**Opinia o rozprawie doktorskiej
magistra Mateusza Kubiaka
zatytułowanej**

**Jednostajna zbieżność szeregów trygonometrycznych
o współczynnikach tworzących ciągi
o ograniczonych p-tych warjacjach.**

Rozprawa doktorska magistra Mateusza Kubiaka dotyczy badania jednostajnej zbieżności szeregów trygonometrycznych Składa się ona ze wstępu, trzech rozdziałów i bibliografii liczącej 54 pozycji.
Tematyka ta ma swoje korzenie w pracach z początku XX wieku. W szególności w artykule T.W. Chaundy'ego i A.F. Jolliffe'a (zob [1] w bibliografii rozprawy) w którym przedstawiono wyniki dotyczące jednostajnej zbieżności pojedynczych szeregów sinusów. Analogiczny wynik dla przypadku pojedynczych szeregów cosinusów został zaprezentowany w monografii A. Zygmunda (zob. 54 w bibliografii doktoratu) w 1959 roku. Ponadto istotny wpływ na tematyke rozprawy miały dwie prace L. Leindlera (zob. [20], [27]) a także artykuł S. Tikhonova (zob. [45]).

W rozdziale pierwszym zostały zaprezentowane wybrane klasy pojedynczych ciągów oraz podwójnych ciągów o ograniczonych warjacjach. W szczególności w podrozdziale 1.1.1 zdefiniowano klasę $GM(p, \delta, r)$ wprowadzoną przez doktoranta w opublikowanej pracy [17] (zob. Definicja 1). W podrozdziale 1.1.2 wykazano zależnosci pomiędzy klasami $GM(p, \delta, r)$ przy różnych wartościach parametrów p, δ, r. Są to Twierdzenia 1,2,3,4. Cennym jest fakt, że po udowodnieniu w tych twierdzeniach inkluzji pomiędzy poszczególnymi klasami, pokazane jest że te inkluzje mogą być istotne. Analogiczną strukturę ma podrozdział 1.2. Zdefionowano w nim klasę podwójnych ciągów liczb zespolonych $DGM(p, \alpha, \beta, \gamma, r)$ (zob. Definicja 3). W podrozdziale 1.2.2 wykazano zależności między klasami z Definicji 3 w zależności od parametrów $p, \alpha, \beta, \gamma, r$. Są to Twierdzenia 5 i 6. W tym przypadku również po udowodnieniu w tych twierdzeniach inkluzji pomiędzy poszczególnymi klasami, pokazane jest że te inkluzje mogą być istotne.
Główne wyniki uzyskane przez doktoranta zawarte są w rozdziałach drugim i trzecim. W rozdziale drugim autor koncentruje się na badaniu jednostajnej zbieżności pojedynczych szeregów trygonometrycznych. W podrozdziale 2.1 przedstawiono rezultaty pomocnicze potrzebne do dowodu głównych twierdzeń. W podrozdziale 2.2 przestawiono warunki konieczne i dostateczne zbiezności pojedynczych szeregów sinusów i cosinusów oraz pojedynczych szeregów zespolonych, których współczynniki należą do klas zdefiniowanych w rozdziale pierwszym. Twierdzenia 9,10 i 12 podają warunki konieczne i dostateczne na jednostajną zbieżnośc pojedynczych szeregów sinusów i cosinusów o wspołczynnikach w klasie $GM(p,_6 \delta(q), r)$ W szczególności Tw. 9 uogólnia rezultat K. Duzinkiewicza (zob. [4]). Cenna jest również Uwaga 11 w której skonstruowano ciąg z klasy $GM(p,_5 \delta, 3)$ który nie należy do klasy $GM(1,_5 \delta, 3)$ dla $p > 1$ spełniający warunek (2.10) ze wspomnianego wcześniej klasycznego twierdze-

nia T.W. Chaundy'ego i A.F. Jolliffe'a (zob [1] w bibliografii rozprawy) dla którego szereg sinusów jest robieżny w pewnym punkcie x_o. Ponadto Twierdzenie 14 podaje warunek wystarczający zbieżności pojedynczych szeregów zespolonych o współczynnikach w klasie $GM(1,_5\,\delta(q), 3)$.
W rozdziale trzecim doktorant koncentruje się na badaniu jednostajnej zbieżności podwójnych szeregów trygonometrycznych. Podrozdział 3.1 zawiera rezultaty pomocnicze potrzebne do udowodnienia głównych twierdzeń. Głównym wynikiem podrozdzialu 3.2 są Twierdzenia 16 i 18 podające warunki dostateczne i konieczne zbieżności podwójnych szeregów sinusów o współczynnikach w klasie $GM(1,_2\,\alpha,_2\,\beta,_2\,\gamma, 3)$. W szczególności Tw. 16 uogólnia rezultat K. Duzinkiewicza i B. Szala (zob. [3]). Istotna jest tu również Uwaga 20, w której skonstruowano przykład podwójnego szeregów sinusów o współczynnikach w klasie $GM(1,_2\,\alpha,_2\,\beta,_2\,\gamma, 3)$ spelniającego warunek (3.8) z Lematu 9 rozbieżny w pewnym punkcie $(x_o, y_o) \in \mathbb{R}^2$.
W podrozdziale 3.3 zbadana została zbieżność jednostajna podwójnych szczeregów mieszanych. Są to Twierdzenia 24,25 i 26.

Moim zdaniem rozprawa doktorska magistra Mateusza Kubiaka prezentuje wysoki merytoryczny poziom i wnosi istotny wkład w analizę harmoniczną, a w szczegolności teorię zbieżności szeregów trygonometrycznych. Bogata bibliografia rozprawy licząca 54 pozycje świadczy o dobrej orientacji doktoranta w literaturze związanej z tematyką doktoratu. Wprawdzie dowody przedstawionych twierdzeń są elementarne, ale bardzo trudne technicznie. W szczególności dowody Twierdzeń 12, 18, 24 wymagały od doktoranta naprawdę dużej sprawności rachunkowej i umiejętności rozpatrywania odpowiednich przypadków. Ponadto przed dowodzeniem tych twierdzeń należało warunki w nich występujące przewidzieć, co nie jest takie łatwe. Wypada wspomnieć, że rozprawa jest bardzo dobrze zredagowana, co nie jest proste w przypadku bardzo trudnych technicznie dowodów. Ponadto magister Mateusz Kubiak jest współautorem czterech publikacji.

Biorąc pod uwagę wyżej wymienione argumenty, z pełną odpowiedzialnością stwierdzam, że rozprawa doktorska magistra Mateusza Kubiaka spełnia warunki określone w art. 187 Ustawy z dnia 20 lipca 2018 roku /Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce/ (Dz. U. z 2022 r. poz 574 z pózn. zm.).
Zatem wnioskuję o nadanie magistrowi Mateuszowi Kubiakowi stopnia naukowego doktora w dyscyplinie matematyka.

Kraków, dnia 30 października 2023 roku

Prof. dr hab. Grzegorz Lewicki
Profesor zwyczajny w Instytucie Matematyki
Uniwersytetu Jagiellońskiego w Krakowie

Grzegorz Lewicki