550 V diagramy RP wskazały na dynamikę zdominowaną przez oscylacje BM, ale występowały też częste i regularne zaniki przewidywalności, co objawiało się powstawaniem na RP pasów pozbawionych punktów. Turbulentne wahania o małej skali czasowej miały większą intensywność przy wyższzm napięciu wyładowania (U_d $>$ 580 V). Najważniejsze wyniki analizy RQA zebrano na Rysunkach 5.3 i 5.4 odpowiednio dla prądu jonowego zebranego sondą FP i prądu wyładowania. Pięć zakresów wartości napięcia wyładowania charakteryzowało się różnymi wartościami wskaźników RQA.

Dodatkowo podczas analizy przeprowadzanej w dysertacji zastosowano alternatywną metodę wizualizacji dynamiki złożonego systemu opartą na symetryzowanym wykresie kropkowym (SDP). Chociaż metoda ta nie wniosła nowych informacji w porówananiu do metod opisanych powyżej, okazała się ona szybkim i eleganckim sposobem wizualnej identyfikacji powtarzających się zachowań występujących w sygnale. Diagramy SDP dla prądu jonowego i prądu wyładowania umożliwiły identyfikację przejścia z trybu oscylacyjnego (prawie sinusoidalnego) do pulsacyjnego, identyfikację intermitencji w postaci przerywania trybu BM reżimem lokalnym występującą przy napięciach pośrednich oraz przejście do reżimu lokalnego dla $U_d >$ 550 V. Poziom entropii Shannona wyznaczony przy pomocy diagramów gęstościowych przedstawiono również na Rysunkach 5.3 i 5.4.

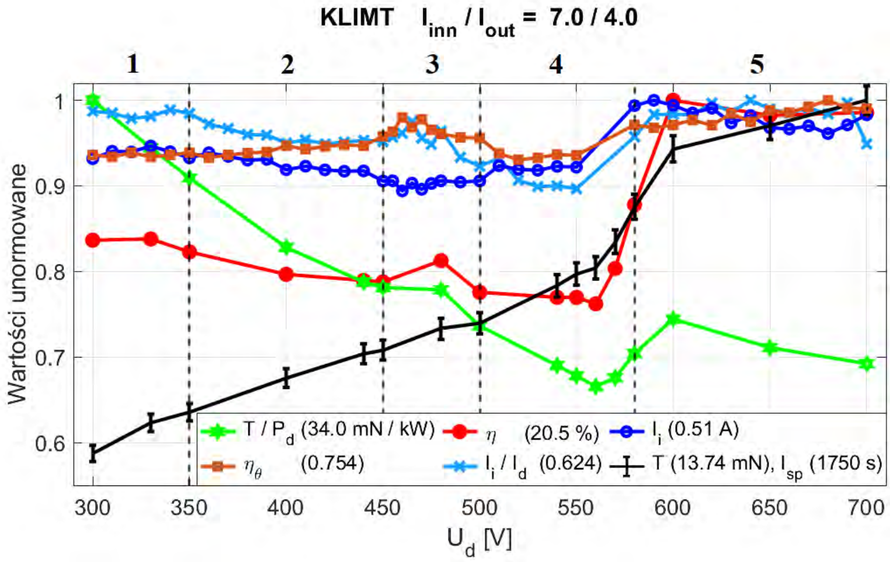
Zmiana wyglądu wiązki plazmowej uwidoczniona na zdjęciach (Rysunek 4.1) była nie tylko kosmetyczna – towarzyszyły jej istotne zmiany w rozkładzie kątowym jonów, przebiegu prądu wyładowania i widmie (PSD), a także wydajności silnika. Największy całkowity prąd jonowy obserwowany jest w obszarze przejścia między głębokimi oscylacjami trybu oddechowego (globalnego) a oscylacjami trybu lokalnego, co zostało przedstawione na Rysunku 5.5, gdzie zebrano wszystkie najważniejsze parametry dotyczące wydajności silnika KLIMT.



Rysunek 5.3: Wykres górny: największy wykładnik Lapunowa λ_{max}, częstotliwość podstawowej oscylacji BM f_{BM}, entropia K_2 oraz wymiar fraktalny D_G dla prądu jonowego w funkcji napięcia wyładowania. Dolny wykres: wyniki analizy ilościowej wykresów rekurencyjnych w funkcji napięcia U_d obejmujące: determinizm DET, laminarność LAM, średnią długość odcinków ukośnych L, średnią długość konstrukcji pionowych TT, stopień rekurencji RR. Na wykresie umieszczono również unormowaną entropię Shannona $ENTR_{SDP}$. Wszystkie uzyskane wartości RQA zostały unormowane (1 odpowiada danej wartości maksymalnej, podanej w legendzie wykresu). Pionowe linie oddzielają poszczególne regiony, w których praca silnika ulegała największym zmianom.



Rysunek 5.4: Wykres górny: największy wykładnik Lapunowa λ_{max}, częstotliwość podstawowej oscylacji BM f_{BM}, entropia K_2 oraz wymiar fraktalny D_G dla prądu wyładowania w funkcji napięcia wyładowania. Dolny wykres: wyniki analizy ilościowej wykresów rekurencyjnych w funkcji napięcia U_d obejmujące: determinizm DET, laminarność LAM, średnią długość odcinków ukośnych L, średnią długość konstrukcji pionowych TT, stopień rekurencji RR. Na wykresie umieszczono również unormowaną entropię Shannona $ENTR_{SDP}$. Wszystkie uzyskane wartości RQA zostały unormowane (1 odpowiada danej wartości maksymalnej, podanej w legendzie wykresu). Pionowe linie oddzielają poszczególne regiony, w których praca silnika ulegała największym zmianom.



Rysunek 5.5: Siła ciągu T, impuls właściwy I_{sp}, wydajość silnika η, całkowity prąd jonowy I_i, wydajność ze względu na rozbieżność wiązki η_θ i stosunek siły ciągu do mocy wyładowania T/P_d oraz wykorzystanie gazu, czyli stosunek całkowitego prądu jonowego do prądu wyładowania I_i/I_d w funkcji napięcia wyładowania. Wszystkie uzyskane wartości zostały unormowane, w legendzie podano ich wartości maksymalne. Pionowe linie oddzielają poszczególne regiony, w których praca silnika ulegała największym zmianom.

Podsumowując należy podkreślić, że w poszukiwaniach zachowań chaotycznych istotne było użycie różnych, dopełniających się metod, co pozwoliło dodatkowo ocenić ich przydatność i ograniczenia. Ponieważ zarówno prąd wyładowania jak i prąd jonowy w zakresie napięcia U_d do 550 V posiadają atraktory i niecałkowite wymiary fraktalne oraz dodatni wykładnik Lapunowa, można wysunąć wniosek, że w przebiegach prądowych silnika Halla wykryto niskowymiarowy chaos deterministyczny. Przejście oscylacji do trybu nisko-amplitudowego (lokalnego), gdzie na nieregularne oscylacje nakłada się stosunkowo silny szum i gdzie nie udało się wyznaczyć wymiaru fraktalnego, powoduje skokowy wzrost siły ciągu. Można zatem wnioskować, że zanik silnych oscylacji o chaotycznym charakterze, właściwych dla trybu globalnego, powoduje znaczne zwiększenie wydajności silnika.

5.2 Perspektywy

Dalsza bardziej dogłębna analiza przebiegów prądowych pozwoliłaby na jeszcze dokładniejsze porówanie wydajności silnika podczas pojawiania się w nich zachowań chaotycznych. Biorąc pod uwagę całą wiedzę zdobytą po przeprowadzonych na szeroką skalę badaniach zachowań chaotycznych plazmy, bez trudu można ją będzie zastosować do kolejnych wersji prototypów silników Halla nie tylko projektowanych w IFPiLM, ale również w innych ośrodkach badawczych zajmujących się tym tematem. W szczególności będzie można kontynuować te badania dla silnika HIKHET po wymianie dystrybutora gazu, co pozwoli okreslić zachowania chaotyczne dla silnika o nieco odmiennej geometrii. Poza tym zaprezentowane tutaj wnioski mogą stać się podstawą do opracowania pełniejszych modeli teoretycznych, zwłaszcza dotyczących różnych trybów oscylacji.

Badania przeprowadzone na potrzeby tej rozprawy doktorskiej dostarczają wskazówek co do wyboru technik badań chaosu w odniesieniu do rzeczywistych układów fizycznych, które mogą być pomocne do analizowania przebiegów prądowych innych urządzeń plazmowych. Zatem chociaż pierwotnym celem tej pracy było zbadanie możliwego pojawienia się zachowania chaotycznego w przebiegach prądowych silnika Halla, przedstawione tutaj metody analizy można również zastosować do urządzeń plazmowych wysokotemperaturowych (tokamaków i stelleratorów), gdzie również zaobserwowano przejawy zachowań chaotycznych.

Dodatek A

Tabela zbiorcza dokonanych pomiarów

Lp	silnik	etap	data	U_d	I_{inn}	I_{out}	FC	FP	FC_{old}	T
1	KLIMT	I	20.05.2020	300	7.0	4.0	$\surd$	$\surd$	-	$\surd$
2	**KLIMT**	**I**	**20.05.2020**	300	7.0	4.0	$\surd$	$\surd$	**-**	**-**
3	KLIMT	I	20.05.2020	310	7.0	4.0	$\surd$	$\surd$	-	-
4	KLIMT	I	20.05.2020	320	7.0	4.0	$\surd$	$\surd$	-	-
5	KLIMT	I	20.05.2020	330	7.0	4.0	$\surd$	$\surd$	-	-
6	KLIMT	I	20.05.2020	340	7.0	4.0	$\surd$	$\surd$	-	-
7	KLIMT	I	20.05.2020	350	7.0	4.0	$\surd$	$\surd$	-	-
8	KLIMT	I	20.05.2020	360	7.0	4.0	$\surd$	$\surd$	-	-
9	KLIMT	I	20.05.2020	370	7.0	4.0	$\surd$	$\surd$	-	-
10	KLIMT	I	20.05.2020	380	7.0	4.0	$\surd$	$\surd$	-	-
11	KLIMT	I	20.05.2020	390	7.0	4.0	$\surd$	$\surd$	-	-
12	KLIMT	I	20.05.2020	400	7.0	4.0	$\surd$	$\surd$	-	-
13	KLIMT	I	20.05.2020	410	7.0	4.0	$\surd$	$\surd$	-	-
14	KLIMT	I	20.05.2020	420	7.0	4.0	$\surd$	$\surd$	-	-
15	KLIMT	I	20.05.2020	430	7.0	4.0	$\surd$	$\surd$	-	-
16	KLIMT	I	20.05.2020	440	7.0	4.0	$\surd$	$\surd$	-	-
17	**KLIMT**	**I**	**20.05.2020**	450	7.0	4.0	$\surd$	$\surd$	**-**	**-**
18	KLIMT	I	20.05.2020	455	7.0	4.0	$\surd$	$\surd$	-	-
19	KLIMT	I	20.05.2020	460	7.0	4.0	$\surd$	$\surd$	-	-
20	KLIMT	I	20.05.2020	465	7.0	4.0	$\surd$	$\surd$	-	-
21	KLIMT	I	20.05.2020	470	7.0	4.0	$\surd$	$\surd$	-	-
22	KLIMT	I	20.05.2020	475	7.0	4.0	$\surd$	$\surd$	-	-
23	KLIMT	I	20.05.2020	480	7.0	4.0	$\surd$	$\surd$	-	-
24	KLIMT	I	20.05.2020	490	7.0	4.0	$\surd$	$\surd$	-	-
25	KLIMT	I	20.05.2020	500	7.0	4.0	$\surd$	$\surd$	-	-
26	KLIMT	I	20.05.2020	510	7.0	4.0	$\surd$	$\surd$	-	-
27	KLIMT	I	20.05.2020	520	7.0	4.0	$\surd$	$\surd$	-	-
28	KLIMT	I	20.05.2020	530	7.0	4.0	$\surd$	$\surd$	-	-
29	KLIMT	I	20.05.2020	540	7.0	4.0	$\surd$	$\surd$	-	-
30	**KLIMT**	**I**	**20.05.2020**	550	7.0	4.0	$\surd$	$\surd$	**-**	**-**
31	**KLIMT**	**I**	**20.05.2020**	580	7.0	4.0	$\surd$	$\surd$	**-**	**-**
32	KLIMT	I	20.05.2020	590	7.0	4.0	$\surd$	$\surd$	-	-
33	**KLIMT**	**I**	**20.05.2020**	600	7.0	4.0	$\surd$	$\surd$	**-**	**-**
34	KLIMT	I	20.05.2020	610	7.0	4.0	$\surd$	$\surd$	-	-
35	KLIMT	I	20.05.2020	620	7.0	4.0	$\surd$	$\surd$	-	-

Lp	silnik	etap	data	U_d	I_{inn}	I_{out}	FC	FP	FC_{old}	T
36	KLIMT	I	20.05.2020	630	7.0	4.0	√	√	-	-
37	KLIMT	I	20.05.2020	640	7.0	4.0	√	√	-	-
38	**KLIMT**	**I**	**20.05.2020**	650	7.0	4.0	√	√	**-**	**-**
39	KLIMT	I	20.05.2020	660	7.0	4.0	√	√	-	-
40	KLIMT	I	20.05.2020	670	7.0	4.0	√	√	-	-
41	KLIMT	I	20.05.2020	680	7.0	4.0	√	√	-	-
42	KLIMT	I	20.05.2020	690	7.0	4.0	√	√	-	-
43	KLIMT	I	20.05.2020	700	7.0	4.0	√	√	-	-
44	KLIMT	I	20.05.2020	700	7.0	4.0	√	√	-	√
45	KLIMT	II	15.06.2020	300	7.0	4.0	√	√	-	√
46	KLIMT	II	15.06.2020	330	7.0	4.0	√	√	-	√
47	KLIMT	II	15.06.2020	350	7.0	4.0	√	√	-	√
48	KLIMT	II	15.06.2020	400	7.0	4.0	√	√	-	√
49	KLIMT	II	15.06.2020	440	7.0	4.0	√	√	-	√
50	KLIMT	II	15.06.2020	450	7.0	4.0	√	√	-	√
51	KLIMT	II	15.06.2020	480	7.0	4.0	√	√	-	√
52	KLIMT	II	15.06.2020	500	7.0	4.0	√	√	-	√
53	KLIMT	II	15.06.2020	540	7.0	4.0	√	√	-	√
54	KLIMT	II	15.06.2020	550	7.0	4.0	√	√	-	√
55	KLIMT	II	15.06.2020	560	7.0	4.0	√	√	-	√
56	KLIMT	II	15.06.2020	570	7.0	4.0	√	√	-	√
57	KLIMT	II	15.06.2020	580	7.0	4.0	√	√	-	√
58	KLIMT	II	15.06.2020	600	7.0	4.0	√	√	-	√
59	KLIMT	II	15.06.2020	650	7.0	4.0	√	√	-	√
60	KLIMT	II	15.06.2020	700	7.0	4.0	√	√	-	√
61	KLIMT	III a	17.06.2020	300	6.4	3.7	√	√	-	√
62	KLIMT	III a	17.06.2020	300	6.4	3.7	√	√	-	-
63	KLIMT	III a	17.06.2020	310	6.4	3.7	√	√	-	-
64	KLIMT	III a	17.06.2020	320	6.4	3.7	√	√	-	-
65	KLIMT	III a	17.06.2020	330	6.4	3.7	√	√	-	-
66	KLIMT	III a	17.06.2020	340	6.4	3.7	√	√	-	-
67	KLIMT	III a	17.06.2020	350	6.4	3.7	√	√	-	-
68	KLIMT	III a	17.06.2020	360	6.4	3.7	√	√	-	-
69	KLIMT	III a	17.06.2020	370	6.4	3.7	√	√	-	-
70	KLIMT	III a	17.06.2020	380	6.4	3.7	√	√	-	-
71	KLIMT	III a	17.06.2020	390	6.4	3.7	√	√	-	-
72	KLIMT	III a	17.06.2020	400	6.4	3.7	√	√	-	-
73	KLIMT	III a	17.06.2020	410	6.4	3.7	√	√	-	-
74	KLIMT	III a	17.06.2020	420	6.4	3.7	√	√	-	-
75	KLIMT	III a	17.06.2020	430	6.4	3.7	√	√	-	-
76	KLIMT	III a	17.06.2020	440	6.4	3.7	√	√	-	-
77	KLIMT	III a	17.06.2020	450	6.4	3.7	√	√	-	-
78	KLIMT	III a	17.06.2020	460	6.4	3.7	√	√	-	-
79	KLIMT	III a	17.06.2020	470	6.4	3.7	√	√	-	-
80	KLIMT	III a	17.06.2020	480	6.4	3.7	√	√	-	-
81	KLIMT	III a	17.06.2020	490	6.4	3.7	√	√	-	-
82	KLIMT	III a	17.06.2020	500	6.4	3.7	√	√	-	-
83	KLIMT	III a	17.06.2020	510	6.4	3.7	√	√	-	-
84	KLIMT	III a	17.06.2020	520	6.4	3.7	√	√	-	-
85	KLIMT	III a	17.06.2020	530	6.4	3.7	√	√	-	-

Lp	silnik	etap	data	U_d	I_{inn}	I_{out}	FC	FP	FC_{old}	T
86	KLIMT	III a	17.06.2020	540	6.4	3.7	$\surd$	$\surd$	-	-
87	KLIMT	III a	17.06.2020	550	6.4	3.7	$\surd$	$\surd$	-	-
88	KLIMT	III a	17.06.2020	560	6.4	3.7	$\surd$	$\surd$	-	-
89	KLIMT	III a	17.06.2020	570	6.4	3.7	$\surd$	$\surd$	-	-
90	KLIMT	III a	17.06.2020	580	6.4	3.7	$\surd$	$\surd$	-	-
91	KLIMT	III a	17.06.2020	600	6.4	3.7	$\surd$	$\surd$	-	-
92	KLIMT	III a	17.06.2020	610	6.4	3.7	$\surd$	$\surd$	-	-
93	KLIMT	III a	17.06.2020	620	6.4	3.7	$\surd$	$\surd$	-	-
94	KLIMT	III a	17.06.2020	630	6.4	3.7	$\surd$	$\surd$	-	-
95	KLIMT	III a	17.06.2020	640	6.4	3.7	$\surd$	$\surd$	-	-
96	KLIMT	III a	17.06.2020	650	6.4	3.7	$\surd$	$\surd$	-	-
97	KLIMT	III a	17.06.2020	660	6.4	3.7	$\surd$	$\surd$	-	-
98	KLIMT	III a	17.06.2020	670	6.4	3.7	$\surd$	$\surd$	-	-
99	KLIMT	III a	17.06.2020	680	6.4	3.7	$\surd$	$\surd$	-	-
100	KLIMT	III a	17.06.2020	690	6.4	3.7	$\surd$	$\surd$	-	-
101	KLIMT	III a	17.06.2020	700	6.4	3.7	$\surd$	$\surd$	-	$\surd$
102	KLIMT	III b	19.06.2020	300	7.8	4.5	$\surd$	$\surd$	-	$\surd$
103	KLIMT	III b	19.06.2020	300	7.8	4.5	$\surd$	$\surd$	-	-
104	KLIMT	III b	19.06.2020	310	7.8	4.5	$\surd$	$\surd$	-	-
105	KLIMT	III b	19.06.2020	320	7.8	4.5	$\surd$	$\surd$	-	-
106	KLIMT	III b	19.06.2020	330	7.8	4.5	$\surd$	$\surd$	-	-
107	KLIMT	III b	19.06.2020	340	7.8	4.5	$\surd$	$\surd$	-	-
108	KLIMT	III b	19.06.2020	350	7.8	4.5	$\surd$	$\surd$	-	-
109	KLIMT	III b	19.06.2020	360	7.8	4.5	$\surd$	$\surd$	-	-
110	KLIMT	III b	19.06.2020	370	7.8	4.5	$\surd$	$\surd$	-	-
111	KLIMT	III b	19.06.2020	380	7.8	4.5	$\surd$	$\surd$	-	-
112	KLIMT	III b	19.06.2020	390	7.8	4.5	$\surd$	$\surd$	-	-
113	KLIMT	III b	19.06.2020	400	7.8	4.5	$\surd$	$\surd$	-	-
114	KLIMT	III b	19.06.2020	410	7.8	4.5	$\surd$	$\surd$	-	-
115	KLIMT	III b	19.06.2020	420	7.8	4.5	$\surd$	$\surd$	-	-
116	KLIMT	III b	19.06.2020	430	7.8	4.5	$\surd$	$\surd$	-	-
117	KLIMT	III b	19.06.2020	440	7.8	4.5	$\surd$	$\surd$	-	-
118	KLIMT	III b	19.06.2020	450	7.8	4.5	$\surd$	$\surd$	-	-
119	KLIMT	III b	19.06.2020	460	7.8	4.5	$\surd$	$\surd$	-	-
120	KLIMT	III b	19.06.2020	470	7.8	4.5	$\surd$	$\surd$	-	-
121	KLIMT	III b	19.06.2020	480	7.8	4.5	$\surd$	$\surd$	-	-
122	KLIMT	III b	19.06.2020	490	7.8	4.5	$\surd$	$\surd$	-	-
123	KLIMT	III b	19.06.2020	500	7.8	4.5	$\surd$	$\surd$	-	-
124	KLIMT	III b	19.06.2020	510	7.8	4.5	$\surd$	$\surd$	-	-
125	KLIMT	III b	19.06.2020	520	7.8	4.5	$\surd$	$\surd$	-	-
126	KLIMT	III b	19.06.2020	530	7.8	4.5	$\surd$	$\surd$	-	-
127	KLIMT	III b	19.06.2020	540	7.8	4.5	$\surd$	$\surd$	-	-
128	KLIMT	III b	19.06.2020	550	7.8	4.5	$\surd$	$\surd$	-	-
129	KLIMT	III b	19.06.2020	560	7.8	4.5	$\surd$	$\surd$	-	-
130	KLIMT	III b	19.06.2020	570	7.8	4.5	$\surd$	$\surd$	-	-
131	KLIMT	III b	19.06.2020	580	7.8	4.5	$\surd$	$\surd$	-	-
132	KLIMT	III b	19.06.2020	590	7.8	4.5	$\surd$	$\surd$	-	-
133	KLIMT	III b	19.06.2020	600	7.8	4.5	$\surd$	$\surd$	-	-
134	KLIMT	III b	19.06.2020	610	7.8	4.5	$\surd$	$\surd$	-	-
135	KLIMT	III b	19.06.2020	620	7.8	4.5	$\surd$	$\surd$	-	-

Lp	silnik	etap	data	U_d	I_{inn}	I_{out}	FC	FP	FC_{old}	T
136	KLIMT	III b	19.06.2020	640	7.8	4.5	√	√	-	-
137	KLIMT	III b	19.06.2020	650	7.8	4.5	√	√	-	√
138	KLIMT	III b	19.06.2020	630	7.8	4.5	√	√	-	-
139	KLIMT	III b	19.06.2020	600	7.8	4.5	√	√	-	√
140	KLIMT	III b	19.06.2020	550	6.4	3.7	√	√	-	√
141	KLIMT	III b	19.06.2020	590	6.4	3.7	√	√	-	-
142	KLIMT	III b	19.06.2020	600	6.4	3.7	√	√	-	√
143	HIKHET	I	21.05.2021	300	3.5	2.2	√	√	-	√
144	HIKHET	I	21.05.2021	300	3.5	2.2	√	√	-	-
145	HIKHET	I	21.05.2021	310	3.5	2.2	√	√	-	-
146	HIKHET	I	21.05.2021	320	3.5	2.2	√	√	-	-
147	HIKHET	I	21.05.2021	330	3.5	2.2	√	√	-	-
148	HIKHET	I	21.05.2021	340	3.5	2.2	√	√	-	-
149	HIKHET	I	21.05.2021	350	3.5	2.2	√	√	-	-
150	HIKHET	I	21.05.2021	360	3.5	2.2	√	√	-	-
151	HIKHET	I	21.05.2021	370	3.5	2.2	√	√	-	-
152	HIKHET	I	21.05.2021	380	3.5	2.2	√	√	-	-
153	HIKHET	I	21.05.2021	390	3.5	2.2	√	√	-	-
154	HIKHET	I	21.05.2021	400	3.5	2.2	√	√	-	-
155	HIKHET	I	21.05.2021	410	3.5	2.2	√	√	-	-
156	HIKHET	I	21.05.2021	420	3.5	2.2	√	√	-	-
157	HIKHET	I	21.05.2021	430	3.5	2.2	√	√	-	-
158	HIKHET	I	21.05.2021	440	3.5	2.2	√	√	-	-
159	HIKHET	I	21.05.2021	450	3.5	2.2	√	√	-	-
160	HIKHET	I	21.05.2021	460	3.5	2.2	√	√	-	-
161	HIKHET	I	21.05.2021	470	3.5	2.2	√	√	-	-
162	HIKHET	I	21.05.2021	480	3.5	2.2	√	√	-	-
163	HIKHET	I	21.05.2021	490	3.5	2.2	√	√	-	-
164	HIKHET	I	21.05.2021	500	3.5	2.2	√	√	-	-
165	HIKHET	I	21.05.2021	510	3.5	2.2	√	√	-	-
166	HIKHET	I	21.05.2021	520	3.5	2.2	√	√	-	-
167	HIKHET	I	21.05.2021	530	3.5	2.2	√	√	-	-
168	HIKHET	I	21.05.2021	540	3.5	2.2	√	√	-	-
169	HIKHET	I	21.05.2021	550	3.5	2.2	√	√	-	-
170	HIKHET	I	21.05.2021	560	3.5	2.2	√	√	-	-
171	HIKHET	I	21.05.2021	570	3.5	2.2	√	√	-	-
172	HIKHET	I	21.05.2021	580	3.5	2.2	√	√	-	-
173	HIKHET	I	21.05.2021	590	3.5	2.2	√	√	-	-
174	HIKHET	I	21.05.2021	600	3.5	2.2	√	√	-	-
175	HIKHET	I	21.05.2021	610	3.5	2.2	√	√	-	-
176	HIKHET	I	21.05.2021	620	3.5	2.2	√	√	-	-
177	HIKHET	I	21.05.2021	630	3.5	2.2	√	√	-	-
178	HIKHET	I	21.05.2021	640	3.5	2.2	√	√	-	-
179	HIKHET	I	21.05.2021	650	3.5	2.2	√	√	-	-
180	HIKHET	I	21.05.2021	660	3.5	2.2	√	√	-	-
181	HIKHET	I	21.05.2021	670	3.5	2.2	√	√	-	-
182	HIKHET	I	21.05.2021	680	3.5	2.2	√	√	-	-
183	HIKHET	I	21.05.2021	690	3.5	2.2	√	√	-	-
185	HIKHET	I	21.05.2021	710	3.5	2.2	√	√	-	-
186	HIKHET	I	21.05.2021	720	3.5	2.2	√	√	-	-

Lp	silnik	etap	data	U_d	I_{inn}	I_{out}	FC	FP	FC_{old}	T
187	HIKHET	I	21.05.2021	700	3.5	2.2	$\surd$	$\surd$	-	$\surd$
188	HIKHET	II	27.05.2021	300	3.5	2.2	$\surd$	$\surd$	-	$\surd$
189	HIKHET	II	27.05.2021	350	3.5	2.2	$\surd$	$\surd$	-	$\surd$
190	HIKHET	II	27.05.2021	400	3.5	2.2	$\surd$	$\surd$	-	$\surd$
191	HIKHET	II	27.05.2021	450	3.5	2.2	$\surd$	$\surd$	-	$\surd$
192	HIKHET	II	27.05.2021	500	3.5	2.2	$\surd$	$\surd$	-	$\surd$
193	HIKHET	II	27.05.2021	550	3.5	2.2	$\surd$	$\surd$	-	$\surd$
194	HIKHET	II	27.05.2021	600	3.5	2.2	$\surd$	$\surd$	-	$\surd$
195	HIKHET	III	16.11.2021	300	3.2	2.1	$\surd$	$\surd$	$\surd$	$\surd$
196	HIKHET	III	16.11.2021	350	3.2	2.1	$\surd$	$\surd$	$\surd$	$\surd$
197	HIKHET	III	16.11.2021	400	3.2	2.1	$\surd$	$\surd$	$\surd$	$\surd$
198	HIKHET	III	16.11.2021	450	3.2	2.1	$\surd$	$\surd$	$\surd$	$\surd$
199	HIKHET	III	16.11.2021	500	3.2	2.1	$\surd$	$\surd$	$\surd$	$\surd$
200	HIKHET	III	16.11.2021	550	3.2	2.1	$\surd$	$\surd$	$\surd$	$\surd$
201	HIKHET	III	16.11.2021	600	3.2	2.1	$\surd$	$\surd$	$\surd$	$\surd$
202	HIKHET	III	16.11.2021	600	3.2	2.3	$\surd$	$\surd$	$\surd$	$\surd$
203	HIKHET	IV	17.11.2021	300	3.2	2.3	$\surd$	$\surd$	-	$\surd$
204	HIKHET	IV	17.11.2021	300	3.2	2.3	$\surd$	$\surd$	$\surd$	-
205	HIKHET	IV	17.11.2021	310	3.2	2.3	$\surd$	$\surd$	$\surd$	-
206	HIKHET	IV	17.11.2021	320	3.2	2.3	$\surd$	$\surd$	$\surd$	-
207	HIKHET	IV	17.11.2021	330	3.2	2.3	$\surd$	$\surd$	$\surd$	-
208	HIKHET	IV	17.11.2021	340	3.2	2.3	$\surd$	$\surd$	$\surd$	-
209	HIKHET	IV	17.11.2021	350	3.2	2.3	$\surd$	$\surd$	$\surd$	-
210	HIKHET	IV	17.11.2021	360	3.2	2.3	$\surd$	$\surd$	$\surd$	-
211	HIKHET	IV	17.11.2021	370	3.2	2.3	$\surd$	$\surd$	$\surd$	-
212	HIKHET	IV	17.11.2021	380	3.2	2.3	$\surd$	$\surd$	$\surd$	-
213	HIKHET	IV	17.11.2021	390	3.2	2.3	$\surd$	$\surd$	$\surd$	-
214	HIKHET	IV	17.11.2021	400	3.2	2.3	$\surd$	$\surd$	$\surd$	-
215	HIKHET	IV	17.11.2021	410	3.2	2.3	$\surd$	$\surd$	$\surd$	-
216	HIKHET	IV	17.11.2021	420	3.2	2.3	$\surd$	$\surd$	$\surd$	-
217	HIKHET	IV	17.11.2021	430	3.2	2.3	$\surd$	$\surd$	$\surd$	-
218	HIKHET	IV	17.11.2021	440	3.2	2.3	$\surd$	$\surd$	$\surd$	-
219	HIKHET	IV	17.11.2021	450	3.2	2.3	$\surd$	$\surd$	$\surd$	-
220	HIKHET	IV	17.11.2021	460	3.2	2.3	$\surd$	$\surd$	$\surd$	-
221	HIKHET	IV	17.11.2021	470	3.2	2.3	$\surd$	$\surd$	$\surd$	-
222	HIKHET	IV	17.11.2021	480	3.2	2.3	$\surd$	$\surd$	$\surd$	-
223	HIKHET	IV	17.11.2021	490	3.2	2.3	$\surd$	$\surd$	$\surd$	-
224	HIKHET	IV	17.11.2021	500	3.2	2.3	$\surd$	$\surd$	$\surd$	-
225	HIKHET	IV	17.11.2021	510	3.2	2.3	$\surd$	$\surd$	$\surd$	-
226	HIKHET	IV	17.11.2021	520	3.2	2.3	$\surd$	$\surd$	$\surd$	-
227	HIKHET	IV	17.11.2021	530	3.2	2.3	$\surd$	$\surd$	$\surd$	-
228	HIKHET	IV	17.11.2021	540	3.2	2.3	$\surd$	$\surd$	$\surd$	-
229	HIKHET	IV	17.11.2021	550	3.2	2.3	$\surd$	$\surd$	$\surd$	-
230	HIKHET	IV	17.11.2021	560	3.2	2.3	$\surd$	$\surd$	$\surd$	-

Tabela A.1: Tabela zawiera kolejno: numer pomiaru, nazwę silnika, którego pomiar dotyczył, datę wykonania pomiaru, napięcie wyładowania U_d $[V]$, prąd w cewce wewnętrzej (inn) i zewnętrznej (out) wyrażony w $[A]$, wykaz sond, które były używane podczas tego pomiaru (symbol $\surd$ oznacza, że dana sonda brała udział w badaniu) oraz informację, czy siła ciagu T była wtedy mierzona (symbol $\surd$ oznacza, że dokonano pomiaru siły ciągu).

Dodatek B

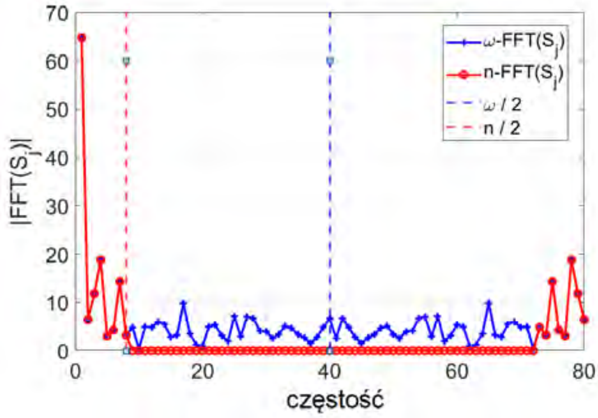
Metoda redukcji szumów

Aby móc skorzystać z algorytmu Sauera [198] służącego do redukcji szumu w sygnale przyjmuje się, że zebrane dane są wynikiem ciągłego procesu próbkowanego dyskretnie i równomiernie w czasie. Zakłada się również, że szum jest addytywny. Algorytm stanowi procedurę iteracyjną, gdzie po każdym przejściu przez dane gromadzone są poprawki i składa się z pięciu głównych kroków. Metoda opiera się na twierdzeniu zanurzeniowym Takensa przy użyciu współrzędnych generowanych przez lokalne filtrowanie dolnoprzepustowe. Lokalnie w przestrzeni zanurzenia rozkład według wartości osobliwych jest wykorzystywany do rzutowania sygnału wejściowego wzdłuż poprawnych kierunków w przestrzeni, co ma na celu rozróżnienie między dynamiką a szumem. Rozkład według wartości osobliwych jest metodą matematyczną służącą do redukcji wymiaru macierzy [96]. Aby dokonać takiego rozkładu użyto funkcji **svd** (ang. *singular value decomposition*) dostępnej w pakiecie *Matlab*.

W pierwszym kroku algorytmu należy cały sygnał podzielić na równe odcinki o długości w zwane oknami. Jak zasugerowano w [198] w oknie powinna się znajdować pojedyncza oscylacja badanego układu (tutaj przyjęto liczbę punktów pomiarowych $w = 500$ zawierającą się w 40 μs sygnału, co stanowi niewiele ponad czas trwania jednej oscylacji BM). Dla każdego okna oblicza się dyskretną transformatę Fouriera. Następnie należy wybrać wartość wymiaru zanurzenia taką, że: $n < w$ (tutaj przyjęto $n = 10$) i zastosować odwrotną transformatę Fouriera dla tej pomniejszonej liczby punktów. W ten sposób uzyskuje się n równomiernie rozmieszczonych próbek danego odcinka o długości w [198]. Powyższą operację należy wykonać dla każdego okna od x_1 do x_k, gdzie k jest liczbą okien.

W drugim kroku algorytmu dla każdego okna wybiera się promień hiperkuli R_s będący przybliżonym oszacowaniem rozmiaru szumu (1 odchylenie standardowe) i znajduje się punkty ze wszystkich pozostałych okien, które leżą w jej obrębie, gdzie współrzędne zanurzenia, definiujące środek kuli, w przestrzeni $\mathbb{R}^n$ to n liczb wyprowadzonych z odwrotnej transformaty Fouriera. Zanurzenie dolnoprzepustowe pozwala analizować informacje, które są nominalnie w-wymiarowe w przestrzeni n-wymiarowej, co robi znaczącą różnicę w przypadku gdy n jest małe w porównaniu z w [198].

Trzeci krok stanowi rzutowanie punktów z sąsiedztwa (czyli punktów leżących wewnątrz hiperkuli) na domniemany atraktor lub przynajmniej przesunięcie punktów w jego



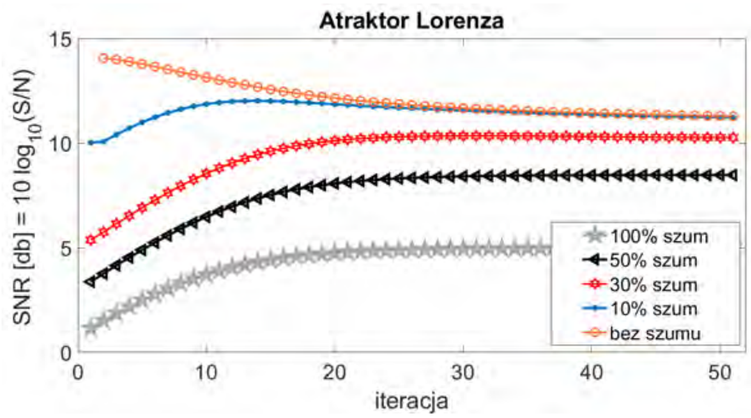
Rysunek B.1: Transformata Fouriera dla sygnału z pojedynczego okna o długości w (kolor niebieski) oraz transformata po wycięciu mocy dla wybranego przedziału częstości (kolor czerwony).

kierunku. Do wyznaczenia kierunków zbioru wektorów, które łączą środek masy punktów sąsiednich z punktami zanurzonymi wykorzystuje się rozkład według wartości osobliwych [97]. W tym miejscu algorytm wymaga dobrania przybliżonego lokalnego wymiaru zanurzenia badanego atraktora. W przypadku danych pochodzących z eksperymentu z silnikiem Halla wartość lokalnego wymiaru zanurzenia została ustalona na 3, co stanowi kompromis między poziomem czyszczenia, a zachowaniem złożoności badanego sygnału. Oznacza to, że brane były pod uwagę 3 pierwsze elementy macierzy diagonalnej uzyskanej na skutek rozkładu na wartości osobliwe. Powyżej opisane rzutowanie należy wykonać dla każdego okna od x_1 do x_k, gromadząc indywidualną liczbę poprawek dla każdego z nich.

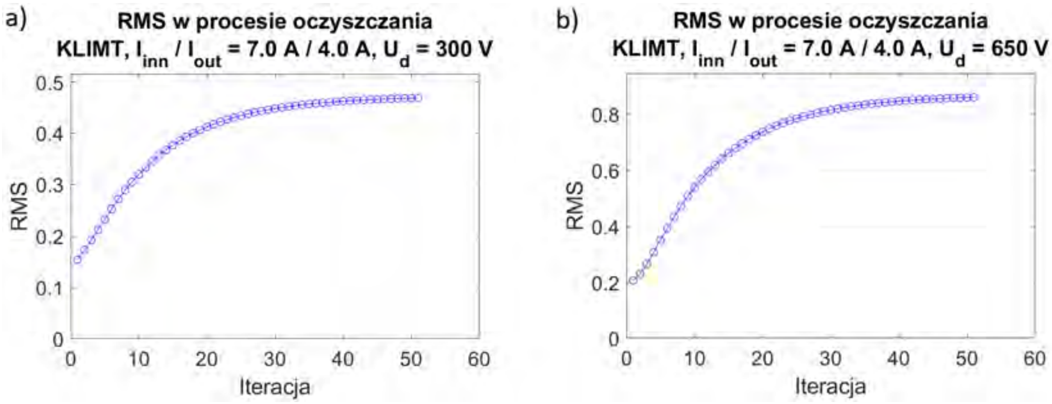
W kroku czwartym, po ustaleniu poprawek niezbędnych do rzutowania punktów na kierunki główne, wykonuje się transformatę Fouriera dla wszystkich poprawek i przechodzi się do układu w-punktowego poprzez wypełnienie części środkowej widma odpowiednią ilością zer, co przedstawiono na Rysunku B.1. Powyższą procedurę stosuje się też dla okien. Następnie wykorzystując fakt, że szum nie jest skorelowany z właściwym sygnałem, tzn. dla każdej zanurzonej współrzędnej szum losowy dla tej współrzędnej ma wartość oczekiwaną równą zero, w celu zminimalizowania wprowadzenia nowych korelacji w szumie, przetwarza się poprawki, aby upewnić się, że one również dodają się do zera. Przetwarzanie końcowe, polega na uśrednieniu poprawek dla danej współrzędnej w punktach w małym sąsiedztwie. Następnie od każdej korekty odejmowana jest średnia [198].

Na koniec, w piątym kroku algorytmu, najpierw do surowych danych, a potem do danych częściowo oczyszczonych, dodawana jest wielokrotność obliczonej korekty z zakresu od 0 do 1 (tutaj 0.1). Poprawki powinny być dodawane po każdym przejściu czterech opisanych wyżej kroków dopóki stosunek sygnału do szumu się nie ustabilizuje.

Na Rysunku B.2 przedstawiono wydajność zastosowania metody oczyszczania Sauera na układzie Lorenza. Wynika z niego, że algorytm pozwala poprawić stosunek amplitudy sygnału do amplitudy szumu o około 5 dB.

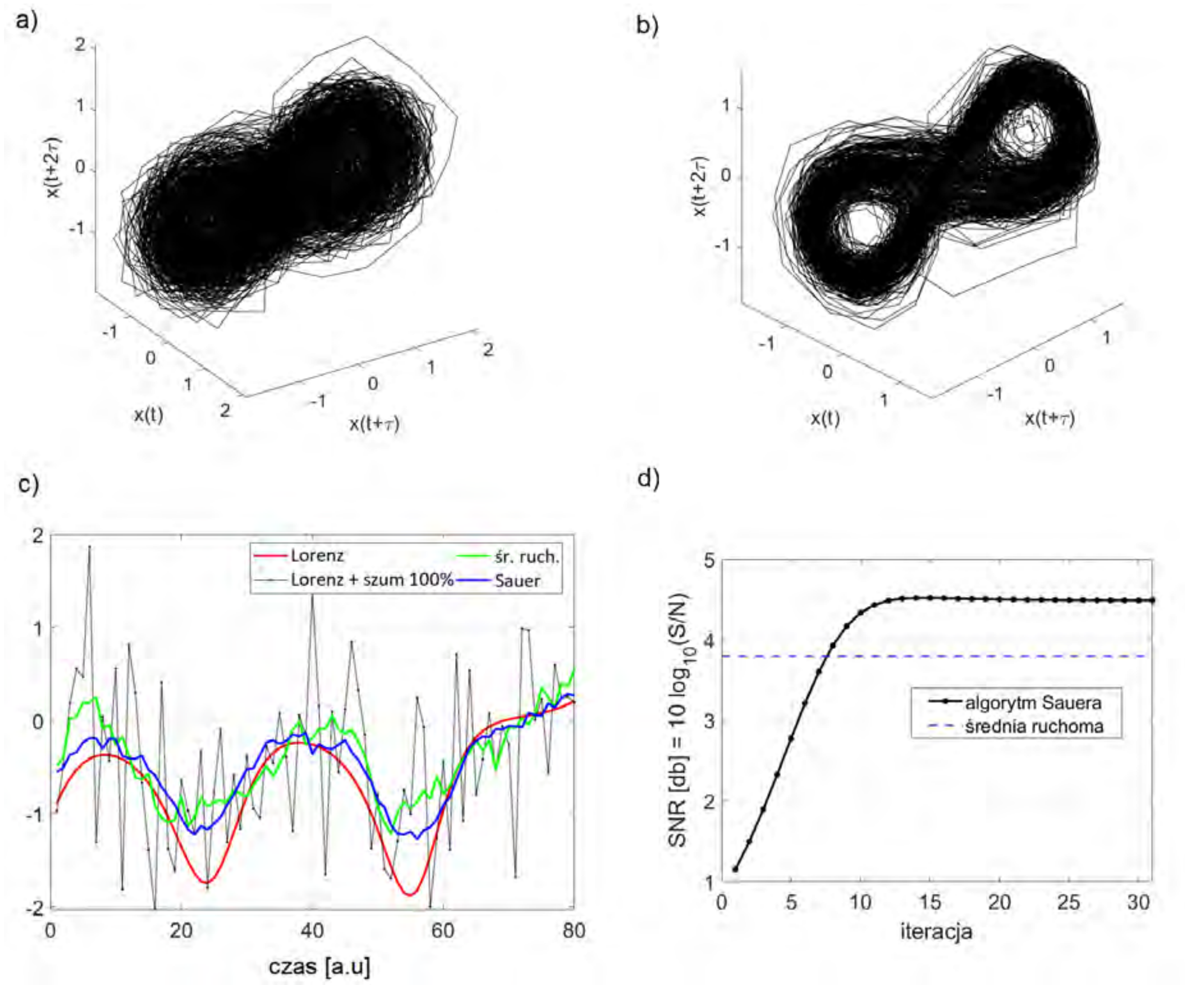


Rysunek B.2: Zmiana stosunku sygnału do szumu SNR w funkcji kroku iteracyjnego algorytmu Sauera w przypadku układu Lorenza dla różnych stopni zaszumienia sygnału.



Rysunek B.3: Średnia kwadratowa (RMS) prądu jonowego zebranego sondą FC w procesie oczyszczania w funkcji kroku iteracyjnego algorytmu Sauera dla dwóch przykładowych napięć: a) $U_d = 300$ V, b) $U_d = 650$ V.

Na Rysunku B.3 zaprezentowane zostały przykłady w jaki sposób średnia kwadratowa (RMS, ang. *Root Mean Square*) zmieniała się wraz ze wzrostem iteracji, tzn. wykreślona została wielkość redukcji szumów jako funkcja liczby przejść przez dane. Wyraźnie widać, że po początkowym wzroście poziom redukcji szumów się stabilizuje, co oznacza, że po 50-tym kroku można było zakończyć procedurę czyszczenia. RMS większą wartość osiąga dla wyższych napięć, co świadczy o tym, że w ich przypadku algorytm zredukował większy poziom szumu.



Rysunek B.4: Porównanie metody średniej ruchomej i metody Sauera.

Aby pokazać, że metoda zwykłej średniej ruchomej nie odtwarza kształtu atraktora umieszczono w rozprawie również Rysunek B.4, na którym przedstawiono kształty atraktorów po zastosowaniu metody średniej ruchomej (a) i metody Sauera (b). Panel (c) zawiera wycinki szeregów czasowych dla oryginalnych danych, danych po wprowadzeniu szumu oraz danych po zastosowaniu dwóch metod oczyszczania sygnału. Na panelu (d) przedstawiono wydajność zastosowania obu algorytmów. Wyraźnie widać, że metoda Sauera od pewnego kroku iteracji jest skuteczniejsza niż metoda średniej ruchomej.

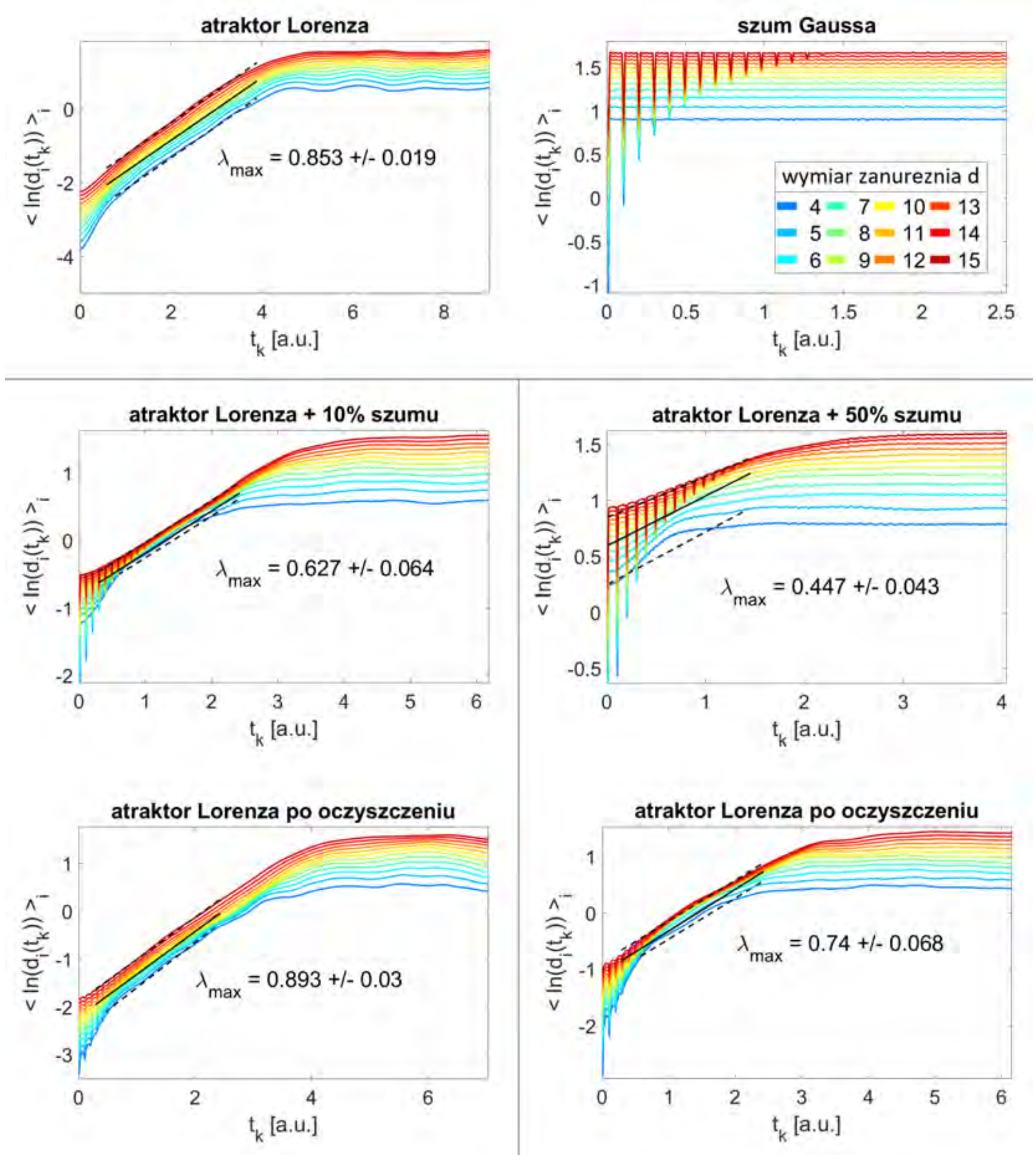
Dodatek C

Wyznaczanie λ_{max} dla układów referencyjnych

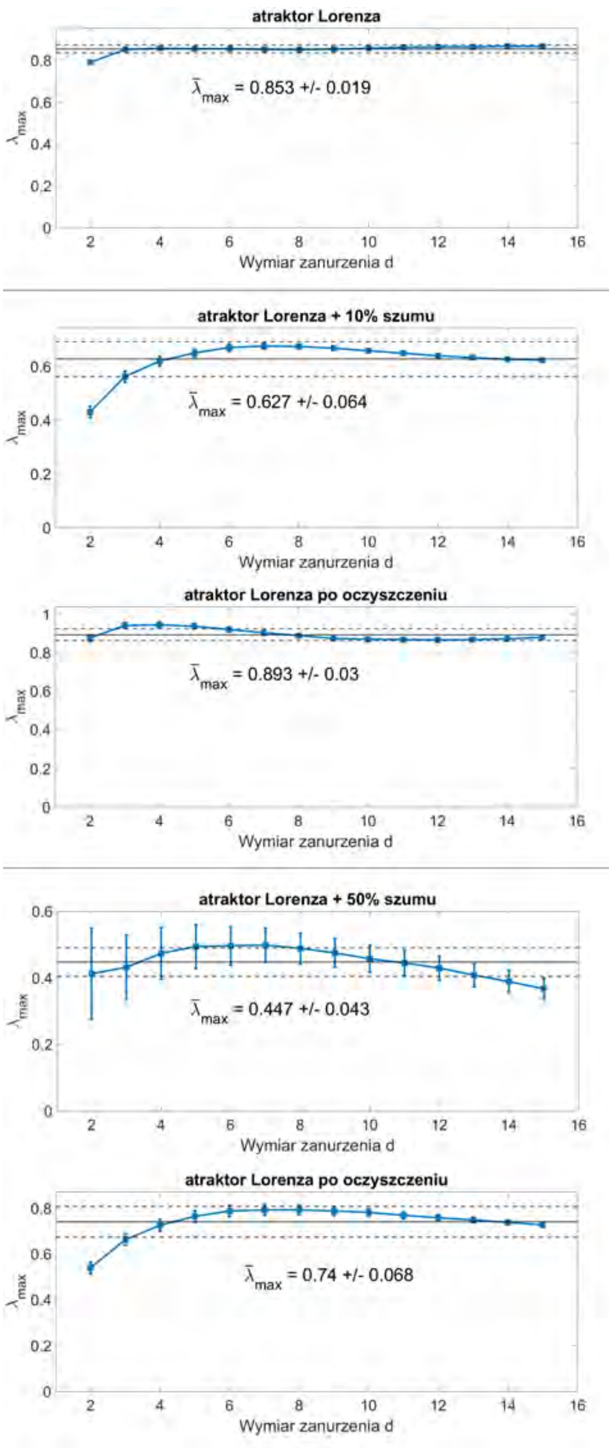
Gdy sygnały zawierają znaczącą domieszkę szumu poprawną wartość nachylenia krzywej rozbieżności trajektorii służącej do wyznaczenia największego wykładnika Lapunowa λ_{max} jest trudniej rozpoznać. Na Rysunku C.1 przedstawiono funkcje rozbieżności trajektorii w przestrzeni fazowej $\langle \ln d_i(t_k) \rangle_i$ dla atraktora Lorenza oraz dla szumu o rozkładzie normalnym. Na tym samym rysunku umieszczono również funkcje $\langle \ln d_i(t_k) \rangle_i$ dla atraktora Lorenza z dodanym 10 % i 50 % szumem. Następne zastosowano algorytm służący do redukcji szumu i przedstawiono te same funkcje dla odczyszczonych sygnałów.

Na przykładzie atraktora Lorenza wyraźnie widać, że szum szczególnie wpływa na dopasowaną prostą w najkrótszych skalach czasowych, prowadząc do fałszywych oscylacji okresowych i powodując, że nachylenie krzywej dopasowania maleje wraz ze wzrostem wymiaru zanurzenia, wpływając tym samym na globalną jakość dopasowania. W rezultacie szacowana wartość λ_{max} (z 10 % szumem wynosząca 0.627 ± 0.064, a z 50 % szumem wynosząca 0.447 ± 0.043) jest znacznie niższa niż pierwotna (0.853 ± 0.019 dla oryginalnego układu Lorenza). Problem ten można znacznie złagodzić dzięki algorytmowi redukcji szumów, który zmniejsza intensywność tych oscylacji i pozwala odzyskać szerszy zakres czasowy dla dobrego dopasowania λ_{max}. Szacowany największy wykładnik Lapunowa (równy odpowiednio 0.893 ± 0.03 i 0.74 ± 0.068) jest w ten sposób znacznie bliższy oryginalnemu, co przedstawia Rysunek C.2.

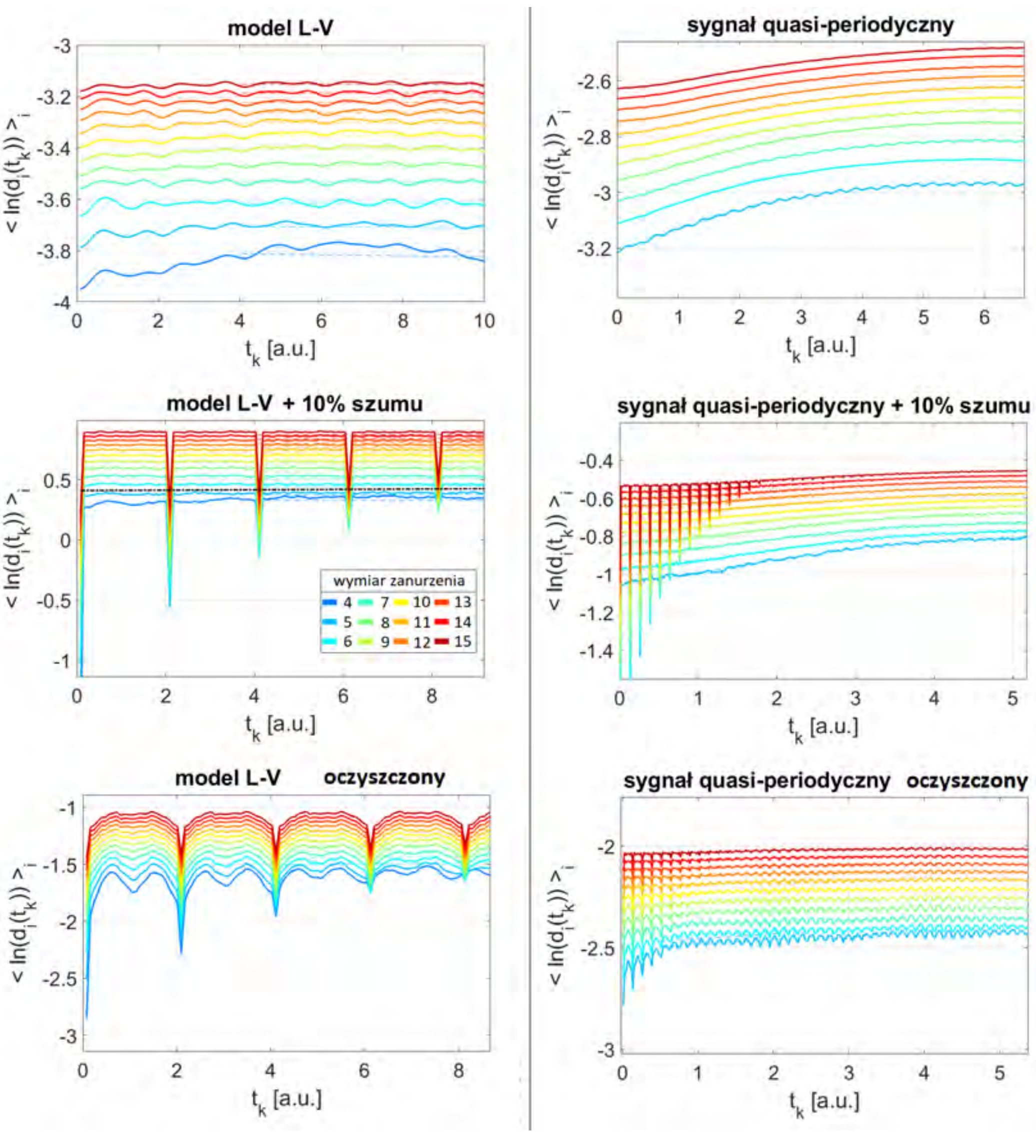
Dodatkowo na Rysunku C.3 zaprezentowano w jaki sposób zmieniają się kształty funkcji rozbieżności trajektorii $\langle \ln d_i(t_k) \rangle_i$ dla modelu L-V i sygnału quasi-periodycznego po dodaniu 10 % szumu, a następnie po zastosowaniu redukcji szumów metodą Sauera w stosunku do oryginalnych układów. Kształty funkcji zostają zdeformowane przez powstanie wyraźnych minimów pojawiających się z określoną czestotliwością.



Rysunek C.1: Porównanie funkcji rozbieżności trajektorii $\langle \ln d_i(t_k) \rangle_i$ dla atraktora Lorenza i szumu o rozkładzie normalnym (górny rząd), atraktora Lorenza z różnymi poziomami szumu (środkowy rząd) oraz atraktora Lorenza po redukcji szumu metodą Sauera (odpowiednio poniżej w dolnym rzędzie) dla wymiarów zanurzenia z przedziału $4 \leq d \leq 15$. Czarnym ciągłym odcinkiem zostało zaznaczone oszacowane nachylenie, a odcinkami przerywanymi oznaczono nachylenia dla $d = 4$ i $d = 15$.



Rysunek C.2: Wartości oszacowań największego wykładnika Lapunowa uzyskane z dopasowania prostej do funkcji rozbieżności trajektorii dla różnych wymiarów zanurzenia ($4 \leq d \leq 15$) dla atraktora Lorenza i tego samego atraktora z różnymi poziomami szumu oraz wyniki oszacowań największego wykładnika Lapunowa po oczyszczeniu sygnału metodą Sauera.



Rysunek C.3: Funkcje rozbieżności trajektorii $\langle \ln d_i(t_k) \rangle_i$ dla d z zakresu od 4 do 15 w przypadku wzbudzanego modelu L-V ($\omega = 2.7$) oraz sygnału quasi-okresowego, gdzie na górze znajdują się funkcje $\langle \ln d_i(t_k) \rangle_i$ wyznaczone dla oryginalnych danych, w środku dla danych z 10 % szumem, a na dole dla danych po zastosowaniu oczyszczającego algorytmu Sauera.

Bibliografia

[1] H. D. I. Abarbanel, R. Brown, J. J. Sidorowich, L. S. Tsimring, *The analysis of observed chaotic data in physical systems*, Reviews of Modern Physics, Vol. 65, iss. 4, 1331–1392, 1993.

[2] S. N. Abolmasov, *Physics and engineering of crossed-field discharge devices*, Plasma Sources Science and Technology, Vol. 21, iss. 3, 035006 (14 pp.), 2012.

[3] E. Ahedo, J. M. Gallardo, M. Martínez-Sánchez, *Effects of the radial plasma-wall interaction on the Hall thruster discharge*, Physics of Plasmas, Vol. 10, iss. 8, 3397–3409, 2003.

[4] E. Ahedo, P. Martínez-Cerezo, M. Martínez-Sánchez, *One-dimensional model of the plasma flow in a Hall thruster*, Physics of Plasmas, Vol. 8, iss. 6, 3058–3068, 2001.

[5] J. C. Albahaca, *Analytical and Numerical Study of the Poincaré Map with Applications on the Computation of Periodic Orbits*, Uppsala Universitet, U.U.D.M. Project Report, 2015.

[6] J. Argyris, G. Faust, M. Haase, R. Friedrich, *An Exploration of Dynamical Systems and Chaos*, Completely Revised and Enlarged Second Edition, Springer, 2015.

[7] Z. Asadi, F. Taccogna, M. Sharifian, *Numerical Study of Electron Cyclotron Drift Instability: Application to Hall Thruster*, Frontiers in Physics: Low-Temperature Plasma Physics, Vol. 7, 1–12, 2019.

[8] Y. Azziz, M. Martínez-Sánchez, J. J. Szabo, *Determination of In-Orbit Plume Characteristics from Laboratory Measurements*, 42nd AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference & Exhibit, AIAA 4484, USA, 2006.

[9] R. T. Baillie, A. A. Cecen, C. Erkal, *Normal heartbeat series are nonchaotic, nonlinear, and multifractal: New evidence from semiparametric and parametric tests*, Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science, Vol. 19, no. 2, 028503, 2009.

[10] P. Bak, K. Chen, *Self-organized criticality*, Scientific American, Vol. 264, iss. 1, 46–53, 1991.

[11] P. Bak, C. Tang, *Earthquakes as a self-organized critical phenomenon*, Journal of Geophysical Research: Solid Earth, Vol. 94, iss. B11, 15635–15637, 1989.

[12] P. Bak, C. Tang, K. Wiesenfeld, *Self-organized criticality: An explanation of* $1/f$ *noise*, Physical Review Letters, Vol. 59, no. 4, 381–384, 1987.

[13] G. L. Baker, J. P. Gollub, *Wstęp do układów chaotycznych*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1998.

[14] S. Barral, *Numerical Studies of Hall Thrusters Based on Fluid Equations for Plasma*, rozprawa doktorska, Instytut Podstawowych Problemów Techniki, Polska Akademia Nauk, Warszawa, 2003.

[15] S. Barral, E. Ahedo, *Low-frequency model of breathing oscillations in Hall discharges*, Physical Review E: Statistical, nonlinear, and soft matter physics, Vol. 79, iss. 4, 046401, 2009.

[16] S. Barral, J. Kurzyna, A. Szelecka, H. Rachubiński, E. Remírez, R. Martín, P. Ortiz, J. Alonso, S. Bottinelli, Y. Mabillard, A. Zaldívar, P. Rangsten, C. R. Koppel, *First Experimental Characterization of a Pulsed Plasma Thruster with Non-Volatile Liquid Propellant*, Space Propulsion Conference, Germany, 1–8, 2014.

[17] S. Barral, K. Makowski, Z. Peradzyński, M. Dudeck, *Transit-time instability in Hall thrusters*, Physics of Plasmas, Vol. 12, iss. 7, 1–9, 2005.

[18] S. Barral, K. Makowski, Z. Peradzyński, N. Gascon, M. Dudeck, *Wall material effects in stationary plasma thrusters.* II. *Near-wall and in-wall conductivity*, Physics of Plasmas, Vol. 10, iss. 10, 4137–4152, 2003.

[19] S. Barral, Z. Peradzyński, *Ionization oscillations in Hall accelerators*, Physics of Plasmas, Vol. 17, iss. 1, 014505 (4 pp.), 2010.

[20] R. Basiński, *Stabilizacja orbit okresowych w układach podatnych na chaos*, rozprawa doktorska, Wydział Elektryczny, Politechnika Warszawska, 2019.

[21] B. E. Beal, A. D. Gallimore, *Energy analysis of a Hall thruster cluster*, 28th International Electric Propulsion Conference, IEPC 035, France, 2003.

[22] V. I. Berkov, M. V. Kozintseva, E. V. Razikov, V. P. Sapelkina, A. V. Trofimov, *Properties of ceramics in the flow of accelerators with closed drift and extended acceleration*, 6th All-Union Conference on Plasma Accelerators and Ion Injectors ed A. I. Morozov (Dnepropetrovsk State University), USSR, 32, 1986.

[23] A. S. Bober, V. Kim, A. S. Koroteev, L. A. Latyshev, A. I. Morozov, G. A. Popov, Yu. P. Rylov, V. V. Zhurin, *State of the Works on Electrical Thrusters in USSR*, 22nd AIDAA/AIAA/DGLR/JSASS International Electric Propulsion Conference, IEPC 003, Italy, 1991.

[24] J. P. Boeuf, *Tutorial: Physics and modeling of Hall thrusters*, Journal of Applied Physics, Vol. 121, iss. 1, 011101, 2017.

[25] J. P. Boeuf, L. Garrigues, *Low frequency oscillations in a stationary plasma thruster*, Journal of Applied Physics, Vol. 84, iss. 7, 3541–3554, 1998.

[26] J. P. Boeuf, L. Garrigues, *E×B electron drift instability in Hall thrusters: Particle-in-cell simulations vs. theory*, Physics of Plasma, Vol. 25, iss. 6, 061204, 2018.

[27] M. Y. Boon, B. I. Henry, C. M. Suttle, S. J. Dain, *The correlation dimension: A useful objective measure of the transient visual evoked potential?*, Journal of Vision, Vol. 8, iss. 1, 1–21, 2008.

[28] I. D. Boyd, R. A. Dressler, *Far field modeling of the plasma plume of a Hall thruster*, Journal of Applied Physics, Vol. 92, iss. 4, 1764–1774, 2002.

[29] I. D. Boyd, M. L. Falk, *A Review of Spacecraft Material Sputtering by Hall Thruster Plumes*, 37th AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference & Exhibit, AIAA 3353, USA, 2001.

[30] D. L. Brown, A. D. Gallimore, *Evaluation of Ion Collection Area in Faraday Probes*, Review of Scientific Instruments, Vol. 81, iss. 6, 1–11, 2010.

[31] D. L. Brown, A. D. Gallimore, *Evaluation of Facility Effects on Ion Migration in a Hall Thruster Plume*, Journal of Propulsion and Power, Vol. 27, no. 3, 573–585, 2011.

[32] D. L. Brown, C. W. Larson, B. E. Beal, A. D. Gallimore, *Methodology and Historical Perspective of a Hall Thruster Efficiency Architecture*, Journal of Propulsion and Power, Vol. 25, no. 6, 1163–1177, 2009.

[33] D. L. Brown, C. W. Larson, J. M. Haas, A. D. Gallimore, *Analytical Extraction of Plasma Properties Using a Hall Thruster Efficiency Architecture*, 30th International Electric Propulsion Conference, IEPC 188, Italy, 2007.

[34] D. L. Brown, M. L. R. Walker, J. Szabo, W. Huang, J. E. Foster, *Recommended Practice for Use of Faraday Probes in Electric Propulsion Testing*, Journal of Propulsion and Power, Vol. 33, no. 3, 582–613, 2017.

[35] K. L. Brown, G. W. Tautfest, *Faraday cup monitors for highenergy electron beams*, Review of Scientific Instruments, Vol. 27, iss. 9, 696–702, 1956.

[36] P. Bryant, R. Brown, H. D. I. Abarbanel, *Lyapunov exponents from observed time series*, Physical Review Letters, Vol. 65, no. 13, 1523–1526, 1990.

[37] S. J. Buckman, B. Lohmann, *The total cross section for low-energy electron scattering from krypton*, Journal of Physics B: Atomic and Molecular Physics, Vol. 20, no. 21, 5807, 1987.

[38] A. I. Bugrova, A. I. Morozov, *Near wall conductivity. Plasma accelerators and ion injectors* (in Russian), Science, 189–200, 1984.

[39] C. Bundesmann, C. Eichhorn, F. Scholze, D. Spemann, H. Neumann, D. Pagano, S. Scaranzin, F. , H. J. Leiter, S. Gauter, R. Wiese, H. Kersten, K. Holste, P. Köhler, S. Mazouffre, R. Blott, A. Bulit, K. Dannenmayer, *An advanced electric propulsion diagnostic (AEPD) platform for in-situ characterization of electric propulsion thrusters and ion beam sources*, The European Physical Journal D: Atomic, Molecular, Optical and Plasma Physics, Vol. 70, iss. 10, 212 (11 pp.), 2016.

[40] J. C. Butcher, *The numerical analysis of ordinary differential equations. Runge–Kutta and general linear methods*, John Wiley & Sons Ltd., 1987.

[41] B. Cannas, A. Fanni, A. Murari, F. Pisano and JET Contributors, *Recurrence Plots for Dynamic Analysis of Type-*I *ELMs at JET With a Carbon Wall*, IEEE Transactions on Plasma Science, Vol. 47, no. 4, 1871–1877, 2019.

[42] E. D. Cantero, A. Sosa, W. Andreazza, E. Bravin, D. Lanaia, D. Voulot, C. P. Welsch, *Design of a compact Faraday cup for low energy, low intensity ion beams*, Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment, Vol. 807, 86–93, 2016.

[43] L. Cao, *Practical method for determining the minimum embedding dimension of a scalar time series*, Physica D: Nonlinear Phenomena, Vol. 110, iss. 1–2, 43–50, 1997.

[44] D. Chelidze, *Reliable Estimation of Minimum Embedding Dimension Through Statistical Analysis of Nearest Neighbors*, Journal of Computational and Nonlinear Dynamics, Vol. 12, iss. 5, 051024 (12 pp.), 2017.

[45] F. F. Chen, *Electric Probes*, in: R. H. Huddlestone and S. L. Leonard (eds.), Plasma Diagnostic Techniques, Chap. 4, 113–200, Academic Press, New York 1965.

[46] F. F. Chen, *Lecture notes on Langmuir probe diagnostics*, Mini-Course on Plasma Diagnostics, IEEE-ICOPS meeting, Korea, 2003.

[47] Y. Chen, *Zipf's law, $1/f$ noise, and fractal hierarchy*, Chaos, Solitons and Fractals, Vol. 45, iss. 1, 63–73, 2012.

[48] P. Y. Cheung, S. Donovan, A. Y. Wong, *Observations of Intermittent Chaos in Plasmas*, Physical Review Letters, Vol. 61, no. 12, 1360–1363, 1988.

[49] S. Chiriac, D. G. Dimitriu, M. Sanduloviciu, *Type* I *intermittency related to the spatiotemporal dynamics of double layers and ion-acoustic instabilities in plasma*, Physics of Plasmas, Vol. 14, iss. 7, 072309 (5 pp.), 2007.

[50] E. Y. Choueiri, *Characterization of Oscillations in Closed Drift Thrusters*, 30th AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference & Exhibit, AIAA 3013, USA, 1994.

[51] E. Y. Choueiri, *Plasma oscillations in Hall thrusters*, Physics of Plasmas, Vol. 8, iss. 4, 1411–1426, 2001.

[52] E. Y. Choueiri, *A critical history of electric propulsion: The first* 50 *years* (1906-1956), Journal of Propulsion and Power, Vol. 20, iss. 2, 193–203, 2004.

[53] P. M. Chung, L. Talbot, K. J. Touryan, *Electric Probes in Stationary and Flowing Plasmas: Theory and Application*, Applied Physics and Engineering, Vol. 11, Springer-Verlag New York Inc., 1975.

[54] K. E. Ciolkovskij, *Ausserhalb der Erde*, Heyne Verlag, Munich 1977.

[55] A. Cohen-Zur, A. Fruchtman, J. Ashkenazy, A. Gany, *Analysis of the steady-state axial flow in the Hall thruster*, Physics of Plasmas, Vol. 9, iss. 10, 4363–4374, 2002.

[56] R. J. Cybulski, D. M. Shellhammer, R. R. Lovell, E. J. Domino, J. T. Kotnik, *Results from SERT* I *ion rocket flight tests*, NASA Technical Note D-2718, 1965.

[57] J. Dabkowski, A. Posiewnik, *On some method of analysing time series*, Acta Physica Polonica B, Vol. 29, iss. 6, 1791–1794, 1998.

[58] J. W. Dankanich, M. L. R. Walker, M. W. Swiatek, J. T. Yim, *Recommended Practice for Pressure Measurement and Calculation of Effective Pumping Speed in Electric Propulsion Testing*, Journal of Propulsion and Power, Vol. 33, no. 3, 668–680, 2017.

[59] K. Dannenmayer, P. Kudrna, M. Tichy, S. Mazouffre, *Time-resolved measurement of plasma parameters in the far-field plume of a low-power Hall effect thruster*, Plasma Sources Science and Technology, Vol. 21, no. 5, 055020 (9 pp.), 2012.

[60] Y. Daren, D. Yongjie, Z. Shi, *Improvement on the Scaling Theory of the Stationary Plasma Thruster*, Journal of Propulsion and Power, Vol. 21, no. 1, 139–143, 2005.

[61] D. Delle Side, L. Velardi, E. Giuffreda, G. Buccolieri, A. De Benedittis, F. Paladini, N. Nassisi, *Study of Faraday cups for fast ion beams provided by a LIS source*, 4th Workshop – Plasmi, Sorgenti, Biofisica e Applicazioni, Italy, 2015.

[62] D. M. Di Cara, D. Estublier, *Smart*-1*: An analysis of flight data*, Acta Astronautica, Vol. 57, iss. 2–8, 250–256, 2005.

[63] P. Dietz, W. Gärtner, Q. Koch, P. E. Köhler, Y. Teng, P. R. Schreiner, K. Holste, P. J. Klar, *Molecular propellants for ion thrusters*, Plasma Sources Science and Technology, Vol. 28, no. 8, 084001, 2019.

[64] M. Ding, C. Grebogi, E. Ott, T. Sauer, J. A. Yorke, *Plateau onset for correlation dimension: When does it occur?*, Physical Review Letters, Vol. 70, no. 25, 3872–3875, 1993.

[65] Y. Ding, H. Su, H. Li, B. Jia, L. Wei, W. Peng, Y. Hu, W. Mao, D. Yu, *Measurement method for plume divergence angle of Hall thrusters*, Journal of Vacuum Science & Technology B, Vol. 37, iss. 1, 012902, 2019.

[66] Y. Ding, H. Su, P. Li, L. Wei, H. Li, W. Peng, Y. Xu, H. Sun, D. Yu, *Study of the catastrophic discharge phenomenon in a Hall thruster*, Physics Letters A, Vol. 381, iss. 40, 3482–3486, 2017.

[67] A. Ducrocq, J. C. Adam, A. Heron, G. Laval, *High-Frequency Electron Drift Instability in the Cross-field Configuration of Hall Thrusters*, Physics of Plasmas, Vol. 13, iss. 10, 102111 (8 pp.), 2006.

[68] J.-P. Eckmann, S. Oliffson Kamphorst, D. Ruelle, *Recurrence Plots of Dynamical Systems*, Europhysics Letters, Vol. 4, no. 9, 973–977, 1987.

[69] J.-P. Eckmann, D. Ruelle, *Ergodic theory of chaos and strange attractors*, Reviews of Modern Physics, Vol. 57, 617–656, 1985.

[70] J. M. Ekholm, W. A. Hargus, C. W. Larson, C. S. Niemela, *Plume Characteristics of the BHT-HD-*600 *Hall Thruster*, 42nd AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference & Exhibit, AIAA 4659, USA, 2006.

[71] Yu. B. Esipchuk, A. I. Morozov, G. N. Tilinin, A. V. Trofimov, *Plasma oscillations in closed-drift accelerators with an extended acceleration zone*, Soviet Physics: Technical Physics, Vol. 18, no. 7, 928–932, 1974.

[72] M. J. Feigenbaum, *Quantitative universality for a class of nonlinear transformations*, Journal of Statistical Physics, Vol. 19, iss. 1, 25–52, 1978.

[73] D. L. Feng, J. Zheng, W. Huang, C. X. Yu, W. X. Ding, *Type*-I-*like intermittent chaos in multicomponent plasmas with negative ions*, Physical Review E: Statistical Physics, Plasmas, Fluids and Related Interdisciplinary Topics, Vol. 54, no. 3, 2839–2843, 1996.

[74] E. Fernandez, M. K. Scharfe, C. A. Thomas, N. Gascon, M. A. Cappelli, *Growth of resistive instabilities in $E\times B$ plasma discharge simulations*, Physics of Plasmas, Vol. 15, iss. 1, 012102 (11 pp.), 2008.

[75] J. M. Fife, M. Martínez-Sánchez, J. J. Szabo, *A Numerical Study of Low-Frequency Discharge Oscillations in Hall Thrusters*, 33rd AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference & Exhibit, AIAA 3052, USA, 1997.

[76] A. Fote, S. Kohn, E. Fletcher, J. McDonough, *Application of chaos theory to $1/f$ noise*, Technical Report AD-A191 150/NTIS Technical Report no. SD-TR-88-29, 1988.

[77] A. M. Fraser, H. L. Swinney, *Independent coordinates for strange attractors from mutual information*, Physical Review A: Covering atomic, molecular, and optical physics and quantum information, Vol. 33, iss. 2, 1134, 1986.

[78] H. Frerichs, H. Kull, *Three-dimensional plasma transport in open chaotic magnetic fields: A computational assessment for tokamak edge layers*, PhD thesis, RWTH Aachen University, 2010.

[79] P. Fritzkowski, *O chaosie deterministycznym*, Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej, Poznań 2015.

[80] A. Fruchtman, N. J. Fisch, *Modeling the Hall thruster*, 34th AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference & Exhibit, AIAA 3500, USA, 1998.

[81] X. Gabaix, *Zipf's Law for Cities: An Explanation*, The Quarterly Journal of Economics, Vol. 114, no. 3, 739–767, 1999.

[82] X. Gabaix, P. Gopikrishnan, V. Plerou, H. E. Stanley, *A theory of power-law distributions in financial market fluctuations*, Nature, Vol. 423, iss. 6937, 267–270, 2003.

[83] Z. Galias, *Analiza i przetwarzanie sygnałów chaotycznych*, rozprawa doktorska, Wydział Elektrotechniki, Automatyki, Informatyki i Inżynierii Biomedycznej, Akademia Górniczo-Hutnicza, Kraków, 1995.

[84] P. P. Galuzio, S. R. Lopes, G. Z. dos Santos Lima, R. L. Viana, M. S. Benkadda, *Evidence of determinism for intermittent convective transport in turbulence processes*, Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, Vol. 402, 8–13, 2014.

[85] N. Gascon, C. Perot, S. Bechu, P. Lasgorceix, B. Izrar, M. Dudeck, G. Bonhomme, X. Caron, *Signal processing and non-linear behavior of a Stationary Plasma Thruster – First results*, 35th AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference & Exhibit, AIAA 2427, USA, 1999.

[86] S. Ghosh, P. K. Shaw, A. N. S. Iyengar, M. S. Janaki, D. Saha, A. M. Wharton, V. Mitra, *Experimental evidence of intermittent chaos in a glow discharge plasma without external forcing and its numerical modelling*, Physics of Plasmas, Vol. 21, iss. 3, 032303, 2014.

[87] R. Gilmore, *Topological analysis of chaotic dynamical systems*, Reviews of Modern Physics, Vol. 70, iss. 4, 1455–1529, 1998.

[88] L. Glass, *Introduction to Controversial Topics in Nonlinear Science: Is the Normal Heart Rate Chaotic?*, Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science, Vol. 19, iss. 2, 028501, 2009.

[89] J. Gleick, *Chaos. Narodziny Nowej Nauki*, Wydawnictwo Zysk i S-ka, Poznań 1996.

[90] V. P. Glushko, G. Langemak, *Rockets, Their Construction and Application*, Home Edition Aviation Literature, Moscow-Leningrad, USSR, 1935.

[91] R. H. Goddard, *A method of reaching extreme altitudes*, Nature, Vol. 105, iss. 2652, 809–811, 1920.

[92] R. H. Goddard, *Method of and means for producing electrified jets of gas*, U.S. patent 1,363,037, 1920.

[93] D. M. Goebel, I. Katz, *Fundamentals of Electric Propulsion: Ion and Hall Thrusters*, John Wiley & Sons, 2008.

[94] V. A. Godyak, B. M. Alexandrovich, *Comparative analyses of plasma probe diagnostics techniques*, Journal of Applied Physics, Vol. 118, iss. 23, 233302 (12 pp.), 2015.

[95] G. S. Gogna, *Study of Resonance Hairpin Probe for Electron Density Measurements in Low Temperature Plasmas*, PhD thesis, School of Physical Sciences, Dublin City University, 2012.

[96] G. Golub, W. Kahan, *Calculating the singular values and pseudo-inverse of a matrix*, Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics, Series B: Numerical Analysis, Vol. 2, no. 2, 205–224, 1965.

[97] G. Golub, C. Van Loan, *Matrix Computations*, 2nd ed. Johns Hopkins University Press, Baltimore 1989.

[98] J. Gonzalez del Amo, *Measurements of plasma parameters in the plume of electric propulsion thrusters – recent works performed at the ESA Propulsion Lab*, 34th International Electric Propulsion Conference, IEPC 062, Japan, 2015.

[99] T. Grabowski, *Zastosowanie metody Reccurence Plots w analizie danych pomiarowych*, Elektrotechnika i Elektronika, Tom 25, Zeszyt 2, 85–96, 2006.

[100] P. Grassberger, R. Hegger, H. Kantz, C. Schaffrath, T. Schreiber, *On noise reduction methods for chaotic data*, Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Sciences, Vol. 3, iss. 2, 127–141, 1993.

[101] C. Grebogi, E. Ott, S. Pelikan, J. A. Yorke, *Strange attractors that are not chaotic*, Physica D: Nonlinear Phenomena, Vol. 13, iss. 1–2, 354–373, 1985.

[102] C. Grebogi, E. Ott, J. A. Yorke, *Crises, sudden changes in chaotic attractors, and transient chaos*, Physica D: Nonlinear Phenomena, Vol. 7, iss. 1–3, 181–200, 1983.

[103] C. Grebogi, E. Ott, J. A. Yorke, *Attractors on an N-torus: Quasiperiodicity versus chaos*, Physica D: Nonlinear Phenomena, Vol. 15, iss. 3, 354–373, 1985.

[104] S. D. Grishin, L. V. Leskov, *Electric Rocket Thrusters of Space Apparatus* (in Russian), Mashinostroenie, Moscow 1989.

[105] K. H. de Grys, D. L. Tilley, R. S. Aadland, *BPT Hall Thruster Plume Characteristics*, 35th AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference & Exhibit, AIAA 2283, USA, 1999.

[106] J. M. Haas, F. S. Gulczinski, A. D. Gallimore, G. Spanjers, R. Spores, *Performance Characteristics of a Cluster of 5 kW Laboratory Hall Thruster*, 34th AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference & Exhibit, AIAA 3503, USA, 1998.

[107] K. Hara, I. D. Boyd, M. J. Sekerak, A. D. Gallimore, *Breathing mode in Hall effect thrusters*, 34th International Electric Propulsion Conference, IEPC 283, Japan, 2015.

[108] K. Hara, M. J. Sekerak, I. D. Boyd, A. D. Gallimore, *Mode transition of a Hall thruster discharge plasma*, Journal of Applied Physics, Vol. 115, iss. 20, 1–15, 2014.

[109] J. Harasimowicz, C. P. Welsch, L. Cosentino, A. Pappalardo, P. Finocchiaro, *Beam diagnostics for low energy beams*, Physical Review Special Topics – Accelerators And Beams, Vol. 15, iss. 12, 122801, 2012.

[110] W. A. Hargus, M. R. Nakles, *Hall Effect Thruster Ground Testing Challenges*, 25th Aerospace Testing Seminar, USA, 2009.

[111] B. Hendrickx, *A history of Soviet/Russian meteorological satellites*, Space Chronicle, Vol. 57, no. 1, 56–102, 2004.

[112] R. R. Hofer, A. D. Gallimore, *Efficiency Analysis of a High-Specific Impulse Hall Thruster*, 40th AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference & Exhibit, AIAA 3602, USA, 2004.

[113] R. R. Hofer, A. D. Gallimore, *High-Specific Impulse Hall Thrusters, Part 2: Efficiency Analysis*, Journal of Propulsion and Power, Vol. 22, no. 4, 732–740, 2006.

[114] R. R. Hofer, R. S. Jankovsky, A. D. Gallimore, *High-Specific Impulse Hall Thrusters, Part 1: Influence of Current Density and Magnetic Field*, Journal of Propulsion and Power, Vol. 22, iss. 4, 721–731, 2006.

[115] R. R. Hofer, M. L. R. Walker, A. D. Gallimore, *A Comparison of Nude and Collimated Faraday Probes for Use with Hall Thrusters*, 27th International Electric Propulsion Conference, IEPC 020, USA, 2001.

[116] K. Holste, P. Dietz, S. Scharmann, K. Keil, T. Henning, D. Zschätzsch, M. Reitemeyer, B. Nauschütt, F. Kiefer, F. Kunze, J. Zorn, C. Heiliger, N. Joshi, U. Probst, R. Thüringer, C. Volkmar, D. Packan, S. Peterschmitt, K. T. Brinkmann, H. G. Zaunick, M. H. Thoma, M. Kretschmer, H. J. Leiter, S. Schippers, K. Hannemann, P. J. Klar, *Ion thrusters for electric propulsion: Scientific issues developing a niche technology into a game changer*, Review of Scientific Instruments, Vol. 91, iss. 6, 061101, 2020.

[117] J. A. Hołyst, M. Żebrowska, K. Urbanowicz, *Observations of deterministic chaos in financial time series by recurrence plots, can one control chaotic economy?*, The European Physical Journal B: Condensed Matter and Complex Systems, Vol. 20, iss. 4, 531–535, 2001.

[118] J. D. Hunley, *The enigma of Robert H. Goddard*, Technology and Culture, Vol. 36, no. 2, 327–350, 1995.

[119] I. H. Hutchinson, *Principles of Plasma Diagnostics*, Cambridge University Press, New York 1987.

[120] M. Inoue, H. Kamifukumoto, *Scenarios Leading to Chaos in a Forced Lotka-Volterra Model*, Progress of Theoretical Physics, Vol. 71, iss. 5, 930–937, 1984.

[121] M. Jakubczak, J. Kurzyna, *HIKHET performances tests of the kick-off version*, Raport IFPiLM, Warszawa 2019.

[122] C. S. Janes, R. S. Lowder, *Anomalous electron diffusion and ion acceleration in a low density plasma*, The Physics of Fluids, Vol. 9, iss. 6, 1115–1123, 1966.

[123] A. Jardin, M. Jakubczak, A. Riazantsev, A. Jardin, J. Kurzyna, P. Lubiński, *Searching for Chaotic Behavior in the Ion Current Waveforms of a Hall Effect Thruster*, Journal of Fusion Energy, Vol. 41, iss. 2, 20, 2022.

[124] L. Jiayu, H. Zhiping, W. Yueke, S. Zhenken, *Selection of proper embedding dimension in phase space reconstruction of speech signals*, Journal of Electronics (China), Vol. 17, no. 2, 161, 2000.

[125] H. Kantz, T. Schreiber, *Dimension estimates and physiological data*, Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Sciences, Vol. 5, iss. 1, 143–154, 1995.

[126] T. Kapitaniuk, J. Wojewoda, *Bifurkacje i Chaos*, Wydawnictwo Politechniki Łódzkiej, Łódź 1995.

[127] H. R. Kaufman, *Technology of Electron-Bombardment Ion Thrusters*, Advances in Electronics and Electron Physics, Vol. 36, 265–373, 1975.

[128] M. Keidar, I. I. Beilis, *Electron Transport Phenomena in Plasma Devices with $E{\times}B$ Drift*, IEEE Transactions on Plasma Science, Vol. 34, iss. 3, 804, 2006.

[129] M. Keidar, I. D. Boyd, I. I. Beilis, *Plasma flow and plasma-wall transition in Hall thruster channel*, Physics of Plasmas, Vol. 8, iss. 12, 5315–5322, 2001.

[130] M. B. Kennel, R. Brown, H. D. Abarbanel, *Determining embedding dimension for phase-space reconstruction using a geometrical construction*, Physical Review A: Covering atomic, molecular, and optical physics and quantum information, Vol. 45, iss. 6, 3403, 1992.

[131] W. R. Kerslake, R. G. Goldman, W. C. Nieberding, *SERT*-II*: mission, thruster performance, and in-flight thrust measurements*, Journal of Spacecraft Rockets, Vol. 8, 213–224, 1971.

[132] V. Khayms, M. Martínez-Sánchez, *Design of a Miniaturized Hall Thruster for Microsatellites*, 32nd AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference & Exhibit, AIAA 3291, USA, 1996.

[133] S.-W. Kim, A. D. Gallimore, *Plume study of a* 1.35-*kW SPT*-100 *using an* $E{\times}B$ *probe*, Journal of Spacecraft and Rockets, Vol. 39, no. 6, 904–909, 2002.

[134] V. Kim, *Main Physical Features and Processes Determining the Performance of Stationary Plasma Thrusters*, Journal of Propulsion and Power, Vol. 14, no. 5, 736–743, 1998.

[135] V. Kim, G. Popov, B. Arkhipov, V. Murashko, O. Gorshkov, A. Koroteyev, V. Garkusha, A. Semenkin, S. Tverdokhlebov, *Electric Propulsion Activity in Russia*, 27th International Electric Propulsion Conference, IEPC 005, USA, 2001.

[136] V. Kim, G. Popov, V. Kozlov, A. Skrylnikov, D. Grdlichko, *Investigation of SPT performance and particularities of its operation with Kr and Kr/Xe mixtures*, 27th International Electric Propulsion Conference, IEPC 065, USA, 2001.

[137] M. Koebbe, G. Mayer-Kress, *Use of recurrence plots in the analysis of time-series data*, in: M. Casdagli, S. Eubank (eds.), Proceedings of SFI Studies in the Science of Complexity, Vol. XXI, Reading, Massachusetts: Addison-Wesley Publishing Company, 1992.

[138] G. Kornfeld, N. Koch, G. Coustou, *The highly efficient multistage plasma (HEMP) thruster, a new electric propulsion concept derived from tube technology*, 4th IEEE International Conference on Vacuum Electronics, Korea, 2003.

[139] E. J. Kostelich, T. Schreiber, *Noise reduction in chaotic time-series data: A survey of common methods*, Physical Review E: Covering statistical, nonlinear, biological, and soft matter physics, Vol. 48, iss. 3, 1752–1763, 1993.

[140] E. J. Kostelich, J.A. Yorke, *Noise reduction in dynamical systems*, Physical Review A: Covering atomic, molecular, and optical physics and quantum information, Vol. 38, iss. 3, 1649–1652, 1988.

[141] E. J. Kostelich, J. A. Yorke, *Noise reduction: Finding the simplest dynamical system consistent with the data*, Physica D: Nonlinear Phenomena, Vol. 41, iss. 2, 183–196, 1990.

[142] J. Kudrewicz, *Fraktale i chaos*, Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, Warszawa 1993.

[143] J. Kurzyna, *Searching for chaos in fluctuations of a plasma induced during cw-*CO_2 *laser welding*, Journal of Physics D: Applied Physics, Vol. 31, no. 6, 680, 1998.

[144] J. Kurzyna, M. Jakubczak, A. Szelecka, K. Dannenmayer, *Performance tests of IPPLM's krypton Hall thruster*, Laser and Particle Beams, Vol. 36, iss. 1, 105–114, 2018.

[145] J. Kurzyna, M. Jakubczak, A. Szelecka, A. Riazantsev, *Preliminary Tests of HIKHET Laboratory Model at IFPiLM*, 36th International Electric Propulsion Conference, IEPC 591, Austria, 2019.

[146] J. Kurzyna, S. Mazouffre, A. Lazurenko, L. Albarède, *Spectral analysis of Hall-effect thruster plasma oscillations based on the empirical mode decomposition*, Physics of Plasmas, Vol. 12, iss. 12, 123506 (13 pp.), 2005.

[147] K. Kwon, M. L. R. Walker, D. N. Mavris, *Self-consistent, one-dimensional analysis of the Hall effect thruster*, Plasma Sources Science and Technology, Vol. 20, no. 4, 045021 (15 pp.), 2011.

[148] T. Lafleur, *Electron drift instabilities in E$\times$B plasmas: kinetic theory and PIC simulations*, E$\times$B Plasmas for Space and Industrial Applications, France, 2017.

[149] T. Lafleur, S. D. Baalrud, P. Chabert, *Theory for the anomalous electron transport in Hall effect thrusters.* I. *Insights from particle-in-cell simulations*, Physics of Plasmas, Vol. 23, iss. 5, 053502, 2016.

[150] T. Lafleur, S. D. Baalrud, P. Chabert, *Theory for the anomalous electron transport in Hall effect thrusters.* II. *Kinetic model*, Physics of Plasmas, Vol. 23, iss. 5, 053502, 2016.

[151] T. Lafleur, P. Chabert, A. Bourdon, *The origin of the breathing mode in Hall thrusters and its stabilization*, Journal of Applied Physics, Vol. 130, iss. 5, 053305, 2021.

[152] C. Letellier, *Chaos in Nature*, World Scientific Series on Nonlinear Science Series A, Vol. 81, 2012.

[153] J. A. Linnell, A. D. Gallimore, *Efficiency analysis of a Hall Thruster operating with krypton and xenon*, 41st AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference & Exhibit, AIAA 3683, USA, 2005.

[154] B. Lipschultz, I. Hutchinson, B. LaBombard, A. Wan, *Electric probes in plasmas*, Journal of Vacuum Science & Technology A, Vol. 4, iss. 3, 1810–1816, 1986.

[155] H. Löb, *Ein elektrostatisches raketentriebwerk mit hochfrequenzionenquelle*, Astronautica Acta, Vol. VIII, fasc. 1, 49, 1962.

[156] E. N. Lorenz, *Deterministic non-periodic flow*, Journal of the Atmospheric Sciences, Vol. 20, iss. 2, 130–141, 1963.

[157] S. M. Malik, R. P. Fetherston, K. Sridharan, J. R. Conrad, *Sheath dynamics and dose analysis for planar targets in plasma source ion implantation*, Plasma Sources Science and Technology, Vol. 2, iss. 2, 81–85, 1993.

[158] D. Mandal, Y. Elskens, N. Lemoine, F. Doveil, *Cross-field chaotic transport of electrons by E$\times$B electron drift instability in Hall thrusters*, Physics of Plasmas, Vol. 27, iss. 3, 032301, 2020.

[159] P. Manneville, Y. Pomeau, *Intermittency and the Lorenz model*, Physics Letters A, Vol. 75, iss. 1–2, 1–2, 1979.

[160] X. Mao, G. Marion, E. Renshaw, *Environmental Brownian noise suppresses explosions in population dynamics*, Stochastic Processes and their Applications, Vol. 97, iss. 1, 95–110, 2002.

[161] S. Marini, R. Pakter, *Single electron dynamics in a Hall thruster electromagnetic field profile*, Physics of Plasmas, Vol. 24, iss. 5, 053507, 2017.

[162] N. Marwan, *A historical review of recurrence plots*, The European Physical Journal, Special Topics, Vol. 164, iss. 1, 3–12, 2008.

[163] N. Marwan, M. C. Romano, M. Thiel, J. Kurths, *Recurrence plots for the analysis of complex systems*, Physics Reports, Vol. 438, iss. 5–6, 237–329, 2007.

[164] N. Marwan, N. Wessel, U. Meyerfeldt, A. Schirdewan, J. Kurths, *Recurrence-plot-based measures of complexity and their application to heart-rate-variability data*, Physical Review E: Statistical, nonlinear, and soft matter physics, Vol. 66, iss. 2, 026702, 2002.

[165] J. Mashford, P. Koltun, Y. S. Yang, *An approach to hydraulic machine evaluation using classification of symmetrised dot patterns*, SETE Systems Engineering Test & Evaluation Conference, Australia, 2007.

[166] S. Mazouffre, G. Largeau, *Evaluation of various probe designs for measuring the ion current density in a Hall thruster plume*, 35th International Electric Propulsion Conference, IEPC 336, 2017.

[167] M. McDonald, C. Bellant, A. S. P. Brandon, A. D. Gallimore, *Measurement of cross-field electron current in a Hall thruster due to rotating spoke instabilities*, 47th AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference & Exhibit, AIAA 5810, USA, 2011.

[168] C. J. McMahon, J. P. Toomey, D. M. Kane, *Insights on correlation dimension from dynamics mapping of three experimental nonlinear laser systems*, PLOS ONE, Vol. 12, iss. 8, 2017.

[169] R. M. Meyers, S. R. Oleson, M. McGuire, J. Meckel, J. R. Cassady, *Pulsed plasma thruster technology for small satellite missions*, 9th AIAA/Utah State University Conference on Small Satellites, USA, 1995.

[170] S. R. Mohanty, H. Bhuyan, N. K. Neog, R. K. Rout, E. Hotta, *Development of Multi Faraday Cup Assembly for Ion Beam Measurements from a Low Energy Plasma Focus Device*, Japanese Journal of Applied Physics, Vol. 44, iss. 7A, 5199–5205, 2005.

[171] R. Moloney, A. Lucca Fabris, D. Staab, A. Frey, A. Garbayo, L. Shadbolt, *Space travel, electric propulsion, and science fiction*, 77th World Science Fiction Convention, Ireland, 2019.

[172] F. C. Moon, P. J. Holmes, *A magnetoelastic strange attractor*, Journal of Sound and Vibration, Vol. 65, iss. 2, 275–296, 1979.

[173] A. I. Morozov, *Stationary plasma thruster (SPT), development steps, and future perspectives*, 23rd AIAA/AIDAA/DGLR/JSASS International Electric Propulsion Conference, IEPC 101, USA, 1993.

[174] A. I. Morozov, *The conceptual development of stationary plasma thrusters*, Plasma Physics Report, Vol. 29, iss. 3, 235–250, 2003.

[175] A. I. Morozov, Y. V. Esipchuk, A. M. Kapulkin, V. A. Nevrovskii, V. A. Smirnov, *Effect of the magnetic field on a closed-electron-drift accelerator*, Soviet Physics: Technical Physics, Vol. 17, no. 3, 482, 1972.

[176] S. Nee, *Survival and weak chaos*, Royal Society Open Science, Vol. 5, iss. 5, 172181 (15 pp.), 2018.

[177] M. Nowiński, *Nowoczesna analiza wizualna ekonomicznych szeregów czasowych*, Studia Ekonomiczne, Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego w Katowicach, Nr 237, 79–91, 2015.

[178] H. Oberth, *Wege zur Raumschiffahrt*, R. Oldenbourg Verlag, München-Berlin 1923.

[179] H. Oberth, *Die Rakete zu den Planetenräumen*, R. Oldenbourg Verlag, München-Berlin 1929.

[180] E. Ott, *Chaos w układach dynamicznych*, Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, Warszawa 1997.

[181] E. Ott, M. Spano, *Controlling chaos*, Physics Today, Vol. 48, no. 5, 34–40, 1995.

[182] N. H. Packard, J. P. Crutchfield, J. D. Farmer, R. S. Shaw, *Geometry from a Time Series*, Physical Review Letters, Vol. 45, no. 9, 712, 1980.

[183] D. Pagnon, S. Roche, L. Magne, M. Touzeau, S. Bechu, P. Lasgorceix, F. Darnon, A. Bouchoule, *Time resolved characterization of the plasma and the plume of a SPT thruster*, 35th AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference & Exhibit, AIAA 2428, USA, 1999.

[184] J. S. Pearlman, *Faraday cups for laser plasmas*, Review of Scientific Instruments, Vol. 48, iss. 8, 1064–1067, 1977.

[185] Z. Peradzyński, S. Barral, J. Kurzyna, K. Makowski, M. Dudeck, *Chaotic waves in Hall thruster plasma*, AIP Conference Proceedings, Vol. 812, iss. 1, 173–176, 2006.

[186] C. A. Pickover, *Computers, pattern, chaos, and beauty*, St. Martin's Press, New York 1990.

[187] J. Piskorski, P. Guzik, *Filtering Poincaré plots*, Computational Methods in Science and Technology, Vol. 11, no. 1, 39–48, 2007.

[188] V. Plerou, P. Gopikrishnan, L. A. Nunes Amaral, X. Gabaix, H. E. Stanley, *Economic fluctuations and anomalous diffusion*, Physical Review E: Statistical physics, plasmas, fluids, and related interdisciplinary topics, Vol. 62, no. 3, 3023–3026, 2000.

[189] D. M. W. Powers, *Applications and explanations of Zipf's law*, Joint Conferences on New Methods in Language Processing and Computational Natural Language Learning, USA, 1998.

[190] D. Rafalskyi, J. M. Martínez, L. Habl, E. Z. Rossi, P. Proynov, A. Boré, T. Baret, A. Poyet, T. Lafleur, S. Dudin, A. Aanesland, *In-orbit demonstration of an iodine electric propulsion system*, Nature, Vol. 599, 411–415, 2021.

[191] B. M. Reid, R. Shastry, A. D. Gallimore, R. R. Hofer, *Angularly-Resolved* $E{\times}B$ *Probe Spectra in the Plume of a* 6*-kW Hall Thruster*, 44th AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference & Exhibit, AIAA 5287, USA, 2008.

[192] K.-U. Riemann, *The Bohm criterion and sheath formation*, Journal of Physics D: Applied Physics, Vol. 24, no. 4, 493–518, 1991.

[193] M. T. Rosenstein, J. J. Collins, C. J. De Luca, *A practical method for calculating largest Lyapunov exponents from small data sets Author links open overlay panel*, Physica D: Nonlinear Phenomena, Vol. 65, iss. 1–2, 117–134, 1993.

[194] O. E. Rössler, *An Equation for Continuous Chaos*, Physics Letters A, Vol. 57, iss. 5, 397–398, 1976.

[195] J. L. Rovey, M. L. R. Walker, A. D. Gallimore, *Magnetically filtered Faraday probe for measuring the ion current density profile of a Hall thruster*, Review of Scientific Instruments, Vol. 77, iss. 1, 013503, 2006.

[196] R. Roy, T. W. Murphy, T. D. Maier, Z. Gills, E. R. Hunt, *Dynamical control of a chaotic laser: Experimental stabilization of a globally coupled system*, Physical Review Letters, Vol. 68, no. 9, 1259–1262, 1992.

[197] B. Saltzman, *Finite Amplitude Free Convection as an Initial Value Problem*, Journal for the Atmospheric Sciences, Vol. 19, iss. 4, 329–341, 1962.

[198] T. Sauer, *A noise reduction method for signals from nonlinear systems*, Physica D: Nonlinear Phenomena, Vol. 58, iss. 1–4, 193–201, 1992.

[199] T. Sauer, J. A. Yorke, M. Casdagli, *Embedology*, Journal of Statical Physics, Vol. 65, iss. 3–4, 579–616, 1991.

[200] F. Sauli, *Gaseous Radiation Detectors: Fundamentals and Applications*, Cambridge Monographs on Particle Physics, Nuclear Physics and Cosmology, no. 36, Cambridge University Press 2014.

[201] W. Schottky, *Concerning the Discharge of Electrons from Hot Wires with Delayed Potential*, Annalen der Physik, Vol. 44, no. 15, 1011–1032, 1914.

[202] H. G. Schuster, *Chaos deterministyczny. Wprowadzenie*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1993.

[203] M. J. Sekerak, R. R. Hofer, J. E. Polk, B. W. Longmier, A. D. Gallimore, D. L. Brown, *Mode Transitions in Hall Effect Thrusters*, 49th AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference & Exhibit, AIAA 4116, USA, 2013.

[204] M. J. Sekerak, *Plasma Oscillations and Operational Modes in Hall Effect Thrusters*, PhD thesis, University of Michigan, 2014.

[205] M. J. Sekerak, B. W. Longmier, A. D. Gallimore, D. L. Brown, R. R. Hofer, J. E. Polk, *Azimuthal Spoke propagation in Hall effect thrusters*, IEEE Transactions of Plasma Science, Vol. 43, iss. 1, 72, 2015.

[206] R. L. Seliger, *$E\times B$ mass-separator design*, Journal of Applied Physics, Vol. 43, no. 5, 2352, 1972.

[207] A. A. Semenov, I. I. Shkarban, *Erosion of surfaces of construction elements by ion flows from ion–plasma sources* (in Russian), in: V. A. Petrosov (ed), Rocket-Space Techniques, 42–53, Research Institute of Thermal Processes, Moscow 1991.

[208] , K. Saleh, R. Henriet, S. Diallo, G. Lin, R. Martinenghi, I. Balakireva, P. Salzenstein, A. Coillet, Y. Chembo , *Phase noise performance comparison between optoelectronic oscillators based on optical delay lines and whispering gallery mode resonators*, Optics Express, Vol. 22, iss. 26, 32158–32173, 2014.

[209] A. Shapoval, B. Shapoval, M. Shnirman, *$1/x$ power-law in a close proximity of the Bak–Tang–Wiesenfeld sandpile*, Scientific Reports, Vol. 11, no. 1, 18151, 2021.

[210] R. Shaw, *The Dripping Faucet As a Model Chaotic System*, The Science Frontier Express Series, Aerial Press, 1984.

[211] J. P. Sheehan, N. Hershkowitz, *Emissive Probes*, Plasma Sources Science and Technology, Vol. 20, no. 6, 063001, 2011.

[212] L. R. Shepherd, A. V. Cleaver, *The Atomic Rocket* I-IV, Journal of British Interplanetary Society, I: Vol. 7, no. 5, 9, 1948; II: Vol. 7, no. 6, 11, 1948; III: Vol. 8, no. 1, 1, 1949; IV: Vol. 8, no. 2, 1, 1949.

[213] M. Škorić, M. Rajković, *Characterization of Intermittency in Plasma Edge Turbulence,* Contribution to Plasma Physics, Vol. 48, iss. 1–3, 37–41, 2008.

[214] A. Snyder, H. Kamhawi, M. Patterson, M. Britton, *Single-String Integration Test Measurements of the NEXT Ion Engine Plume*, 40th AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference & Exhibit, AIAA 3790, USA, 2004.

[215] A. G. Sosa, E. Bravin, E. D. Cantero, C. P. Welsch, *Optimization of a Short Faraday Cup for Low-Energy Ions using Numerical Simulations*, 3rd International Beam Instrumentation Conference, WEPF 07, USA, 2014.

[216] J. C. Sprott, *Chaos and Time-Series Analysis*, Oxford University Press, 2003.

[217] C. Stan, C. P. Cristescu, D. G. Dimitriu, *Analysis of the intermittent behavior in a low-temperature discharge plasma by recurrence plot quantification*, Physics of Plasmas, Vol. 17, iss. 4, 042115, 2010.

[218] E. Stuhlinger, *Ion Propulsion for Space Flight*, McGraw-Hill Series in Missile and Space Technology, McGraw-Hill Book Company, New York 1964.

[219] A. Szelecka, *Advanced laboratory for testing plasma thrusters and Hall thruster measurement campaign*, Nukleonika, Vol. 61, no. 2, 213–218, 2016.

[220] A. Szelecka, M. Jakubczak, A. Riazantsev, J. Kurzyna, *Study of plasma dynamics in the HET relying on global thruster characteristics parameterized with discharge voltage*, The European Physical Journal Plus, Vol. 136, iss. 7, 782 (23 pp.), 2021.

[221] A. Szelecka, J. Kurzyna, L. Bourdain, *Thermal stability of the krypton Hall effect thruster*, Nukleonika, Vol. 62, no. 1, 9–15, 2017.

[222] A. Szelecka, J. Kurzyna, D. Daniłko, S. Barral, *Liquid micro pulsed plasma thruster*, Nukleonika, Vol. 60, no. 2, 257–261, 2015.

[223] M. Szydłowski, A. Krawiec, *Złożone zachowanie prostych układów nieliniowych*, Filozofia Nauki, Rok VI, nr 3–4, 77–93, 1998.

[224] F. Takens, *Detecting strange attractors in turbulence*, in: D. A. Rand and L. S. Young (eds.), Dynamical Systems and Turbulence, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 898, Springer-Verlag New York Inc., 1981.

[225] K. Taniguchi, H. Kuwae, N. Hayashi, Y. Kawai, *Observation of type-1 intermittency caused by current-driven ion acoustic instability*,Physics of Plasmas, Vol. 5, iss. 2, 401–405, 1998.

[226] M. Tempczyk, *Świat harmonii i chaosu*, Państwowy Instytut Wydawniczy, Warszawa 1995.

[227] M. Tempczyk, *Teoria chaosu dla odważnych*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2002.

[228] D. J. Thomson, *Spectrum estimation and harmonic analysis*, Journals & Magazines, Proceedings of the IEEE, Vol. 70, iss. 9, 1055–1096, 1982.

[229] D. Toker, F. T. Sommer, M. D'Esposito, *A simple method for detecting chaos in nature*, Communications Biology, Vol. 3, 11, 2020.

[230] T. Tondu, J.-P. Chardon, S. Zurbach, *Sputtering yield of potential ceramics for Hall Effect Thruster discharge channel*, 32nd International Electric Propulsion Conference, IEPC 106, Germany, 2011.

[231] C. Touzé, A. Chaigne, *Lyapunov Exponents from Experimental Time Series: Application to Cymbal Vibrations*, Acta Acustica united with Acustica, Vol. 86, no. 3, 557–567, 2000.

[232] K. E. Tsiolkovskiy, *Collected Works of K. E. Tsiokovskiy, Volume II – Reactive Flying Machines*, Academy of Sciences, USSR, 1948.

[233] W. Tucker, *Computing accurate Poincaré maps*, Physica D: Nonlinear Phenomena, Vol. 171, iss. 3, 127–137, 2002.

[234] R. K. Upadhyay, S. R. K. Iyengar, *Introduction to Mathematical Modeling and Chaotic Dynamics*, 1st edition, Chapman and Hall Book/CRC Press Taylor and Francis Group, New York 2019.

[235] S. P. Vakhnjuk, A. M. Kapulkin, V. F. Prisnjakov, *Stabilization of plasma instabilities in accelerators with closed electron drift by boundary system of feedback* (in Russian), in: A. I. Morozov and N. N. Semashko (eds.), Ion Injectors and Plasma Accelerators, 78–86, Energoatomizdat, Moscow 1990.

[236] J. Vaudolon, *Electric field determination and magnetic topology optimization in Hall thrusters*, PhD thesis, University of Orléans, 2015.

[237] K. Vibe, J.-M. Vesin, *On chaos detection methods*, International Journal of Bifurcation and Chaos, Vol. 6, iss. 3, 529–543, 1996.

[238] M. L. R. Walker, *Effects of facility backpressure on the performance and plume of a Hall thruster*, PhD thesis, University of Michigan, 2005.

[239] C. Wang, L. Wei, D. R. Yu, *A Basic Predator-Prey Type Model for Low Frequency Discharge Oscilations in Hall Thrusters, Contributions to Plasma Physics*, Vol. 51, iss. 10, 981–988, 2011.

[240] C. L. Webber, N. Marwan, *Recurrence Quantification Analysis: Theory and Best Practices*, Springer series: Understanding Complex Systems, Springer International Publishing, 2015.

[241] C. L. Webber, J. P. Zbilut, *Embeddings and delays as derived from quantification of recurrence plots*, Physics Letters A, Vol. 171, iss. 3–4, 199–203, 1992.

[242] C. L. Webber, J. P. Zbilut, *Dynamical assessment of physiological systems and states using recurrence plot strategies*, Journal of Applied Physiology, Vol 76, iss. 2, 965–973, 1994.

[243] C. L. Webber, J. P. Zbilut, *Recurrence Quantification Analysis of Nonlinear Dynamical Systems*, in: M. A. Riley and G. C. Van Orden (eds.), Tutorials in contemporary nonlinear methods for the behavioral sciences, 29–94, 2005.

[244] W. Wen-Hao, H. Ye-Xi, G. Zhe, Z. Li, Z. Guo-Ping, X. Li-Feng, F. Chun-Hua, *Observation of intermittency in edge plasma of SUNIST tokamak*, Chinese Physics, Vol. 13, no. 12, 2091–2096, 2004.

[245] B. West, M. Shlesinger, *The noise in natural phenomena*, American Scientist, Vol. 78, no. 1, 40–45, 1990.

[246] J. D. Williams, M. L. Johnson, D. D. Williams, *Differential Sputtering Behavior of Pyrolytic Graphite and Carbon-Carbon Composite Under Xenon Bombardment*, 40th AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference & Exhibit, AIAA 3788, USA, 2004.

[247] A. Wolf, J. B. Swift, H. Swinney, J. A. Vastano, *Determining Lyapunov Exponents From a Time Series*, Physica D: Nonlinear Phenomena, Vol. 16, iss. 3, 285–317, 1985.

[248] H. Wong, *Low-frequency noise study in electron devices: review and update*, Microelectronics Reliability, Vol. 43, no. 4, 585–599, 2003.

[249] H. Wysocki, *Rekonstrukcja atraktora Monarchy Safye na podstawie szeregów czasowych*, Zeszyty Naukowe Akademii Marynarki Wojennej, Rok LIII, nr 1, 149–172, 2012.

[250] X. Xu, H. Liu, H. Zhu, S. Wang, *Fan fault diagnosis based on symmetrized dot pattern analysis and image matching*, Journal of Sound and Vibration, Vol. 374, 297–311, 2016.

[251] A. P. Yalin, B. Rubin, S. R. Domingue, Z. Glueckert, J. D. Williams, *Differential Sputter Yields of Boron Nitride, Quartz, and Kapton Due to Low Energy Xe^+ Bombardment*, 43rd AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference & Exhibit, AIAA 5314, USA, 2007.

[252] Y. Yamamura, *Theory of Sputtering and Comparison to Experimental Data*, Nuclear Instruments and Methods in Physics Research, Vol. 194, iss. 1–3, 515–522, 1982.

[253] J. P. Zbilut, J. -M. Zaldívar-Comenges, F. Strozzi, *Recurrence quantification based Liapunov exponents for monitoring divergence in experimental data*, Physics Letters A, Vol. 297, iss. 3–4, 173–181, 2002.

[254] A. V. Zharinov, Yu. S. Popov, *Acceleration of plasma by a closed Hall current*, Soviet Physics: Technical Physics, Vol. 12 no. 2, 208–211, 1967.

[255] V. V. Zhurin, H.R. Kaufman, R. S. Robinson, *Physics of closed drift thrusters*, Plasma Sources Science and Technology, Vol. 8, no. 1, R1–R20, 1999.

[256] K. A. Zoerb, J. D. Williams, D. D. Williams, A. P. Yalin, *Differential Sputtering Yields of Refractory Metals by Xenon, Krypton, and Argon Ion Bombardment at Normal and Oblique Incidences*, 29th International Electric Propulsion Conference, IEPC 293, USA, 2005.

[257] K. Życzkowski, A. Łoziński, *Chaos, fraktale oraz euroatraktor*, Foton 80, Wiosna 2003, 4–9, Instytut Fizyki Uniwersytetu Jagiellońskiego, Kraków 2003.