dr hab. Małgorzata Bednarska-Bzdęga
UNIWERSYTET IM. ADAMA MICKIEWICZA W POZNANIU
WYDZIAŁ MATEMATYKI I INFORMATYKI

17-08-2023

# Recenzja rozprawy doktorskiej mgr Zofii Miechowicz
## *Pewne warianty kolorowania matroidów*

Rozprawa porusza tematy nawiązujące do klasyki teorii grafów, czyli kolorowania np. krawędzi grafu tak, by nie powstały w nim zadane struktury. Wyniki dotyczą znacznie ogólniejszych niż grafy struktur, jakimi są matroidy. Autorka rozważa wiele wariantów kolorowań elementów nośnika matroidów, w tym takie, w których wymagamy, by każdy cykl zawierał odpowiednio dużo kolorów (rozdziały 3 i 4), nie było cykli prawie monochromatycznych (rozdział 5) i kolorowania $k$ kolorami sumy nośników rodziny $k$ matroidów w taki sposób, by elementy w $i$-tym kolorze tworzyły zbiór niezależny w $i$-tym matroidzie rozważanej rodziny, dla wszystkich $i$. Prócz twierdzeń autorki, praca zawiera przegląd znanych pojęć i twierdzeń z teorii matroidów, które z pewnością doceni czytelnik chcący się czegoś o matroidach dowiedzieć. W niniejszej recenzji skupiam się jednak na wynikach autorki; wspomnianą część przeglądową przeczytałam bardzo pobieżnie.

### OCENA MERYTORYCZNA

Autorka postawiła problemy naturalne na gruncie matematyki dyskretnej, naświetliła je pod różnymi kątami oraz uzyskała wiele nowych wyników, które uważam za wnoszące istotny wkład teorię kolorowań matroidów. Metody dowodowe są wprawdzie elementarne, niemniej wymagające pomysłowości. Niektóre z wyników są prostymi wnioskami ze innych znanych twierdzeń, ale są inspirujące i zachęcające do dalszych badań. Atutem rozprawy jest fakt, że zawiera sporo hipotez autorki (i współautorów jej publikacji), będących w korelacji z uzyskanymi wynikami częściowymi.

Prawie wszystkie nowe twierdzenia pochodzą z czterech współautorskich prac Zofii Miechowicz, z czego jedna została opublikowana (w *Discrete Mathematics*), dwie są dostępne w ArXiv, zaś jedna jest manuskryptem publicznie niedostępnym.

Oto mój, bardzo subiektywny, wybór najciekawszych twierdzeń.

- Twierdzenie 2.7, o kolorowaniu rodziny matroidów z list. Uogólnia twierdzenie Seymoura, ale dowód nie jest powtórzeniem idei Seymoura.
- Fakt 3.5, wiążący doskonałą 1-faktoryzację grafu $K_{2n}$ z 2-lesistością grafu $K_{2n-1}$. Daje dodatkową motywację do zajmowania się $p$-lesistością.
- Dowód twierdzenia 3.6 o 2-lesistości grafów planarnych. Dowód jest bardzo pomysłowy. Trochę szkoda, że samo twierdzenie wynika, co autorka zauważa, z mocniejszego twierdzenia 3.8.
- Twierdzenie 3.13 o $p$-lesistości grafów o ograniczonym stopniu i dużym obwodzie. Sam wynik jest ciekawy, a dowód bardzo ładny, inspirowany metodą Mosera i Tardosa.
- Twierdzenie 5.1, szacujące silną lesistość grafu przez jego acykliczną liczbę chromatyczną. To ładna zależność, poparta prostym, choć nietrywialnym, uzasadnieniem.

Poprawność wszystkich wyników rozprawy, poza twierdzeniem 4.5 i wnioskiem 5.6, nie budzi moich wątpliwości. Do wspomnianych dwóch mam następujące zastrzeżenia.

(1) Trzecia część twierdzenia 4.5: W takiej postaci nie jest według mnie prawdziwa. Na przykład nie zachodzi dla $n = 12$, $r = 8$, $p = 2$. Ogólna idea dowodu jest jasna, ale – o ile czegoś nie przeoczyłam – występujące na końcu stwierdzenie „W kolorowaniu tym każdy kolor może zostać użyty co najwyżej $\lceil \frac{r+1}{p+1} \rceil$ razy" nie jest dobre, choćby dla podanego przeze mnie zestawu parametrów: możemy każdy kolor użyć 4 razy, nie tylko $\lceil \frac{r+1}{p+1} \rceil = 3$ razy.

(2) Wniosek 5.6: Nie jestem pewna, czy w takiej ogólności wniosek jest prawdziwy. Z twierdzenia Alona (twierdzenia 5.5) wynika jedynie tyle, że $\zeta(G) \leqslant \lceil \frac{\Delta+1}{2} \rceil$.

## Pomniejsze uwagi do treści matematycznych

(1) Przydałaby się większa prezycja w definicjach. Oto kilka przykładów:
- Definicja 12: Dobrze byłoby doprecyzować, jak definiujemy obwód grafu bez cykli. Od tego zależy poprawność sformułowań w późniejszych twierdzeniach.
- s.22, definicja matroidu dualnego: zbiór rozpinający matroidu nie został zdefiniowany.
- Definicja 33: Coś tu nie gra. Nie zrozumiałam, jak autorka definiuje $\mathbb{A}'$.
- s.31, „Rodzinę baz matroidu (...) tworzy zbiór (...) wszystkich transwersali systemu (...)": A co w przypadku, gdy system nie ma żadnej transwersali?
- Definicje 34 i 35: Na końcu powinno być $B_2$ zamiast $B_1$.
- Definicja 46: Zamiast „zbiory $A_i$ należące odpowiednio do $V(G_i)$" powinno być „zbiory $A_i$ zawarte odpowiednio w $V(G_i)$".
- Definicja 56: Brak doprecyzowania, jak definiujemy $p$-lesistość matroidu bez cykli. Ma to znaczenie dla oceny poprawności późniejszych twierdzeń, na przykład fakt 3.3 mógłby być nieprawdziwy, gdybyśmy zdefiniowali $arb_2(G) = 1$ dla drzew.

(2) s.40, dowód twierdzenia 2.5: W ostatniej formule powinno być wszędzie $r_i$ zamiast $rk_i$.

(3) Koniec dowodu twierdzenia 2.5: Ciekawa jestem, jak rozumieć ostatnie zdanie. Jak zastosować twierdzenie o sumie matroidów, by otrzymać tezę?

(4) s.42, omówienie twierdzenia Brooksa: ograniczenie liczby chromatycznej przez $\Delta$ nie jest prawdziwe we wszystkich wskazanych przypadkach – brakuje założenia o spójności grafu.

(5) Hipoteza 1: $|L(v)|$ wskoczyło w niewłaściwe miejsce.

(6) Fakt 2.1: Przyznam, że nie wiem, co to jest graf cięciwowy.

(7) s.45, „Lemat 2.6 jest bezpośrednim wnioskiem z twierdzenia o sumie matroidów (twierdzenia 2.4)": W jaki sposób wyprowadzić ten wniosek?

(8) Twierdzenie 2.7, punkt (ii): Powinno być $f^{-1}(\{i\})$ zamiast $f^{-1}(i)$.

(9) s.48, przed wnioskiem 2.2: Powinno być „Z wniosku 2.1 i twierdzenia 2.8" zamiast „Z twierdzeń 2.1 oraz 2.8". Nawiasem mówiąc, byłoby bezpieczniej dla autorki i przyjaźniej dla czytelniczki, gdyby twierdzenia i wnioski miały wspólny licznik. Znacznie łatwiej wyszukuje się wtedy odpowiednie miejsca.

(10) Sporo problemów przy czytaniu rozdziału 3 przysporzyło mi dwukrotne zdefiniowanie acyklicznego kolorowania krawędzi, niestety nierównoważne. Na początku pracy mamy definicję 13, a potem na stronie 51 inną definicję – z dodatkowym warunkiem, że kolorownie ma być poprawne. W rozdziale 3 nie wiadomo, która z definicji obowiązuje – z kontekstu wynika, że czasem chodzi o kolorowanie z warunkiem poprawności, a czasem nie.

(11) s.55, linijka 4 i 5 dowodu: Powinno być kolorowanie $q$-cykliczne, nie $p$-cykliczne.

(12) Definicja 57: Czy zamiast $\chi_g$ nie powinno być $arb_g$?

(13) s.58: Zamiast „Zastosowanie faktu 3.8" powinno być „Zastosowanie faktu 3.4".

(14) s.70, definicja $\mathrm{farb}(G)$: tu nie powinno być sufitu.

(15) s.75, punkt 5°: Dlaczego $t$ nie zależy od $n$? To zależy od tego, co oznacza „odpowiednio duże $n$" na początku dowodu. Na przykład jeśli $n$ zależy od $e(G)$, to $t$ może zależeć od $n$.

(16) Dowód twierdzenia 4.3: Z dowodu wynika nieograniczoność paramatru dla multigrafów. Jak otrzymać z tego nieograniczoność w klasie grafów (czyli grafów prostych)?

(17) Twierdzenie 4.8: Czy tu nie brakuje założenia, że $n \geqslant p + 1$?

(18) s.89, zdanie po fakcie 5.1, o poprawności kolorowania po ściągnięciu elementu matroidu: Nie widzę tej równoważności. Widzę zależność tylko w jedną stronę.

(19) Fakt 5.2, pierwszy podpunkt: kolorowanie silnie lesiste nie zostało zdefiniowane. Zgaduję, że chodzi o silnie acykliczne lub silne.

(20) s.93, linijka 3: Powinno być $arb(G)$ zamiast $arb_2(G)$.

(21) Dowód twierdzenia 5.3: Autorka pisze, że stosuje lemat 3.9, tymczasem w lemacie 3.9 nie ma mowy o rozkładzie na opisane zbiory $A$ i $F$. Mam wrażenie, że zastosowany jest odpowiednik lematu 3.5 dla grafów o ustalonym genusie. Nie widzę takiego twierdzenia w rozprawie. Być może wystarczyłoby jedno z twierdzeń z [19].

(22) Początek rozdziału 5.5, „co stanowi dolne ograniczenie dla silnej lesistości": To dwuznaczny fragment i może sugerować, że mowa o (nieprawdziwym) dolnym ograniczeniu silnej lesistości przez $\lceil\frac{\Delta+1}{2}\rceil$.

(23) Rozdział 5.5, linijka 6: W zdaniu „Stąd mamy..." – poza nieporządkiem w nawiasach – mamy na końcu $= \Delta$, a powinno być $= \Delta + 1$.

(24) Twierdzenie 5.5: Omyłkowo, jak przypuszczam, zostało napisane, że kolorawnie jest poprawne.

(25) Wniosek 5.6: Chyba obwód powinnien być o 2 większy?

## Uwagi redakcyjne

Praca jest napisana ładnym, żywym jęzkiem. Autorka dołożyła starań, by wyjaśniać to, o czym pisze, matematycznie i na poziomie intuicyjnym. Małe zastrzeżenia językowe i redakcyjne, wymienione poniżej, nie wpływają na moją ogólną, pozytywną ocenę pracy.

- Szkoda, że w pracy nie ma spisu oznaczeń i definiowanych pojęć.
- Zapożyczenia z angielskiego nie są ładne: zamiast line-grafu lepiej brzmiałby całkowicie polski „graf krawędziowy", a „sekcja" nie powinna zastępować „rozdziału". Zwłaszcza „sekcja definicji" brzmi groźnie.
- Pojawiają się błędy w odmianie nazwisk, np. powinno być „Nasha-Williamsa" (nie „Nash-Williamsa"), „przez Greenhill" (nie „przez Greenhilla"; Greenhill jest kobietą).
- Niezbyt duża dbałość o interpunkcję psuła mi nieco przyjemność czytania. Czasem brakuje kropek na końcu zdań, znacznie częściej – przecinków w zdaniach złożonych. Były zdania, które czytałam kilka razy, by zrozumieć o co chodzi, bo miałyby różne znaczenia w zależności od tego, gdzie wstawilibyśmy przecinek.

## Konkluzja

Stwierdzam, że rozprawa mgr Zofii Miechowicz spełnia zwyczajowe i ustawowe wymagania dla prac doktorskich. Według mnie pani Miechowicz w pełni zasługuje na nadanie jej stopnia doktora.

MBednarska

Małgorzata Bednarska-Bzdęga