Gdańsk, 4.08.2023 r.

prof. dr hab. inż. Dariusz Dereniowski
Katedra Algorytmów i Modelowania Systemów
Wydział Elektroniki, Telekomunikacji i Informatyki
Politechnika Gdańska
ul. Gabriela Narutowicza 11/12, 80-233 Gdańsk

Recenzja rozprawy doktorskiej

Tytuł rozprawy: **Pewne warianty kolorowania matroidów**

Autor rozprawy: **mgr Zofia Miechowicz**

Promotor: **prof. dr hab. Jarosław Grytczuk**

1. Tematyka rozprawy.

Zgodnie z tytułem rozprawy, traktuje ona o szeregu modeli kolorowania matroidów. Matroidy jako matematyczny obiekt znajduje szereg zastosowań płynących m.in. z uogólnienia wielu pojęć. Przykłady takie podaje Autorka m.in. w rozdziale 1.4 oraz w szeregu komentarzach w całym tekście. Praca podejmuje następujące modele kolorowania matroidów:

- *Kolorowanie równoczesne* (ang. *cooperative coloring*), które w rozdziale 2 jest analizowane zarówno dla grafów jak i matroidów.
- *Kolorowanie acykliczne* studiowane dla matroidów grafowych w rozdziale 3 oraz dla innych matroidów w rozdziale 4.
- *Kolorowanie silnie acykliczne* matroidów (rozdział 5).

Oprócz powyższych wariantów praca wykorzystuje szereg innych modeli, często używanych jako pojęcia wprowadzające lub pośrednie. Pomijam wymienianie ich wszystkich.

W przypadku problemów kolorowania wszelakich struktur, definiuje się dla każdego modelu odpowiedni parametr grafowy, który określa optymalną (zazwyczaj minimalną) liczbę kolorów wystarczającą do uzyskania poprawnego pokolorowania. Niniejsza rozprawa skupia się głównie na określeniu oszacowań tak definiowanych parametrów w poszczególnych wariantach kolorowań. Dodatkowo posiada także rys algorytmiczny, który głównie wynika z faktu silnego związku pomiędzy matroidami, a paradygmatem algorytmu zachłannego.

2. Uzyskane wyniki oraz ocena pracy i dorobku.

Rozdział 2 rozprawy koresponduje z artykułem [10] (*arXiv*), wykraczając poza jego zakres. Do głównych wyników tej części zaliczyłbym twierdzenie 2.7 podające związek pomiędzy kolorowaniem równoczesnym, a liczbą chromatyczną matroidu, oraz istotny dla tego parametru wniosek z niego płynący o istnieniu kolorowania równoczesnego o k kolorach przy założeniu, że każdy z wejściowych matroidów sam w sobie jest k-kolorowalny.

Rozdział 3 traktuje o parametrze nazywanym *lesistością* matroidów (oraz jego wariantach), definiowaną (mówiąc nieformalnie) jako taki sposób kolorowania, aby nie wystąpiły jednokolorowe cykle. Rozdział ten koresponduje do pracy [8] (*Discrete Applied Mathematics*). Przez "warianty" mam na myśli studiowane przez Autorkę wersje, gdzie wymagamy, aby każdy cykl C posiadał co najmniej $\min\{|C|, p+1\}$ kolorów dla $p > 1$. Parametr minimalizacyjny dla matroidu M jest oznaczany poprzez $\mathrm{arb}_p(M)$ oraz analogicznie dla grafu G poprzez $\mathrm{arb}_p(G)$. Rozdział 3 wskazuje dokładne wzory lub oszacowania dla arb_p, w szczególności dokładny wzór dla $\mathrm{arb}_p(K_{2,n})$, oszacowanie dolne na arb_2 poprzez minimalny stopień grafu (Fakt 3.3), zależność od zdegenerowania grafu (Fakt 3.4). Kolejne klasy grafów studiowane w tym kontekście to grafy pełne (rozdział 3.3), koła (rozdział 3.4), grafy zewnętrznie planarne (rozdział 3.5), grafy planarne (rozdział 3.6), oraz grafy o ograniczonym stopniu (rozdział 3.7). Niektóre z wymienionych klas grafów mogą się wydawać bardzo szczególne, jednak natura stawianego problemu sprawia, że uzyskanie konkretnych wyników nie jest łatwe. Na przykład istnieją argumenty sugerujące, że obliczenie dokładnej wartości parametru $\mathrm{arb}_2(K_n)$ jest bardzo nietrywialnym zadaniem, gdzie K_n jest grafem pełnym o n wierzchołkach. Najciekawsze wyniki tej części w mojej opinii dotyczą grafów planarnych. Jest to twierdzenie 3.6 dające oszacowanie $\mathrm{arb}_2(G) \leq 6$ dla grafów planarnych G o najkrótszym cyklu (tzn. *obwodzie*) mającym długość co najmniej 14. Są to także twierdzenie 3.8 wiążące obwód grafu z $\mathrm{arb}_p(G)$ dla dowolnego $p \geq 2$, oraz twierdzenie 3.10 uwzględniające genus oraz obwód w konstrukcji oszacowania na $\mathrm{arb}_p(G)$. Zaintrygowało mnie oszacowanie z twierdzenia 3.8, a dokładniej kwestia na ile jest ono dokładne? Mianowicie, wykładnicze oszacowanie na obwód wydaje się być dość silne, więc ciekawe byłoby zobaczyć fakty, dyskusję lub choćby intuicję czy jest to konieczne. Jest zrozumiałe, że wynika ono z indukcyjnej natury dowodu, gdzie następuje podwojenie z każdym krokiem indukcyjnym, natomiast nie zamyka to kwestii czy można oszacowanie na obwód poprawić. Za wyróżniający się wynik uznałbym twierdzenie 3.13 szacujące $\mathrm{arb}_p(G)$ poprzez p oraz maksymalny stopień Δ, także ze względu na interesujący dowód tego faktu.

Rozdział 4 zawiera głównie wyniki z pracy [9] określonej jako "manuskrypt" bez podania miejsca publikacji. Za główne wyniki tej części pracy uznałbym wzór na $\mathrm{arb}_p(M)$ dla matroidu podziałowego M (twierdzenie 4.4) oraz dokładne wzory na p-lesistość matroidu Catalana (twierdzenie 4.7).

Rozdział 5 stanowi propozycję nowego problemu, który w literaturze nie był do tej pory studiowany. W takich sytuacjach zasadne jest pytanie o naturalność oraz znaczenie nowego pojęcia. Motywacja wypływa z obserwacji, że w definicji arb_2 wymagamy unikania 2-kolorowych cykli. To daje warunek konieczny, aby dla każdego cyklu C oraz jego krawędzi e, $C - e$ nie był jednokolorowy. Autorka nazywa taką strukturę *złamanym cyklem* i w definicji swojego problemu silnej lesistości wymaga brak jednokolorowych złamanych cykli. Rozdział koresponduje do pracy [11] (*arXiv*) i podaje szereg oszacowań lub dokładnych wzorów dla nowego parametru dla grafów planarnych, grafów o ograniczonej lesistości oraz ograniczonym stopniu.

Jedyny nietrywialny błąd jaki znalazłem w rozprawie dotyczy definicji ułamkowej lesistości $\mathrm{farb}(G)$ podanej na stronie 70, gdzie powinno być

$$\mathrm{farb}(G) = \max_{H \subset G} \frac{|E(H)|}{|V(H)| - 1}.$$

Kwestia ta nie wpływa na poprawność dalszego tekstu pracy. Praca zawiera niewiele drobnych usterek takich jak niepoprawne referencje (odnośnik do nieistniejącego twierdzenia 2 na stronie 3, odnośnik do podrozdziału 1.4 zamiast 4.4 na stronie 77, czy też niezdefiniowane odnośniki bibliograficzne [?] w dołączonej do rozprawy anglojęzycznej notce streszczeniowej), zamienne używanie notacji I oraz $\mathbb{I}$ lub E oraz $\mathbb{E}$ (m.in. definicja 24, twierdzenie 1.8, lemat 1.9) lub inne (brak nawiasu zamykającego na stronie 13, "$x \notin X$" zamiast "$x \notin X_j$" w algorytmie zachłannym na stronie 18, "Warunek I2" zamiast "Warunek I1" na stronie 25, niezdefiniowany parametr $f(\cdot)$ na stronie 58). Także, nie do końca bym się zgodził ze stwierdzeniem, że definicje 55 i 56 faktycznie "uogólniają" kolorowanie acykliczne, gdyż mając na myśli uogólnienie oczekiwałbym, że w pewnym zakresie parametrów kolorowanie p-lesiste w jakiś sposób generuje acykliczne, a tak wydaje się nie być. Z drugiej strony jest to drobna kwestia, gdyż faktycznie oba modele są bardzo ściśle związane jak pokazuje rozdział 3.3. Chciałbym w tym miejscu podkreślić, że znalezione usterki wymieniane są dla celów kompletności recenzji, natomiast jak na monografię tej objętości (100 stron), oceniam że jest ich mało oraz absolutnie nie pływają na poprawność oraz czytelność.

3. Konkluzja.

Praca jest ciekawie napisana. Autorka nie pominęła szeregu prostszych faktów wprowadzających czytelnika w temat, a także zadbała o bardzo wnikliwy rys historyczny. Sprawia to, że monografia jest pełna w tym sensie, że jej czytanie nie wymaga od czytelnika ustawicznego sięgania do zewnętrznych źródeł. Wybrane modele znajdują szereg teoretycznych zastosowań, także ze względu na ogólność obiektów jakim są matroidy, ale także na konkretne związki z innymi problemami kombinatorycznymi (jak na przykład 1-faktoryzacja [35]).

Stronę naukową rozprawy oceniam jednoznacznie pozytywnie. Rozprawa jest co prawda podparta tylko jedną publikacją, ale jest to publikacja w czasopiśmie *Discrete Applied Mathematics*, którego status można określić jako jednego z wiodących w dziedzinie. Dalsze publikacje wydają się być w toku, na co wskazują manuskrypty raportowane w serwisie *arXiv*. Recenzent zauważył również współautorską pracę z 2008 roku opublikowaną w cenionym czasopiśmie *Electronic Journal of Combinatorics*, jednakże nie znajduje ono śladu w rozprawie. Wskazuje jednak na pewne dodatkowe doświadczenie badawcze Autorki.

Podsumowując, w mojej opinii rozprawa spełnia warunki określone w *Ustawie*. W związku z tym, wnioskuję o dopuszczenie Zofii Miechowicz do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

Dereniowski

Dariusz Dereniowski