

dr hab. Janusz Morawiec
Uniwersytet Śląski w Katowicach

Katowice, 10 czerwca 2021 roku

Recenzja rozprawy doktorskiej

mgra Mariusza Sudzika

pt. *On continuous solutions of linear functional equations of infinite order*

Uwagi wstępne

Przedstawiona rozprawa doktorska Pana mgra Mariusza Sudzika napisana została pod kierunkiem prof. dra hab. Witolda Jarczyka, pracownika Uniwersytetu Zielonogórskiego. Dotyczy problemu (postawionego w roku 2016 na międzynarodowej konferencji z serii *European Conference on Iteration Theory* i powtórzono rok później na międzynarodowej konferencji z serii *International Symposium on Functional Equations*) przez, cenionego na świecie matematyka z *Ben Gurion University of the Negev* – Gregorego Derfla. Postawiony problem dotyczy szczególnego przypadku, dosyć ogólnego i badanego od wielu lat, równania funkcyjnego postaci

$$(A) \quad \varphi(x) = \iint_{\mathbb{R}^2} \varphi(a(x-b))P(da, db),$$

gdzie P jest borelowską miarą probabilistyczną w $\mathbb{R}^2$, a $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją niewiadomą. Równanie (A) jest bardzo interesujące, gdyż przy odpowiednich wyborach miary P redukuje się do dobrze znanych i intensywnie badanych równań funkcyjnych, które pełnią ważne role w wielu teoriach matematycznych; np. prawdopodobieństwa, falek, czy iterowanych układów funkcyjnych. Równanie to zawiera również bardzo ciekawe i wciąż wymagające dalszych badań bardzo szczególne równania funkcyjne; chociażby pochodzące z fizyki równanie Schillinga (opisujące amorficzne zachowanie pewnych materiałów) lub też równanie związane z problemem Erdősa (opisujące własności splotu nieskończonego ciągu miar Bernoulliego).

Równanie (A) można badać w różnych klasach funkcji, jednakże z punktu widzenia zastosowań szczególnie interesująca jest klasa funkcji ograniczonych i jej rozmaite podklasy funkcji regularnych. Badanie ciągłych i ograniczonych

rozwiązań równania (A) zainicjował Gregory Derfel, a wyniki uzyskane przez niego wspólnie z Leonidem Bogachevem i Stanislavem Molchanovem stanowią istotną część tych badań. Jak dotąd, ciągle rozwiązania równania (A) w klasie funkcji ograniczonych badane były w szczególnych przypadkach (i wiadomo, że w prawie każdym z tych przypadków istnienie niestałych rozwiązań zależy od pewnych parametrów). Jednym z wciąż wymagających badania przypadków równania (A) jest sytuacja, gdy zachodzi następujący warunek:

$$(w) \quad P(a < 0) > 0 \quad \text{oraz} \quad P(|a| = 1) < 1.$$

Właśnie tej sytuacji dotyczy wspomniany problem Gregorego Derfla. Pan mgr Mariusz Sudzik podał częściową odpowiedź na postawiony problem i włączył się w nurt prowadzonych badań nad równaniem (A) następującymi artykułami naukowymi:

- [1] Mariusz Sudzik, *On a functional equation related to a problem of G. Derfel*, Aequationes Mathematicae 93 (2019), 137–148.
- [2] Mariusz Sudzik, *The archetypal equation and its solutions attaining the global extremum*, Aequationes Mathematicae 95 (2021), 505–526.
- [3] Mariusz Sudzik, *Iterative functional equations and global attractive fixed points*, maszynopis.

Artykuły [2] i [3] stanowią główny trzon przedstawionej rozprawy doktorskiej, lecz wyniki z tych artykułów nie są jedynymi rezultatami zawartymi w omawianej rozprawie. Publikacje monoautorskie Pana mgr Mariusza Sudzika potwierdzają jego zdolności do prowadzenia samodzielnej pracy badawczej. Nie pozwalają jednak autorytatywnie określić jego zdolności do współpracy, co jest równie istotne jak umiejętność pracy indywidualnej.

Omówienie rozprawy i uzyskanych wyników

Rozprawa napisana jest w języku angielskim i liczy 93 strony. Składa się z przedmowy, spisu treści, wprowadzenia, pięciu rozdziałów, spisu literatury liczącej 38 pozycji oraz streszczenia w języku polskim. Pięć rozdziałów liczy łącznie 81 stron czystego tekstu matematycznego.

W rozdziale pierwszym ustalona została terminologia i notacja używana w dalszej części rozprawy. Zawiera on również podstawowe fakty z różnych działów matematyki, które znajdują zastosowanie w dowodach prezentowanych wyników.

Rozdział drugi – moim zdaniem najciekawsza część przedstawionej rozprawy doktorskiej – jest poświęcony równaniu (A), a jego wyniki dotyczą

ciągłych i ograniczonych rozwiązań tego równania w przypadku, gdy zachodzi warunek (w). Rozpoczyna się od przedstawienia aktualnej wiedzy na temat ciągłych i ograniczonych rozwiązań rozważanego równania z licznymi przykładami ilustrującymi zakres tej wiedzy. Pierwsze z czterech twierdzeń tego rozdziału (Theorem 2.3.1 w rozprawie), którego dowód (liczący 13 stron i oparty na dwóch lematach) wymaga rozpatrzenia wielu przypadków i szeregu technicznych rachunków, podaje częściową odpowiedź na problem Grego-rego Derfla. Drugie twierdzenie (Theorem 2.3.2 w rozprawie) podaje inne warunki gwarantujące zachowanie tezy twierdzenia pierwszego. Dwa kolejne twierdzenia (Theorem 2.4.1 i Theorem 4.2.2 w rozprawie) są odpowiednikami Theorem 4.3 z pozycji [10], literatury cytowanej w omawianej rozprawie i powiadają (pod założeniami twierdzeń 2.3.1 i 2.3.2, odpowiednio), że każde niestałe rozwiązanie równania (A) w klasie funkcji ciągłych i ograniczonych jest oscylujące zarówno w $+\infty$, jak i w $-\infty$.

W rozdziale trzecim rozważane jest równanie skończonego rzędu, a celem prezentowanych tam wyników (Corollary 3.2.1, Corollary 3.2.2 i Corollary 3.3.2) jest zachowanie tez twierdzeń rozdziału drugiego. Rząd rozważanego równania został znacząco obniżony, lecz w zamian dopuszczone zostały nie-afiniczne transformacje argumentów przez homeomorfizmy prostej na siebie, spełniające pewne własności istotnie słabsze niż komutowanie. Wyniki zawarte w tym rozdziale nie zostały jeszcze przez Autora omawianej rozprawy spisane.

W rozdziale czwartym badane są ograniczone rozwiązania borelowskie $\varphi: X \rightarrow Y$ równian funkcyjnego postaci

$$(E) \quad \varphi(x) = \int_{\Omega} \varphi(f_{\omega}(x)) P(d\omega),$$

gdzie $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ jest przestrzenią probabilistyczną, X jest zupełną przestrzenią metryczną, Y jest ośrodkową przestrzenią Banacha, a $\{f_{\omega} | \omega \in \Omega\}$ jest rodziną złożoną z kontrakcji w sensie Matkowskiego. Celem tego rozdziału jest podanie warunków pozwalających stwierdzić, że funkcje stałe są jedynymi ograniczonymi rozwiązaniami borelowskimi równania (E), które są ciągłe w każdym punkcie pewnego zbioru niezmienniczego względem każdej funkcji f_{ω} . Rezultatami realizującymi ten cel są wnioski (jest ich w rozprawie 10) wyprowadzane z głównych twierdzeń omawianego rozdziału (Theorem 4.1.1 i Theorem 4.2.1 w rozprawie).

Rozprawę kończy rozdział piąty, będący w zasadzie dodatkiem. Zawiera krótką dyskusję nad oryginalnym problemem Grego-rego Derfla i pięć nowych problemów, które – jak rozumiem – nakreślają program przyszłych badań Pana mgra Mariusza Sudzika.

Każdy rozdział zawiera stosowną liczbę przykładów, które służą precyzyj-nemu usytuowaniu uzyskanych wyników w literaturze przedmiotu.

Merytoryczna ocena rozprawy

Od strony formalnej redakcji przedstawiona rozprawa doktorska nie budzi najmniejszych zastrzeżeń. Napisana jest bardzo starannie i precyzyjnie z pełnym formalizmem notacyjnym, a nieliczne drobne błędy są w istocie niezauważalne. Jej układ jest dobrze przemyślany, a zawarte w niej treści tworzą jednolitą całość. Dowody zredagowane są przejrzysto i merytorycznie poprawne. Pomimo, że znaczną jej część tworzą fragmenty ww. artykułów Pana mgra Mariusza Sudzika, nie ma się wrażenia, iż rozprawa składa się ze sklejonych fragmentów.

Do merytorycznego aspektu przedstawionej rozprawy doktorskiej nie mam zasadniczych uwag – dotyczy trudnego zagadnienia z teorii równań funkcyjnych. Zawarte w niej wyniki wpisują się w nurt prowadzonych badań i istotnie poszerzają wiedzę na temat ciągłych rozwiązań równania (A) w klasie funkcji ograniczonych. Są dalece nietrywialne, nowe i wartościowe oraz dowodzą bardzo dobrej orientacji Autora omawianej rozprawy w literaturze przedmiotu. Świadczą również o dojrzałości warsztatu naukowego Pana mgra Mariusza Sudzika, a także jego zawziętości badawczej i sprawności prowadzenia skomplikowanych technicznie dowodów. Środki i techniki dowodowe stosowane w omawianej rozprawie wskazują na znaczną erudycję matematyczną jej Autora i swobodę posługiwania się teorią miary i całki. Nie bacząc na drobne i nieistotne niedociągnięcia, które pozwolę sobie odnotować poniżej, przedstawioną rozprawę doktorską Pana mgra Mariusza Sudzika oceniam bardzo wysoko.

1. W Definicji 1.1.5 i Uwadze 1.1.5 brakuje założenia niepustości rozważanych zbiorów; zauważmy, że zbiór $A(\varepsilon)$ występujący w Definicji 1.1.5 nie jest poprawnie określony w przypadku, gdy $A = \emptyset$.
2. W wypowiedzi Twierdzenia 1.1.2 pojawia się pojęci atraktora, którego definicję należałoby podać wcześniej dla ujednolicenia tekstu rozprawy; pozostałe pojęcia wykorzystywane w przedstawionej rozprawie są skrupulatnie wprowadzane.
3. W omawianej rozprawie jest sporo dowodów indukcyjnych, a część z nich opatrzona jest lapidarnymi stwierdzeniami (np. na stronach 29, 42, 44, 79); Autor mógł oszczędzić czytelnikowi samodzielnego wykonywania pominiętych obliczeń.
4. W końcówce dowodu Twierdzenia 3.2.1 na stronie 55 Autor wnioskuje, że wzór $\varphi(f_i(f_{i_k}^{-1}(x_0))) = \varphi(x_0)$ zachodzi dla wszystkich $i \in I \setminus \{i_k\}$. Nie jest zrozumiałe dlaczego wykluczony został indeks i_k .
5. W rozdziale trzecim rozprawy Autor ograniczył się do równania postaci $\varphi(x) = \sum_{i \in I} \varphi(f_i(x))$. Wydaje się, że prowadzone rozumowania można

przenieść na równanie (E); np. Lemat 3.2.1 mógłby brzmieć następująco:
Assume that $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ is a solution of equation (E) and there exists $x_0 \in \mathbb{R}$ such that (3.2) or (3.3) holds. Then for every $n \in \mathbb{N}$ we have $\varphi(x_0) = \varphi((f_{\omega_1} \circ \dots \circ f_{\omega_n})(x_0))$ for almost all $(\omega_1, \dots, \omega_n) \in \Omega^n$.

6. W rozdziale czwartym zakłada się, że dana funkcja $f: \Omega \times X \rightarrow X$ jest $\mathcal{A}$ -mierzalna względem pierwszej zmiennej. Jest to założenie wystarczające dla rozważania borelowskich rozwiązań $\varphi: X \rightarrow Y$ równania (4.2), gdyż funkcja występująca pod całką tego równania jest wtedy $\mathcal{A}$ -mierzalna. Nie jest natomiast jasne, czy funkcja występująca pod całką w trzeciej linii dowodu Twierdzenia 4.1.1 jest $\mathcal{A}^n$ -mierzalna. Z reguły w tego typu sytuacjach zakłada się o funkcji f , że jest $\mathcal{B} \otimes \mathcal{A}$ -mierzalna, gdzie $\mathcal{B}$ jest σ -ciałem zbiorów borelowskich przestrzeni X .
7. W dowodzie twierdzenia 4.1.1 w trzeciej linii od dołu na stronie 65 Autor napisał "Hence and from the fact that $P(A) \in (0, 1)$ we get". Dlaczego $P(A) < 1$?
8. Na stronie 73 Autor napisał, że odwołując się Twierdzenia 4.2.1 otrzymujemy Wniosek 4.3.7; w istocie należałoby odwołać się do dowodu Twierdzenia 4.2.1, co nie jest najlepszym rozwiązaniem. Lepiej byłoby przeformułować nieco Twierdzenie 4.2.1 w ten sposób, by w jego tezie występował zbiór, o którym mowa w tezie Wniosku 4.3.7.
9. Nie znajduję powodu formułowania oczywistego Wniosku 4.3.8, chyba, że Autor rozprawy chciał sprowokować zadanie następującego pytania: Które z wyników zawartych w rozprawie można uogólnić na równanie funkcyjne (4.5) z dowolną funkcją $\delta: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$?
10. Dowód Propozycji 4.5.1 można istotnie skrócić. Mianowicie, ustalając $y \in (0, \infty)$ i kładąc $x = \sqrt[n]{y}$ w (4.10), a następnie przechodząc z n do nieskończoności otrzymujemy $\varphi(y) = \varphi(1)$. Dodatkowo dostajemy następujące wzmocnienie tezy Propozycji 4.5.1: *If φ is continuous at 1, then φ is constant on $(0, \infty)$*
11. Na stronie 82 Autor powołując się na Twierdzenie 2.2.3 wnioskuje, że jedynymi ciągłymi rozwiązaniami równania (5.1) w klasie funkcji ograniczonych są funkcje stałe; nie zauważył jednak, że nie są spełnione założenia Twierdzenia 2.2.3.

Konkluzja

Przestawiona rozprawa doktorska stanowi wnikliwą i bardzo szczegółową analizę trudnego problemu naukowego, postawionego przez matematyka

światowej klasy. Prezentuje ogólną wiedzę teoretyczną Pana mgra Mariusza Sudzika w dyscyplinie matematyka, a także potwierdza umiejętność samodzielnego prowadzenia przez niego badań naukowych. Zawarte w niej oryginalne wyniki dotyczą delikatnych i trudnych zagadnień. Podsumowując, uważam, że w myśl ustawy *Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce* z dnia 20 lipca 2018 roku (Dz.U. 2018 poz. 1668), rozprawa doktorska Pana mgra Mariusza Sudzika **spełnia wymagania stawiane kandydatom do stopnia naukowego doktora nauk matematycznych** i wnioskuję o dopuszczenie do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

Janusz Herawiec