

Recenzja

rozprawy doktorskiej mgra Mariusza Sudzika

pt. „*On continuous solutions of linear functional equations of infinite order*”

Rozprawa doktorska mgra Mariusza Sudzika napisana została w języku angielskim (poza dodatkowym streszczeniem w języku polskim); jej tytuł w języku polskim brzmi: „*O rozwiązaniach ciągłych liniowych równań funkcyjnych nieskończonego rzędu*”. Praca jest stosunkowo obszerna i zasadniczo składa się z pięciu rozdziałów: preliminariów, trzech części prezentujących wyniki własne doktoranta oraz dodatku.

W rozdziale pierwszym zawarte zostały podstawowe pojęcia i fakty wykorzystywane w rozprawie. Przedmiotem badań rozdziału drugiego jest równanie

$$\varphi(x) = \int \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(a(x-b))\mu(da, db), \quad (1)$$

zwane równaniem archetypicznym. Najważniejsze twierdzenie tego rozdziału (i wydaje się, że w ogóle całej pracy), to twierdzenie 2.3.1, głoszące, że pod pewnymi założeniami o nośniku prawdopodobieństwa μ , jedynymi ciągłymi rozwiązaniami równania (1), osiągającymi ekstrema globalne, są funkcje stałe. Twierdzenie to i wyniki drugiego rozdziału pochodzą z samodzielnej pracy doktoranta opublikowanej (już po złożeniu rozprawy) w *Aequat. Math.* 95 (2021), 505–526. Kolejny rozdział dotyczy równania

$$\varphi(x) = \sum_{i \in I} p_i \varphi(f_i(x)), \quad (2)$$

gdzie $I \subset \mathbb{Z}$, $p_i \in (0, 1)$, $\sum_{i \in I} p_i = 1$, a $f_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest homeomorfizmem. Jest to ważny przypadek rozpatrywanego w czwartej części pracy równania

$$\varphi(x) = \int_{\Omega} \varphi(f(x, \omega))P(d\omega), \quad (3)$$

gdzie X oznacza zupełną przestrzeń metryczną, (Ω, P) - przestrzeń probabilistyczną, a $f : \Omega \times X \rightarrow X$ jest daną funkcją. Główne wyniki rozdziału trzeciego (zob. twierdzenia 3.2.1 i 3.2.2) w pewnym uproszczeniu orzekają, że jeśli homeomorfizmy f_i parami komutują, to każde ograniczone rozwiązanie równania (2) osiągające ekstremum globalne na klasie abstrakcji wyznaczonej przez relację Kuratowskiego jest stałe. Kluczowy rezultat rozdziału czwartego (twierdzenie 4.1.1) przynosi tego samego typu informację o rozwiązaniach, przy czym tutaj istotną rolę odgrywa założenie wspólnego dla wszystkich funkcji $f(\omega, \cdot)$, $\omega \in \Omega$, zwartego zbioru niezmienniczego. Rozdział trzeci i czwarty

oparty jest odpowiednio na publikacji [M. Sudzik, Aequat. Math. 93 (2019), 137–148] i przesłanym do opublikowania maszynopisie [M. Sudzik, *Iterative functional equations and invariant compact sets*]. Ostatni rozdział stanowi dodatek, który zawiera rozległy komentarz do problematyki rozprawy wraz z podsumowaniem uzyskanych rezultatów. Autor dzieli się z czytelnikiem trudnościami na jakie napotykał w trakcie swoich badań, stawia również problemy otwarte.

Większość uzyskanych przez doktoranta rezultatów przynosi warunki dostateczne na to, aby jedynymi ciągłymi i ograniczonymi rozwiązaniami rozpatrywanych w pracy równań były funkcje stałe. W pewnym sensie wyniki te mają charakter negatywny (badając równania często chcielibyśmy znaleźć nietrywialne i regularne ich rozwiązania, szukając warunków wystarczających na istnienie owych rozwiązań). W bogatej literaturze przedmiotu wśród twierdzeń o takim charakterze, dotyczących równania (1) bądź (3), można wskazać twierdzenia „naturalne do przewidzenia” i łatwe w dowodzie ale też twierdzenia mniej oczywiste, wymagające większego nakładu pracy w ich uzasadnianiu. Moim zdaniem najważniejsze rezultaty pomieszczone w pracy zaliczają się do tej drugiej grupy. Najlepszym przykładem jest wspomniane wcześniej twierdzenie 2.3.1, którego żmudny dowód zajmuje w pracy prawie 13 stron. Autor zrećcznie wykorzystuje w nim lemat 2.3.1, analizując różnorakie przypadki związane z nośnikiem miary μ .

Wyniki uzyskane przez pana mgra Sudzika uważam za ciekawe i wartościowe. Pokazują one, że doktorant posiada umiejętność samodzielnego prowadzenia pracy naukowej. Ich wagę podkreśla fakt, że częściowo rozwiązują one trudny problem postawiony w 2016 roku na 21. Europejskiej Konferencji z Teorii Iteracji przez profesora Derfla – cenionego specjalistę równań różniczkowych i funkcyjnych. Problem sformułowany jest m.in. we wstępie do pracy i dobrze ją motywuje. Myślę, że czytelnika zaciekać może interesujący związek równania archetypicznego z równaniem pantografu podany w rozprawie wraz z dowodem za [L.V. Bogachev, G. Derfel, S.A. Molchanov, Proc. Royal Soc. A 471 (2015), 1–19]. Opiniowana rozprawa jest starannie zredagowana; poziom szczegółowości dowodów jest w większości wystarczający. Dzięki pomocniczemu charakterowi rozdziału pierwszego nie ma konieczności sięgania do dodatkowych źródeł. Liczne przykłady dobrze ilustrują uzyskane rezultaty a jednocześnie porównują je z wynikami uzyskanymi przez innych autorów.

Poniżej zamieszczam kilka uwag szczegółowych.

1. W podrozdziale 2.1 autor ustala dowolną przestrzeń probabilistyczną $(\Omega, \mathcal{A}, P)$; następnie stwierdza, że równanie (1) można zapisać w postaci

$$\varphi(x) = \int_{\Omega} \varphi(\alpha(\omega)(x - \beta(\omega))) P(d\omega) \quad (4)$$

zakładając, że zmienna losowa (α, β) ma taki rozkład jak prawdopodobieństwo μ . Nie

każda jednak przestrzeń probabilistyczna pozwala na odtwarzanie rozkładu poprzez zmienną losową.

2. W przykładzie 2.1.1 autor zapowiada, że równanie (1) z miarą dyskretną $\mu(\{(1, 1)\}) = \mu(\{(2, 1)\}) = \frac{1}{2}$ jest tak zwanym zdegenerowanym przypadkiem równania archetypicznego, a przez to nie posiada niestałych rozwiązań w klasie $\mathcal{T}$ ograniczonych funkcji ciągłych $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$. W dalszej części pracy nie znalazłem odniesienia do tej zapowiedzi. Zgodnie zaś z twierdzeniem 2.2.4 równanie to ma niestałe rozwiązanie $\varphi \in \mathcal{T}$, gdyż występujące w tym równaniu zmienne nie rezonują (w znaczeniu podanym w definicji 2.2.2).

3. W twierdzeniu 2.2.4 obok warunków wyrażonych przez całkę względem μ zakładany jest warunek (H), który odnosi się do prawdopodobieństwa P . Myślę, że na potrzeby rozprawy można było założenia tego twierdzenia ujednolicić, wypisując je albo dla równania (1) albo dla (4), i sformułować tezę dla jednego z tych dwóch równań.

4. W czwartym rozdziale zakłada się, że funkcja $f : \Omega \times X \rightarrow X$ ma tę własność, że $f(\cdot, x)$ jest mierzalna dla każdego $x \in X$. Nie jest jasne dlaczego występujące w dowodzie twierdzenia 4.1.1 iteracje $f_{\omega_1} \circ \dots \circ f_{\omega_n}$, gdzie $f_{\omega}(x) = f(\omega, x)$, są mierzalne. Tego wymaga zastosowane tu twierdzenie Fubiniego przy przejściu na przestrzeń produktową $(\Omega^n, \mathcal{A}^n, P^\infty)$. (Mierzalność iteracji można zagwarantować zakładając na przykład produktową mierzalność funkcji f , tzn. warunek $f^{-1}(B) \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(X)$ dla $B \in \mathcal{B}(X)$). W tym samym dowodzie na str. 65 autor twierdzi, że $P(A) < 1$, co należałoby również wyjaśnić.

5. Występujące we wniosku 4.3.8 równanie iteracyjne z warunkiem $\int_{\Omega} \delta dP = 1$ dla nieujemnej funkcji δ nie jest ogólniejsze niż równanie (3); sprowadza się ono przez transport miary do równania (3) z nową miarą probabilistyczną. Z tego powodu trudno uznać wniosek 4.3.8 jako uogólnienie twierdzenia 4.1.1, poczynione w zapowiedzi wniosku.

Konkluzja. Recenzowana rozprawa spełnia moim zdaniem wymagania zwyczajowe stawiane rozprawom doktorskim z matematyki, jak również wymagania ustawowe zawarte w art. 13.1 aktualnej ustawy o stopniach naukowych i tytule naukowym oraz o stopniach i tytule w zakresie sztuki. Wnoszę zatem o dopuszczenie mgra Mariusza Sudzika do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

Kraków, 24 maja 2021 roku

dr hab. Rafał Kapica

Rafał Kapica