



Streszczenie rozprawy doktorskiej

Jednostajna zbieżność szeregów trygonometrycznych o współczynnikach tworzących ciągi o ograniczonych p -tych wariacjach

autorstwa

Mateusza Kubiaka

Promotor: dr hab. Bogdan Szal, prof. UZ

Niniejsza rozprawa doktorska została poświęcona problematyce jednostajnej zbieżności pojedynczych oraz podwójnych szeregów trygonometrycznych. Motywacją do jej napisania była chęć uogólnienia oraz rozszerzenia dotychczas znanych w literaturze wyników dotyczących tej problematyki. Punktem wyjścia do jej napisania stały się klasyczne wyniki poświęcone tej problematyce, które pojawiły się na początku XX wieku. Podają one charakterystykę jednostajnej zbieżności pojedynczych oraz podwójnych szeregów trygonometrycznych, gdzie istotnym założeniem była monotoniczność współczynników tych szeregów. Pierwsza praca związana z tą problematyką pochodzi z 1916 roku, w której brytyjscy matematycy T. W. Chaundy i A. E. Jolliffe [1] przedstawili wyniki dotyczące jednostajnej zbieżności pojedynczych szeregów sinusów, które opierają się na założeniu, że współczynniki tych szeregów są monotoniczne. Analogiczny wynik dla przypadku pojedynczych szeregów cosinusów został zaprezentowany w monografii A. Zygmunda [21], która pochodzi z 1959 roku. Następnie, w 1966 roku I. E. Žak i A. A. Šneider w pracy [19] uzyskali podobny wynik dotyczący jednostajnej zbieżności podwójnych szeregów sinusów przy założeniu, że współczynniki tych szeregów tworzą podwójny ciąg nierosnący.

Znaczącym momentem w badaniach nad problemem związanym z jednostajną zbieżnością szeregów sinusów była praca autorstwa L. Leindlera [12] z 2001 roku, w której wprowadzona została klasa pojedynczych ciągów o ograniczonej resztowej wariacji. Praca ta stała się inspiracją do uogólnienia klasycznych wyników jednostajnej zbieżności dla szeregów pojedynczych oraz podwójnych poprzez zastąpienie ciągów monotonicznych ciągami o ograniczonych wariacjach. Wynikiem tych badań było wprowadzenie nowych klas ciągów o ograniczonych wariacjach, których wykorzystanie pozwoliło na uogólnienie klasycznych wyników. Dla szeregów pojedynczych, nowe klasy ciągów o ograniczonych wariacjach zostały wprowadzone oraz badane, między innymi w pracach: [7], [15], [17], [18], [20]. Warto wspomnieć również o wynikach uzyskanych przez B. Szalą w pracy [15] z roku 2011, w której rozszerzył on klasy ciągów o ograniczonych wariacjach poprzez wykorzystanie w definicji tych klas sumy różnic wyrazów ciągów o dowolnym kroku $r \in \mathbb{N}$ zastępując różnicę o kroku 1. W tym samym roku S. Tikhonov oraz E. Liflyand w pracy [13] oraz w pracy [14] wprowadzili klasę ciągów pojedynczych o ograniczonych p -tych wariacjach.

Pierwsza klasa podwójnych ciągów o ograniczonych wariacjach została wprowadzona przez P. Kórusa i F. F. Móricza w pracy [4], która ukazała się w 2009 roku. W artykule tym rozszerzono wynik I. E. Żaka i A. A. Šneidera dotyczący jednostajnej zbieżności podwójnych szeregów sinusów dla nowo zdefiniowanej klasy ciągów. Ponadto, w roku 2011 P. Kórus w pracy [5] po raz kolejny uogólnił wspomniane wcześniej twierdzenia na szerszą klasę ciągów o ograniczonych wariacjach, jak również przedstawił analogiczne twierdzenie dla szeregów mieszanych. W późniejszych latach nowe klasy podwójnych ciągów o ograniczonych wariacjach były rozważane między innymi w pracach: [2], [3], [6].

W rozprawie została zdefiniowana nowa szersza klasa pojedynczych ciągów o ograniczonych p -tych wariacjach, która jest modyfikacją klasy zdefiniowanej przez B. Szalą w artykułach: [15], [16] oraz S. Tikhonova i E. Liflyanda w pracach: [13], [14]. Analogicznie, w rozprawie zdefiniowana została nowa klasy podwójnych ciągów o ograniczonych p -tych wariacjach. Wprowadzone klasy ciągów zostały wykorzystane w rozprawie do uogólnienia dotychczas znanych w literaturze wyników dotyczących jednostajnej zbieżności pojedynczych oraz podwójnych szeregów trygonometrycznych.

Rozprawa doktorska składa się z trzech rozdziałów. W rozdziale pierwszym zaprezentowane zostały wybrane klasy pojedynczych ciągów jak również podwójnych ciągów o ograniczonych wariacjach. Na początku podrozdziału 1.1 zdefiniowana została nowa klasa ciągów o ograniczonych p -tych wariacjach pochodząca z pracy [11]. Następnie w tym podrozdziale zostały

omówione najważniejsze klasy ciągów o ograniczonych wariacjach oraz zależności między nimi, z uwzględnieniem nowo wprowadzonej klasy ciągów. Wyniki tego podrozdziału pochodzą z pracy [11]. Podrozdział 1.2 zawiera zestawienie klas podwójnych ciągów o ograniczonych wariacjach. Schemat tego podrozdziału jest analogiczny jak dla pojedynczych ciągów, czyli na początku zdefiniowana została nowa klasy podwójnych ciągów o ograniczonych p -tych wariacjach, a następnie przedstawione zostały zależności między tą klasą oraz klasami dotychczas rozważanymi w literaturze. Rezultaty tego podrozdziału pochodzą z prac: [10], [8].

W rozdziale drugim przedstawione zostały wyniki jednostajnej zbieżności pojedynczych szeregów trygonometrycznych. W podrozdziale 2.1 wprowadzone zostały twierdzenia pomocnicze. Z kolei w podrozdziale 2.2 przedstawione zostały główne twierdzenia dotyczące jednostajnej zbieżności pojedynczych szeregów trygonometrycznych, które zakładają, że współczynniki tych szeregów należą do nowo wprowadzonej klasy z podrozdziału 1.1. Twierdzenia te rozszerzają wyniki uzyskane przez K. Duzinkiewicza w pracy [3] oraz w konsekwencji wszystkie wcześniejsze wyniki. Rezultaty tego rozdziału pochodzą z prac: [10], [11].

Rozdział trzeci zawiera wyniki dotyczące jednostajnej zbieżności podwójnych szeregów trygonometrycznych. Analogicznie jak dla pojedynczych szeregów, w podrozdziale 3.1 zawarte są twierdzenia pomocnicze, które wykorzystane zostały w dowodach głównych twierdzeń tego rozdziału. W podrozdziale 3.2 oraz 3.3 przedstawione zostały twierdzenia podające warunek konieczny oraz dostateczny jednostajnej zbieżności odpowiednio dla podwójnych szeregów sinusów oraz podwójnych szeregów mieszanych przy założeniu, że współczynniki tych szeregów należą do nowo wprowadzonych klas ciągów o ograniczonych p -tych wariacjach w podrozdziale 1.2. W przedmiotowym rozdziale zostały ujęte uwagi pokazujące, że twierdzenia z podrozdziału 3.2 rozszerzają wyniki uzyskane przez K. Duzinkiewicza i B. Szala w pracy [2] dla podwójnych szeregów sinusów. Ponadto, rozdział ten zawiera uwagi pokazujące, że twierdzenia z podrozdziału 3.3 rozszerzają wyniki uzyskane przez K. Duzinkiewicza w artykule [3] oraz w konsekwencji wcześniejsze wyniki uzyskane przez P. Kórusa i F. Móricza w pracy [4] dla podwójnych szeregów mieszanych. Wyniki tego rozdziału zostały zawarte w pracach: [8], [9].

Bibliografia

- [1] T. W. Chaundy, A. E. Jolliffe, The uniform convergence of a certain class of trigonometrical series, *Proc. London Math. Soc.*, 15 (1916), 214-216.
- [2] K. Duzinkiewicz, B. Szal, On the uniform convergence of double sine series, *Colloq. Math.*, 151 (2018), 71-95.
- [3] K. Duzinkiewicz, On the uniform convergence of sine, cosine and double sine-cosine series, *Discuss. Math., Differ. Incl., Control Optim.*, 36 (2016), 87-116.
- [4] P. Kórus, F. Móricz, On the uniform convergence of double sine series, *Studia Math.*, 193 (2009), 79-97.
- [5] P. Kórus, On the uniform convergence of double sine series with generalized monotone coefficients, *Period. Math. Hungar.*, 63 (2011), 205-214.
- [6] P. Kórus, Uniform convergence of double trigonometric series, *Math. Bohem.*, 138 (2013), No. 3, 225-243.
- [7] P. Kórus, Remarks on the uniform and L^1 -convergence of trigonometric series, *Acta Math. Hungar.*, 128 (2010), 369-380.
- [8] M. Kubiak, B. Szal, A necessary condition for uniform convergence of double sine series with p -bounded variation coefficients, *Colloq. Math.* (2021) (Vol. 166, pp. 291-312).
- [9] M. Kubiak, B. Szal, A sufficient condition for uniform convergence of double sine series with p -bounded variation coefficients, <https://arxiv.org/abs/2305.09040>.
- [10] M. Kubiak, B. Szal, A sufficient condition for uniform convergence of trigonometric series with p -bounded variation coefficients, <https://arxiv.org/abs/2305.09039>.
- [11] M. Kubiak, B. Szal, Uniform convergence of trigonometric series with p -bounded variation coefficients, *Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin*, 27(1) (2020), 89-110.
- [12] L. Leindler, On the Uniform Convergence and Boundedness of a Certain Class of Sine Series, *Analysis Mathematica* 27 (2001), 279-285
- [13] E. Liflyand, S. Tikhonov, A concept of general monotonicity and applications, *Math. Nachr.*, 284(8-9) (2011), 1083-1098.
- [14] E. Liflyand, S. Tikhonov, The Fourier transforms of general monotone functions, *Analysis and Mathematical Physics, Trends in Mathematics* (Birkhäuser, 2009), pp. 373-391.
- [15] B. Szal, A new class of numerical sequences and its applications to uniform convergence of sine series, *Math. Nachr.*, 284(14-15) (2011), 1985-2002.
- [16] B. Szal, On L -convergence of trigonometric series, *J. Math. Anal. Appl.*, 373 (2011), 449-463.
- [17] S. Tikhonov, Best approximation and moduli of smoothness: Computation and equivalence theorems, *J. Approx. Theory*, 153 (2008), 19-39.
- [18] S. Tikhonov, Trigonometric series with general monotone coefficients, *J. Math. Anal. Appl.*, 326(1) (2007), 721-735.
- [19] I. E. Žak, A. A. Šneider, Conditions for uniform convergence of double sine series. *Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii. Matematika*, (4) (1966), 44-52.
- [20] R. Le, S. Zhou, A new condition for the uniform convergence of certain trigonometric series. *Acta Math Hung* 108 (2005), 161-169.
- [21] A. Zygmund, *Trigonometric series*, Vol. I, University Press, Cambridge, (1959).