

dr hab. Ziemowit Rzeszutnik
Instytut Matematyczny
Uniwersytetu Wrocławskiego

INSTYTUT MATEMATYKI
UNIwersYTET ZIELONOGÓRSKI
L.dz. 1047-D-149/2023
WPŁYNĘŁO
dnia 22 WRZ. 2023
DYREKTOR
INSTYTUTU MATEMATYKI
[Signature]
prof. dr hab. Marian Nowak

Wrocław 19.09.23

25 WRZ. 2023

Recenzja rozprawy doktorskiej pt.

"Jednostajna zbieżność szeregów trygonometrycznych o współczynnikach tworzących ciągi o ograniczonych p -tych wariacjach"
autorstwa mgr. Mateusza Kubiaka

Rozprawa dotyczy zbieżności pojedynczych i podwójnych szeregów trygonometrycznych. Odnosnie szeregów pojedynczych, doktorant rozważa zbieżność jednostajną szeregu sinusów

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin(kx), \quad (S)$$

cosinusów

$$\sum_{k=1}^{\infty} d_k \cos(kx) \quad (C)$$

i szeregu eksponencjalnego

$$\sum_{k=1}^{\infty} \omega_k e^{ikx} \quad (E)$$

gdzie $x \in \mathbb{R}$ oraz $(c_k), (d_k), (\omega_k) \subset \mathbb{C}$. Główne wyniki w tym zakresie przedstawione w rozprawie zostały zawarte we wspólnych pracach [16, 17]¹ doktoranta z B. Szalem.

Odnosnie szeregów podwójnych, doktorant rozważa zbieżność jednostajną (regularną) podwójnego szeregu sinusów i cosinusów

$$\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} c_{j,k} \sin(jx) \sin(ky) \quad (SS),$$

oraz podwójnego szeregu mieszanego sinusów i cosinusów

$$\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} c_{j,k} \sin(jx) \cos(ky) \quad (SC)$$

gdzie $x, y \in \mathbb{R}$, $(c_{j,k}) \subset \mathbb{C}$. Wyniki w zakresie zbieżności jednostajnej szeregu (SS) są zawarte we wspólnych pracach [14, 15] doktoranta z B. Szalem, natomiast wyniki dotyczące zbieżności jednostajnej szeregu (SC) mogą stanowić postawę kolejnej pracy naukowej.

Warto zaznaczyć, że badanie zbieżności jednostajnej szeregów trygonometrycznych jest zagadnieniem klasycznym, które przyciągnęło zainteresowanie wielu matematyków, a wyniki ich badań zostały między innymi opublikowane w uznanych czasopismach zagranicznych i krajowych. Autor przypomina te ważne wyniki w swojej rozprawie i przedstawia nowe wyniki w tym zakresie (uzyskane głównie we współpracy z B. Szalem), które są omówione poniżej.

Twierdzenie 9 rozprawy przedstawia warunek konieczny zbieżności jednostajnej szeregów (S) i (C) dla ciągów $(c_k), (d_k)$ należących do klasy $GM(p, {}_6\delta(q), r)$.

Klasa ta została zdefiniowana w rozprawie w sposób następujący. Ciąg zespolony (c_k) dążący do zera należy do klasy $GM(p, {}_6\delta(q), r)$, jeśli dla pewnej stałej C zależnej tylko od (c_k) zachodzi

$$\left(\sum_{k=n}^{2n-1} |c_k - c_{k+r}|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{C}{n} \left(\max_{b(n) \leq m \leq \lambda b(n)} m \left(\frac{1}{m} \sum_{k=m}^{2m} |c_k|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right),$$

¹Odniesienia do literatury zgodne z bibliografią rozprawy.

22

gdzie $r \in \mathbb{N}$, $p, q > 0$, $\lambda \geq 2$, a b jest nieujemnym ciągiem dążącym monotonicznie do nieskończoności.

Doktorant wskazuje, że dla $r = 1$ klasa ta została wcześniej zdefiniowana w pracach Tikhonova i Liflyanda [29,30] (to samo dotyczy klasy $GM(p, {}_5\delta(q), r)$, która zostanie omówiona poniżej). W rozprawie jest jednak wykazane, że klasa $GM(p, {}_6\delta(q), r)$ jest istotnie szersza od klasy $GM(p, {}_6\delta(q), 1)$ (oraz że klasa $GM(p, {}_5\delta(q), r)$ jest istotnie szersza od klasy $GM(p, {}_5\delta(q), 1)$). Ponadto, prace [29,30] nie zawierają wyników analogicznych do wyników uzyskanych w rozprawie.

Wspomniane Twierdzenie 9 mówi w swej pierwszej części, że jeśli ciąg nieujemny (c_k) należy do klasy $GM(p, {}_6\delta(q), r)$, gdzie $r \in \mathbb{N}$, $p, q \geq 1$ oraz $\frac{b(n)}{n} = O(1)$ i szereg (S) jest zbieżny jednostajnie, to

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1} c_n = 0.$$

A w drugiej części, że jeśli ciąg nieujemny (d_k) należy do klasy $GM(p, {}_6\delta(q), r)$, gdzie $r \in \mathbb{N}$, $p, q \geq 1$ oraz $\frac{b(n)}{n} = O(1)$ i szereg (C) jest zbieżny jednostajnie, to

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1} d_n = 0.$$

Można zauważyć, że powyższy wynik jest cenny dla małych wartości p i q . W istocie, dla $p = q = 1$ pierwszy z powyższych warunków jest zgodny z klasycznym warunkiem koniecznym zbieżności jednostajnej szeregu (S) , ale jest on uzyskany dla szerszej klasy ciągów (c_k) . Natomiast, jeśli $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} < 1$, to oba uzyskane warunki są słabsze od wyjściowego założenia, że ciągi (c_k) i (d_k) dążą do zera.

Twierdzenie 10 rozprawy przedstawia warunek dostateczny zbieżności jednostajnej szeregu (S) dla ciągu (c_k) należącego do klasy $GM(p, {}_5\delta(q), r)$.

Klasa ta została zdefiniowana w rozprawie w sposób następujący. Ciąg zespolony (c_k) dążący do zera należy do klasy $GM(p, {}_5\delta(q), r)$, jeśli dla pewnej stałej C zależnej tylko od (c_k) zachodzi

$$\left(\sum_{k=n}^{2n-1} |c_k - c_{k+r}|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{C}{n} \left(\sup_{m \geq b(n)} m \left(\frac{1}{m} \sum_{k=m}^{2m} |c_k|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right),$$

gdzie $r \in \mathbb{N}$, $p, q > 0$, $\lambda \geq 2$, a b jest nieujemnym ciągiem dążącym monotonicznie do nieskończoności.

Wspomniane Twierdzenie 10 mówi, że jeśli ciąg zespolony (c_k) należy do klasy $GM(p, {}_5\delta(q), r)$, gdzie $r \in \mathbb{N}$, $p > 1$, $q \geq 1$ oraz szereg

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin \left(\frac{2l\pi}{r} k \right) \tag{W1}$$

jest zbieżny dla $r \geq 3$ i dowolnego $l \in \{1, \dots, [\frac{r}{2}] - 1\}$, gdy r jest liczbą parzystą oraz $l \in \{1, \dots, [\frac{r}{2}]\}$, gdy r jest liczbą nieparzystą, to warunkiem dostatecznym dla zbieżności szeregu (S) jest

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \ln(n) |c_n| = 0. \tag{W2}$$

Pierwsza drobna uwaga dotyczy konieczności rozbicia powyższego sformułowania na przypadki zależące od parzystości r . Gdy r jest liczbą parzystą i $l = [\frac{r}{2}]$, to $2l = r$ i warunek (W1) jest spełniony w sposób trywialny. Widać więc, że to rozbicie nie jest konieczne i może być zastąpione krótszym sformulowaniem: "i dowolnego $l \in \{1, \dots, [\frac{r}{2}]\}$ " bardziej zgodnym z tym co występuje w Twierdzeniach 12 i 14 dalszej części rozprawy. Być może autor dokonał tego niepotrzebnego rozbicia, aby uniknąć formułowania trywialnych warunków. Jeśli tak, to może to pomóc w wyjaśnieniu o wiele istotniejszego zagadnienia.

Polega ono na zrozumieniu, czy wspomniane Twierdzenie 10 zachodzi dla $r = 1$ i $r = 2$. Przynajmniej część czytelników widząc warunek (W1), a następnie ograniczenie $r \geq 3$ może uznać, że prawdziwość Twierdzenia 10 dla $r = 1$ i $r = 2$ pozostaje kwestią otwartą.

Z drugiej strony, dla $r = 1$ i $r = 2$ warunek (W1) jest trywialnie spełniony i może ponownie autor wprowadził niepotrzebne ograniczenie $r \geq 3$ tylko po to, aby uniknąć formułowania trywialnych warunków.

Ostatnia uwaga dotyczy ograniczenia $p > 1$. Twierdzenie 1 rozprawy stwierdza w swej pierwszej części, że

$$GM(p_1, {}_5\delta(q), r) \subseteq GM(p_2, {}_5\delta(q), r)$$

dla $0 < p_1 \leq p_2$ i dowolnych $q > 0, r \in \mathbb{N}$. W szczególności oznacza to, że

$$GM(1, {}_5\delta(q), r) \subseteq GM(p, {}_5\delta(q), r)$$

dla $p > 1$. Skoro więc warunek dostateczny (W2) nie zależy od p i działa dla klasy $GM(p, {}_5\delta(q), r)$ z $p > 1$, to powinien również działać dla mniejszej klasy $GM(1, {}_5\delta(q), r)$.

W skrócie, Twierdzenie 10 powinno automatycznie zachodzić, gdy $p = 1$, a nawet $p > 0$ (oraz $q > 0$ dzięki Twierdzeniu 4 rozprawy).

Uwagi dotyczące Twierdzenia 10 są o tyle istotne, że jest ono zawarte w preprincie [16], który może być poprawiony przed publikacją.

Twierdzenie 11 rozprawy przedstawia warunek dostateczny zbieżności jednostajnej szeregu (C) dla ciągu (d_k) należącego do klasy $GM(p, {}_5\delta(q), r)$.

Twierdzenie to mówi, że jeśli ciąg zespolony (d_k) należy do klasy $GM(p, {}_5\delta(q), r)$, gdzie $r \in \mathbb{N}, p > 1, q \geq 1$ oraz szereg

$$\sum_{k=1}^{\infty} d_k \cos\left(\frac{2l\pi}{r}k\right) \quad (W3)$$

jest zbieżny dla dowolnego $l \in \{0, 1, \dots, [\frac{r}{2}]\}$, to warunkiem dostatecznym dla zbieżności szeregu (C) jest

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \ln(n) |d_n| = 0. \quad (W4)$$

Tu można tylko wyjaśnić, czy wskazane ograniczenia $p > 1, q \geq 1$ można automatycznie osłabić do $p, q > 0$ (tak jak w Twierdzeniu 10).

Ponadto warto dodać, że Twierdzenie 11 jest zamieszczone w preprincie [16] bez dowodu, natomiast jest on zawarty w rozprawie. Doktorant podaje również w Uwadze 13 rozprawy

przykład ciągu (d_k) , spełniającego warunki (W3) i (W4), dla którego szereg $\sum_{k=1}^{\infty} d_k$ nie jest

bezwzględnie zbieżny. W rozprawie brakuje jednak stwierdzenia, czy ten ciąg (d_k) należy do klasy $GM(p, {}_5\delta(q), r)$. Dlatego nie widać, że dla uzyskania zbieżności jednostajnej wszystkich szeregów cosinusów rozważanych w Twierdzeniu 11 nie można użyć kryterium Weierstrassa.

Rozprawa nie zawiera podobnego przykładu ciągu (c_k) , spełniającego warunki (W1) i (W2), dla którego szereg $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ nie jest bezwzględnie zbieżny. Autor stwierdza, że znalezienie

takiego ciągu jest możliwe i zamieszcza (bez dowodu) twierdzenie analogiczne do Twierdzenia 11 podające warunek dostateczny zbieżności jednostajnej szeregu (E).

W dalszej części rozprawy doktorant rozważa zbieżność jednostajną podwójnych szeregów trygonometrycznych (SS) i (SC). Wyniki tej części dotyczą klasy $DGM(p, {}_2\alpha, {}_2\beta, {}_2\gamma, r)$ ciągów zespolonych $(c_{j,k})$ definiowanej przy pomocy różnic

$$\begin{aligned} \Delta_{r0}c_{j,k} &= c_{j,k} - c_{j+r,k}, & \Delta_{0r}c_{j,k} &= c_{j,k} - c_{j,k+r}, \\ \Delta_{rr}c_{j,k} &= \Delta_{r0}(\Delta_{0r}c_{j,k}) = c_{j,k} - c_{j,k+r} - c_{j+r,k} + c_{j+r,k+r}. \end{aligned}$$

Ciąg zespolony $(c_{j,k})$ należy do klasy $DGM(p, {}_2\alpha, {}_2\beta, {}_2\gamma, r)$, jeśli $c_{j,k} \rightarrow 0$, gdy $j+k \rightarrow \infty$ oraz istnieje liczba naturalna $\lambda \geq 2$ oraz trzy ciągi b_1, b_2, b_3 dążące do nieskończoności takie, że

$$\begin{aligned} \left(\sum_{j=m}^{2m-1} |\Delta_{r0}c_{j,n}|^p \right)^{\frac{1}{p}} &\leq \frac{C}{m} \left(\max_{b_1(m) \leq M \leq \lambda b_1(m)} \sum_{j=M}^{2M} |c_{j,n}| \right), & m \geq \lambda, \quad n \geq 1, \\ \left(\sum_{k=n}^{2n-1} |\Delta_{0r}c_{m,k}|^p \right)^{\frac{1}{p}} &\leq \frac{C}{n} \left(\max_{b_2(n) \leq N \leq \lambda b_2(n)} \sum_{k=N}^{2N} |c_{m,k}| \right), & m \geq 1, \quad n \geq \lambda, \\ \left(\sum_{j=m}^{2m-1} \sum_{k=n}^{2n-1} |\Delta_{rr}c_{j,k}|^p \right)^{\frac{1}{p}} &\leq \frac{C}{mn} \left(\sup_{M+N \geq b_3(m+n)} \sum_{j=M}^{2M} \sum_{k=N}^{2N} |c_{j,k}| \right), & m, n \geq \lambda, \end{aligned}$$

22

dla pewnej stałej C .

Doktorant podaje, że dla $p = r = 1$ klasa ta została zdefiniowana przez P. Kórusa i wykazuje, że klasa $DGM(p, {}_2\alpha, {}_2\beta, {}_2\gamma, r)$ jest istotnie szersza od klasy $DGM(1, {}_2\alpha, {}_2\beta, {}_2\gamma, 1)$.

Twierdzenia 16 i 26 rozprawy przedstawiają warunek konieczny zbieżności jednostajnej szeregów (SS) i (SC) dla nieujemnego ciągu $(c_{j,k})$ należącego do klasy $DGM(p, {}_2\alpha, {}_2\beta, {}_2\gamma, r)$, gdzie $r \in \mathbb{N}$ i $p \geq 1$. W obu przypadkach ten warunek to $(mn)^{\frac{1}{p}} c_{m,n} \rightarrow 0$, gdy $m + n \rightarrow \infty$.

Twierdzenia 18 i 24 rozprawy przedstawiają warunki dostateczne zbieżności jednostajnej szeregów (SS) i (SC) dla zespolonego ciągu $(c_{j,k})$ należącego do klasy $DGM(p, {}_2\alpha, {}_2\beta, {}_2\gamma, r)$, gdzie $r \in \mathbb{N}$ i $p > 1$. W obu przypadkach te warunki to

$$\sup_{j \geq m} j \ln(j) \sum_{k=n}^{\infty} |c_{j,k}| \rightarrow 0, \quad (W5)$$

$$\sup_{k \geq n} k \ln(k) \sum_{j=m}^{\infty} |c_{j,k}| \rightarrow 0, \quad (W6)$$

$$mn \ln(m) \ln(n) |c_{m,n}| \rightarrow 0, \quad (W7)$$

gdy $m + n \rightarrow \infty$.

Ponadto, analogicznie jak w poprzedniej części rozprawy, powyższe twierdzenia wymagają dodatkowego założenia zbieżności (regularnej) szeregów (SS) i (SC) w punktach $(x, y) = (\frac{2l_1\pi}{r}, \frac{2l_2\pi}{r})$ dla $l_1, l_2 \in \mathbb{Z}$. W Twierdzeniu 18 w tym dodatkowym założeniu pojawia się wymóg, że powinno być ono spełnione dla "dowolnego $r \geq 3$ ". Dlatego, tak jak przy Twierdzeniu 10 tak i tu należy wyjaśnić, czy ograniczenie $r \geq 3$ może być usunięte (i czy warto dokonywać rozbicia sformułowania tego dodatkowego warunku w Twierdzeniu 18 w zależności od parzystości r). Warto dodać, że w Uwadze 19 rozprawy doktorant sam stwierdza, że ten dodatkowy warunek jest spełniony dla $r = 1$ i $r = 2$.

Odnosnie ograniczenia $p > 1$ widocznego w Twierdzeniach 18 i 24 sprawa ma się dosyć ciekawie i może rzucać dodatkowe światło na podobne ograniczenie wprowadzone w Twierdzeniach 10 i 11.

Twierdzenie 5 rozprawy stwierdza w swej pierwszej części, że

$$DGM(p_1, {}_2\alpha, {}_2\beta, {}_2\gamma, r) \subseteq DGM(p_2, {}_2\alpha, {}_2\beta, {}_2\gamma, r)$$

dla $0 < p_1 \leq p_2$ i $r \in \mathbb{N}$. To oznacza, że (jak miemam) wspomniane ograniczenie $p > 1$ może być automatycznie osłabione do $p \geq 1$ (a nawet $p > 0$). Jednakże okazuje się, że w przypadku $p = 1$ doktorant formułuje silniejsze wyniki od tych uzyskanych w Twierdzeniach 18 i 24. Te mocniejsze wyniki to Twierdzenia 21 i 25 polegające na zauważeniu, że w przypadku $p = 1$ z powyższych warunków dostatecznych (W5)–(W7) można usunąć logarytmy.² Ta obserwacja rodzi następujące pytanie: Czy w takim razie w przypadku $p = 1$ można również wzmocnić Twierdzenia 10 i 11? Wspomniane w rozprawie wyniki P. Kórusa i K. Duzinkiewicza dla ciągów z klasy $GM(1, {}_5\delta(1), r)$ z $r = 1$ i $r = 2$ potwierdzają, że usunięcie logarytmu z warunku (W2) i eliminacja warunku (W4) są czasem możliwe w przypadku $p = 1$.

Konkluzja: Ogólna ocena rozprawy przedstawionej przez doktoranta jest pozytywna. Autor prezentuje nowe wyniki podające warunki konieczne i dostateczne dla zbieżności jednostajnej pojedynczych i podwójnych szeregów trygonometrycznych dla szerokich klas ciągów współczynników tych szeregów. Część tych wyników została opublikowana w Colloquium Mathematicum oraz w biuletynie Belgijskiego Towarzystwa Matematycznego we wspólnych pracach z promotorem. Część została wysłana do publikacji, a inna część może stanowić podstawę dalszej pracy naukowej.

Wyniki rozprawy opierają się na wcześniejszym pomysle promotora polegającym na rozważaniu różnic wyrazów ciągu współczynników tych szeregów nie tylko między sąsiednimi wyrazami, ale też między tymi oddalonymi o (liczbę naturalną) r . To pozwala na rozszerzenie znanych klas ciągów współczynników i umożliwia odkrywanie nowych wyników w zakresie zbieżności

²Doktorant sugeruje, że Twierdzenie 21 pozwala na otrzymanie wcześniejszego wyniku K. Duzinkiewicza i B. Szala z pracy [3]. Budzi to pewną wątpliwość, gdyż wynik tych autorów został uzyskany bez założeń (3.45) i (3.46) widocznych w Twierdzeniu 21 rozprawy. Podobna uwaga dotyczy Twierdzenia 25 i sposobu uzyskania z niego Twierdzenia 23.

ZR

jednostajnej szeregów trygonometrycznych. Te klasy rozważane w rozprawie są również szerokie ze względu na zdefiniowanie ich przy pomocy norm l^p i l^q (ściślej mówiąc doktorant rozważa także dodatnie p i q mniejsze od jeden).

W mojej ocenie głównym odkryciem pracy jest wykazanie, że wyżej wymienione klasy mogą być badane dla $r > 2$ przy założeniu, że rozważane szeregi trygonometryczne są zbieżne w punktach postaci $\frac{2l\pi}{r}$, gdzie $l \in \mathbb{Z}$. To założenie pozwala na uzyskanie nowych warunków dostatecznych dla zbieżności jednostajnej szeregów trygonometrycznych dla szerokich klas ciągów współczynników tych szeregów. Wyniki te są bardzo wymagające pod względem dowodów szczególnie w przypadku szeregów podwójnych i mają swoją cenę. Polega ona na tym, że dotychczasowe osiągnięcia w tym zakresie wskazywały, że podane warunki dostateczne są konieczne dla ciągów nieujemnych. Ten efekt nie jest obecny w rozprawie.

Podsumowując, moim zdaniem wyniki doktoranta przedstawione w rozprawie oraz jego publikacje spełniają wymogi ustawowe i wnoszę o dopuszczenie go do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

Mam również nadzieję, że nieścisłości w rozprawie wskazane w powyższej recenzji będą mogły być wyjaśnione podczas obrony.

Ziemowit Rzeszutnik

Ziemowit Rzeszutnik