

Streszczenie rozprawy doktorskiej
On continuous solutions of linear functional equations of infinite order
autorstwa mgr. Mariusza Sudzika

Badania i rezultaty zamieszczone w rozprawie poświęcone są pewnym liniowym równaniom funkcyjnym nieskończonego rzędu. Punktem wyjścia do podjęcia przeze mnie badań w tym kierunku był problem postawiony przez Gregory'ego Derfla na *21st European Conference on Iteration Theory*, która została zorganizowana w 2016 roku w Innsbrucku (Austria). Swoje pytanie prof. Derfel powtórzył także rok później w trakcie *55th International Symposium on Functional Equations*, które miało miejsce w Chengdu, w Chinach. Gregory Derfel zapytał mianowicie o to, czy wszystkie ograniczone i ciągłe funkcje $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełniające równanie

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}\varphi(x-1) + \frac{1}{2}\varphi(-2x) \quad (1)$$

są stałe?

Sam problem jest związany z tzw. równaniem archetypicznym, którym zajmuje się prof. Derfel. Równanie archetypiczne jest to równanie funkcyjne postaci

$$\varphi(x) = \iint_{\mathbb{R}^2} \varphi(a(x-b))\mu(da, db), \quad (2)$$

gdzie μ jest ustaloną borelowską miarą probabilistyczną określoną na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$, a $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ szukaną funkcją. Wybierając konkretne miary μ otrzymujemy znane i badane wcześniej równania. Oznacza to, że analizując równanie (2) możemy badać jednocześnie obszerne klasy liniowych równań funkcyjnych. Ta szeroka perspektywa, którą w ten sposób osiągamy, uzasadnia trafność nazwy *równanie archetypiczne*. Warto dodać, że dla niektórych wyborów miary μ równanie (2) redukuje się do pewnych równań różniczkowych, np. równania pantografu.

Równanie (2) zostało dokładnie zbadane przez: L. Bogacheva, G. Derfla i S. Molchanova. Wiadomo między innymi, że ogromny wpływ na jego rozwiązania w klasie funkcji ograniczonych i ciągłych ma parametr K definiowany jako poniższa całka

$$K := \iint_{\mathbb{R}^2} \ln |a|\mu(da, db).$$

Można wykazać, że dla $K < 0$ przy pewnych dodatkowych technicznych założeniach, równanie (2) nie ma w klasie funkcji ograniczonych i ciągłych innych rozwiązań niż funkcje stałe, w przypadku gdy $K > 0$ oraz $\mu((0, +\infty) \times \mathbb{R}) = 1$ potrafimy skonstruować niestałe rozwiązania. Sytuacja kiedy $K > 0$ i $\mu((-\infty, 0) \times \mathbb{R}) > 0$, a tak jest w równaniu (1), jest po dziś dzień niezbyt dobrze zbadana i pełna znaków zapytania. W rozprawie doktorskiej stawiam sobie za cel pogłębienie wiedzy o równaniu archetypicznym w tym przypadku.

Cała rozprawa została podzielona na pięć części. Rozdział 1 ma charakter wprowadzający i zawiera spis najważniejszych twierdzeń, faktów i oznaczeń stosowanych w kolejnych fragmentach rozprawy. Znajdują się tu dwie sekcje zatytułowane „Układy dynamiczne” oraz „Miara i całka”.

W Rozdziale 2 badam rozwiązania równania (2) osiągające wartość najmniejszą bądź największą dla szerokiej klasy miar μ , w szczególności analizie poddane zostaje równanie (1). Główny mój wynik z tej części rozprawy implikuje między innymi, że jeżeli rozwiązanie ograniczone i ciągłe $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ równania (1) osiąga ekstremum globalne, to φ musi być funkcją stałą. Poza tym stałość ograniczonych i ciągłych rozwiązań równania Derfla uzyskałem także przy założeniu, że istnieje choć jedna z granic $\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x)$ lub $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x)$. Dodatkowo udało mi się zbadać jaki kształt powinno mieć potencjalne niestałe rozwiązanie φ równania (1) – okazało się, że taka funkcja musi oscylować zarówno w $-\infty$ jak i w $+\infty$; dokładniej: kiedy kierujemy się w stronę $-\infty$ lub $+\infty$, to wykres rozwiązania powinien nieskończenie wiele razy zbliżyć się nieskończenie blisko do kresu dolnego jak i do kresu górnego zbioru wartości rozwiązania φ .

Rozdział 3 zawiera pewne uogólnienie moich głównych wyników z Rozdziału 2 na równania funkcyjne postaci

$$\varphi(x) = \sum_{i \in I} p_i \varphi(f_i(x)), \quad (3)$$

gdzie $I \subseteq \mathbb{Z}$, dla każdego $i \in I$ funkcja $f_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest homeomorfizmem i $p_i \in (0, 1)$, przy czym $\sum_{i \in I} p_i = 1$. W ogólności dane homeomorfizmy nie muszą być funkcjami afinicznymi, gdyż w przeciwnym razie trafiamy ponownie do Rozdziału 2, ponieważ równanie (3) może zostać potraktowane jako szczególny przypadek równania archetypicznego. W Rozdziale 3 zastosowanie ma relacja równoważności generowana przez funkcje z rodziny $\{f_i\}_{i \in I}$, która została opisana po raz pierwszy przez Kazimierza Kuratowskiego. Wykazałem, że pod pewnymi warunkami – wprowadzonymi przeze mnie warunkami zgodności – każde ograniczone rozwiązanie równania (3), które osiąga na klasie abstrakcji wyznaczonej przez relację Kuratowskiego ekstremum globalne, musi być stałe na tej klasie abstrakcji. To ogólne twierdzenie można naturalnie zastosować do badania rozwiązań ciągłych, gdy wspomniane klasy abstrakcji są zbiorami gęstymi – daje to w efekcie stałość rozwiązania na całym zbiorze $\mathbb{R}$.

Rozdział 4 jest poświęcony najogólniejszemu równaniu funkcyjnemu pojawiającemu się w całej rozprawie. W przeciwieństwie do Rozdziałów 2 i 3 nie ograniczamy się do funkcji, które przekształcają prostą $\mathbb{R}$ w siebie, ale zupełną przestrzeń metryczną (X, d) w ośrodkową przestrzeń Banacha $(Y, \|\cdot\|)$. Mamy dodatkowo daną przestrzeń probabilistyczną $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ i przekształcenie $f : \Omega \times X \rightarrow X$, które jest $\mathcal{A}$ -mieralne przy każdej ustalonej wartości $x \in X$. W Rozdziale 4 badamy ograniczone i borelowskie rozwiązania $\varphi : X \rightarrow Y$ równania

$$\varphi(x) = \int_{\Omega} \varphi(f(\omega, x)) P(d\omega), \quad (4)$$

gdzie do całkowania funkcji o wartościach wektorowych używamy całki Bochnera. Głównym przedmiotem zainteresowań tej części rozprawy są *zwarte zbiory niezmiennicze*, tzn. zwarte podzbiory K przestrzeni X , które dla wszystkich $\omega \in \Omega$ spełniają warunek

$$f(\omega, K) \subseteq K.$$

Okazuje się, że często ciągłość funkcji φ w każdym punkcie takiego zbioru wymusza już jej stałość. Mówi o tym Twierdzenie 4.1.1. W Rozdziale 4 dowodzę również twierdzenia gwarantującego istnienie zwartych zbiorów niezmienniczych dla pewnych rodzin kontrakcji.

Ostatni rozdział rozprawy, pełniący rolę podsumowania lub dodatku, zawiera dyskusję równania (1). Wyjaśniam w nim, dlaczego rozwiązanie równania (1) w klasie funkcji ograniczonych i ciągłych, bez żadnych dodatkowych założeń nałożonych na funkcję φ , jest tak trudnym zadaniem. Owa trudność wynika z faktu, że w tym przypadku nie istnieje zwarty zbiór niezmienniczy. Ponadto iteraty funkcji wewnętrznych zachowują się w sposób całkowicie nieregularny, co nie ułatwia rozwiązania równania (1). Ostatnia część Rozdziału 5 poświęcona jest przedstawieniu problemów otwartych, które pojawiły się w trakcie moich badań.