

DYREKTOR
INSTYTUTU MATEMATYKI
Nowak
prof. dr hab. Marian Nowak

INSTYTUT MATEMATYKI
UNIwersytet Zielonogórski
L.dz. IMA-T-185/2023
WPLYNĘŁO
dnia 25 PAŹ. 2023

25 PAŹ. 2023

Poznań, 19 września 2023 r.

Prof. dr hab. Ryszard Płuciennik
Instytut Matematyki
Wydział Automatyki, Robotyki i Elektrotechniki
POLITECHNIKA POZNAŃSKA
Piotrowo 3A
60-965 Poznań
e-mail: ryszard.pluciennik@put.poznan.pl

RECENZJA

rozprawy doktorskiej zatytułowanej
**„Jednostajna zbieżność szeregów trygonometrycznych o współczynnikach
tworzących ciągi o ograniczonych p -tych wariacjach”**
przedłożonej przez mgra Mateusza Kubiaka

Szeregi trygonometryczne odgrywają w matematyce i jej zastosowaniach ważną rolę, gdyż pozwalają na badanie skomplikowanych funkcji występujących w rozmaitych zagadnieniach matematyki i fizyki. Pojawiły się już w pracach Leonarda Eulera w połowie osiemnastego wieku. Jednak historia ich systematycznych badań łączy się z osobą Jeana Baptiste Fouriera i sięga początków dziewiętnastego wieku. Rozwój teorii szeregów trygonometrycznych doprowadził do powstania, między innymi takich działów matematyki jak teoria całek Fouriera, teoria funkcji prawie okresowych, analizy harmonicznej.

Autor niniejszej rozprawy zajmuje się problematyką jednostajnej zbieżności pojedynczych oraz podwójnych szeregów trygonometrycznych. Historia tego typu badań rozpoczęła się w drugiej dekadzie dwudziestego wieku wraz z pojawieniem się pracy napisanej przez Theodore Williama Chaundy'ego i Arthura Ernesta Jolliffe'a, w której uzyskano szereg wyników dotyczących jednostajnej zbieżności pojedynczych szeregów sinusowych o monotonicznych współczynnikach. Rozszerzenie ich rezultatów na szeregi cosinusowe pojawiło się w słynnej monografii z 1959 roku pt. „*Trigonometric series*” autorstwa Antoniego Zygmunda. Tematykę podwójnych szeregów tego typu zainspirowała praca I.E. Żaka i A.A. Šneidera opublikowana w 1966 roku. Kolejną przełomową pracą poświęconą badaniom jednostajnej zbieżności szeregów sinusów była praca L. Leindlera opublikowana w 2001 roku, w której zastąpiono klasę ciągów monotonicznych klasą pojedynczych ciągów o ograniczonej resztowej wariacji. Ten pozornie mało znaczący techniczny zabieg otworzył nowe możliwości prowadzące do licznych uogólnień wyników klasycznych jak i uzyskiwania nowych rezultatów. Ponadto kolejni autorzy wprowadzali coraz bardziej wyrafinowane typy klas ciągów o ograniczonych wariacjach otrzymując nowe jakościowo rezultaty dotyczące jednostajnej zbieżności pojedynczych i podwójnych szeregów trygonometrycznych. W tym kierunku poszedł autor przedłożonej rozprawy doktorskiej.

Recenzowana rozprawa doktorska jest w największym stopniu zainspirowana przez prace L. Leindlera [20] (2006) i S. Tikhonova [45] (2007) oraz idee zawarte w pracach [37] autorstwa promotora i [3,4] promotora we współautorstwie z K. Duzinkiewiczem. W oparciu o wspomniane prace Autor rozprawy definiuje szersze klasy pojedynczych i podwójnych ciągów o ograniczonych p -wariacjach zastępując w definicji tych klas sumy różnic wyrazów ciągów o kroku 1 dowolnym krokiem $r \in \mathbb{N}$. Następnie wykorzystuje je do wykazania jednostajnej zbieżności pojedynczych i podwójnych szeregów sinusów oraz podwójnych szeregów mieszanych, uogólniając tym samym dotychczasowe rezultaty znane w literaturze z tej problematyki.

Praca składa się ze wstępu i trzech rozdziałów.

We wstępie Doktorant przedstawia genezę omawianej tematyki, uzasadnia motywy jej podjęcia oraz podaje krótkie streszczenie rozprawy. Wstęp kończy się podziękowaniami kierowanymi do promotora i wszystkich osób, które były pomocne w procesie powstawania recenzowanej pracy doktorskiej. Tradycyjnie podziękowania zamieszcza się przed wstępem na osobnej stronie. Uwaga ta nie jest zbyt istotna.

W rozdziale pierwszym Autor wprowadza nowe klasy pojedynczych i podwójnych ciągów o ograniczonych p -tych wariacjach oraz dogłębnie analizuje inkluzje między nimi a innymi klasami znanymi z dotychczasowej literatury. Rozdział ten pełni bardzo ważną rolę, gdyż uzasadnia, że uogólnienia twierdzeń o jednostajnej zbieżności pojawiające się w pozostałych dwóch rozdziałach są istotne.

W rozdziale drugim Autor zajmuje się badaniem jednostajnej zbieżności pojedynczych szeregów trygonometrycznych. Najważniejszym rezultatem rozdziału drugiego jest twierdzenie 10 podające warunek dostateczny jednostajnej zbieżności pojedynczych szeregów sinusów o współczynnikach z klasy $GM(p, \delta(q), r)$ przy $q \geq 1$, $p > 1$ i $r \in \mathbb{N}$. W dowodzie tego twierdzenia zawarta jest idea i technika wykorzystana w dalszym ciągu do wykazania twierdzenia 12 będącego warunkiem wystarczającym jednostajnej zbieżności pojedynczych szeregów cosinusów o współczynnikach z tej samej klasy. Dlatego twierdzeniu 12 przypisuje znacznie mniejszą wagę niż twierdzeniu 10.

Rozdział trzeci poświęcony jest badaniu jednostajnej zbieżności podwójnych szeregów trygonometrycznych. W tym rozdziale kluczowym jest Twierdzenie 18, które podaje warunki dostateczne na to, aby szereg podwójny szereg sinusów o współczynnikach z klasy $DGM(p, \alpha, \beta, \gamma, r)$ ($p > 1$, $r \in \mathbb{N}$) był jednostajnie zbieżny regularnie względem $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Godnym zauważenia jest także twierdzenie 16 będące warunkiem koniecznym jednostajnej zbieżności podwójnych szeregów sinusów o współczynnikach należących do klasy $DGM(p, \alpha, \beta, \gamma, r)$ przy ograniczeniach na p i r jak wyżej.

Tematyka rozprawy jest dobrze osadzona w literaturze. Nawiązuje, między innymi do wyników uzyskanych przez znaczących matematyków zajmujących się badaniem szeroko pojętych szeregów trygonometrycznych takich jak I.E. Żak, A.A. Šneider, L. Leindler, S. Tikhonov, P. Kórus, M. Dyachenko, S.P. Zhou, Z. Tomovski, B. Szal i wielu innych.

Cel pracy był trudnym wyzwaniem, gdyż wymagał od Doktoranta bardzo dobrej znajomości literatury powiązanej z badaniem rozmaitych zbieżności szeregów trygonometrycznych oraz niezwykle dużej sprawności rachunkowej. Wprawdzie wyniki uzyskane w rozpra-

wie były do przewidzenia, to jednak ich dowody wymagały nowych pomysłów i były wysoce nietrywialne. Sprostanie temu wyzwaniu świadczy bardzo dobrze o potencjale badawczym Autora niniejszej rozprawy. Praca zredagowana jest starannie. Zawiera bardzo nieliczne i mało istotne usterki typograficzne, których nie warto wymieniać. Strona merytoryczna pracy nie budzi zastrzeżeń, wobec czego konkluzja niniejszej recenzji jest jednoznaczna.

Uważam, że rozprawa doktorska pana mgra Mateusza Kubiaka odpowiada w pełni warunkom określonym w Ustawie z dnia 3 lipca 2018 r. Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce (DZ. U. 2018, poz. 1669) oraz w Obwieszczeniu Marszałka Sejmu RP z dnia 10 marca 2023 w sprawie ogłoszenia jednolitego tekstu ustawy – Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce (DZ. U. 2023, poz. 742) z późniejszymi zmianami.

Z pełnym przekonaniem wnioskuję o dopuszczenie pana mgra Mateusza Kubiaka do dalszych etapów przewodu doktorskiego i o nadanie mu stopnia naukowego doktora nauk matematycznych.

Maciej S.